УДК 621.382.001.63:517.52

ПРОБЛЕМЫ АНАЛИЗА СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЖИМОВ ЭЛЕКТРОННЫХ УСТРОЙСТВ НА ОСНОВЕ РЯДОВ ВОЛЬТЕРРЫ

А. М. Бобрешов, Н. Н. Мымрикова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 17.07.2013 г.

Аннотация: рассмотрены основные факторы, ограничивающие применение рядов Вольтерры для анализа электронных схем в сильно нелинейных режимах. Предложены эффективные алгоритмы формирования и симметризации нелинейных источников высших порядков. Показано, что радиус сходимости ряда Вольтерры определяется сингулярными точками аналитического продолжения отклика системы в комплексную область.

Ключевые слова: нелинейные динамические системы, электронные схемы, сильно нелинейные режимы, ряды Вольтерры, ядра Вольтерры высших порядков, аналитическая система, радиус сходимости.

Abstract: this paper considers the main factors limiting the Volterra series application for the strongly nonlinear analysis of electron circuits. The efficient algorithms are proposed to model and symmetrize the higher orders nonlinear sources. It is found that the Volterra series convergence radius is defined by the singular points for the analytical continuation of the system response to the complex domain.

Keywords: nonlinear dynamic systems, electron circuits, strongly nonlinear modes, Volterra series, Volterra kernels of higher orders, analytical system, convergence radius.

ВВЕДЕНИЕ

Расчет многочастотных режимов нелинейных систем представляет собой чрезвычайно сложную задачу, и существующие методы математического анализа далеки от совершенства, несмотря на постоянно появляющиеся в печати сообщения о новых или модифицированных методах. Общепринятыми подходами исследования нелинейных динамических систем считаются три: прямое интегрирование уравнений во временной области, гармонический баланс и функциональные ряды. Каждый метод имеет свои проблемные стороны [1].

Современные аналоговые и цифровые устройства должны иметь высоколинейные характеристики. При линеаризации устройств (а это основной путь решения проблемы ЭМС) функциональные ряды выдвигаются на первый план [2; 3]. Это объясняется тем, что ряды Вольтерры считаются единственной точной аналитической моделью широкого класса нелинейных систем. Именно ряды Вольтерры позволяют глубоко проникнуть в сущность физических явлений, проследить за вкладом в нелинейные искажения источников различного происхождения, увидеть доминирующие источники, а также механизмы компенсации нелинейных искажений.

Ряды Вольтерры применяются не только в электронике, но и практически во всех областях естествознания, в частности, в механике, аэродинамике, гидродинамике, оптике, биологии, биомедицине, искусственных нейронных сетях, экономике и т. д. В подавляющем большинстве случаев используются мультилинейные (чаще билинейные) поведенческие модели "черного ящика", описываемые упрощенными, "короткими" рядами Вольтерры. При расчете электронных устройств, представленных эквивалентными схемами, расчеты обычно выполняются в частотной области для нелинейностей 3-го или даже 2-го порядка [1-3]. Имеется очень мало работ [4; 5], в которых рассматривается нелинейное взаимодействие хотя бы 5-го порядка.

Самая распространенная точка зрения заключается в том, что вычисление ядер Вольтерры выше 3-го порядка является трудоемкой процедурой, поэтому анализ сильно нелинейных режимов на основе функциональных рядов становится непрактичным. На это можно возразить, что все сильно нелинейные задачи, решаемые за рамками уровня "interceptpoint 3",сталкиваются с "проклятием размерности". Систематическое исследование факторов, ограничивающих применение рядов Вольтерры в сильно нелинейных режимах, не проводилось. Это касается также сходимости рядов.

Вопрос о сходимости рядов Вольтерры очень сложный, и к тому же запутанный. Существующие публикации или носят частный характер [6; 7] или имеют чисто математическое направление и не выходят за рамки общих положений функционального анализа [8]. Более того, приводятся противоречивые сведения. В одних случаях утверждается, что ряды Вольтерры — это точная модель любой непрерывной системы, в других случаях отмечается, что формализм рядов Вольтерры обоснован только для малых уровней нелинейности. Это свидетельствует о том, что всесторонние глубокие исследования различных аспектов применения рядов Вольтерры для существенно нелинейных режимов по-прежнему остаются актуальными.

1. АППРОКСИМАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ РЯДАМИ

Операторное описание нелинейных систем

$$y(t) = L[x(t)] \tag{1}$$

является альтернативой прямого численного интегрирования уравнений. Применительно к электронным схемам оператор L отображает множество входных сигналов $x(t)$ во множество выходных сигналов $y(t)$. Изучение произвольных нелинейных операторов представляет собой весьма сложную и, по-видимому, необозримую задачу. Однако многие важные классы нелинейных систем могут быть описаны полностью.

Операторный подход к исследованию динамических систем предполагает обобщение понятия функции многих переменных на бесконечно-мерные пространства. Для этой цели рассматриваются функционалы как отображение множества функций во множество вещественных чисел.

В теории функционалов аналогом степенных функций $a_n x^n(t)$ служат нелинейные интегральные операторы (функционалы) вида

$$L_n[x(t)] = \int\limits_0^t \dots \int\limits_0^t k(\tau_1, \dots, \tau_n) x(t-\tau_1) \dots x(t-\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n, \tag{2}$$

$k(\tau_1, \dots, \tau_n)$ — ядра функционалов (ядра Вольтерры).

Из однородных операторов (2) составляются интегральные полиномы $\sum\limits_{n=1}^{N} L_n[x(t)]$, которые являются аналогами алгебраических полиномов $P_n[x(t)] = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n x^n(t)$. Согласно теореме Фреше [9] для любого непрерывного оператора $L[x(t)]$, определенного на компактном множестве функций $x(t)$, существует последовательность интегральных полиномов возрастающих степеней, которая равномерно сходится к оператору L. По существу, теорема Фреше является функциональным аналогом аппроксимационной теоремы Вейерштрасса. Компактность множества входных сигналов означает, что $x(t)$ должны быть ненулевыми в конечном интервале времени. Это серьезное ограничение. Все периодические сигналы не удовлетворяют требованию компактности.

Если оператор L дифференцируем (по Фреше), то в некотором диапазоне изменения входных сигналов $|x(t)| < \rho$ отклик $y(t)$ может быть абсолютно точно представлен бесконечным рядом

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} L_n[x(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^t \dots \int\limits_0^t k(\tau_1, \dots, \tau_n) x(t-\tau_1) \dots x(t-\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n. \qquad (3)$$

В последнем случае ограничение на компактность множества входных сигналов не устанавливается. Это могут быть любые периодические, квазипериодические и непериодические сигналы конечного уровня.

Ряд (3) является функциональным аналогом ряда Тейлора. Диапазон возможного представления оператора L рядом (3) определяется свойствами нелинейной системы. Радиус сходимости ρ ряда (3) - это область аналитичности нелинейной системы. К сожалению, радиус сходимости ряда (3) не имеет простого формульного выражения.

2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ ВОЛЬТЕРРЫ

Функциональные интегральные полиномы вида (2) были впервые введены в рассмотрение В. Вольтеррой [10]. Из теоремы Фреше следует, что поведение любой нелинейной динамической системы может описываться функциональными полиномами Вольтерры с неограниченной точностью. Теоретически это звучит многообещающе, однако на практике все выглядит очень непросто из-за проблем с определением ядер Вольтерры $k(\tau_1, \dots, \tau_n)$. В рамках общей теории [2; 11] перечисляются только основные свойства ядер Вольтерры такие, как

— независимость ядер Вольтерры от времени для систем, инвариантных к сдвигу времени;

— независимость ядер от входных воздействий;

— абсолютная интегрируемость ядер;

— равенство ядер нулю при отрицательности любого аргумента;

— затухание памяти ядер с течением времени;

— симметричность ядер относительно любых перестановок аргументов.

Общих рецептов нахождения ядер Вольтерры высших порядков для любой нелинейной системы не существует. Все выглядит относительно просто только в слабо нелинейном режиме. В частности, для слабо нелинейных схем существуют простые таблицы перехода от исходных дифференциальных уравнений к системам линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для нахождения ядер n-го порядка (называемых подсистемами n-го порядка) [11; 12]. Эти правила преобразования исходных уравнений в СЛАУ могут быть обобщены для вычисления ядер высших порядков ($n > 3$) [12], при этом ядра будут напрямую связаны с параметрами элементов эквивалентной схемы. К сожалению, такая процедура определения ядер возможна только для аналитических систем (точно описываемых рядом (3)).

В том случае, если входное воздействие выходит за область аналитичности системы, аппроксимация нелинейного отклика отрезком ряда Вольтерры по-прежнему возможна. Однако ядра аппроксимирующих полиномов (2) — это уже не те ядра Вольтерры, которые получаются из решения ассоциированных подсистем. Ядра в операторах (2) становятся зависящими от области аппроксимации, т. е. от уровней и длительности сигналов, и даже от алгоритма аппроксимации. Понятно, что такие ядра теряют свойство быть универсальными характеристиками нелинейной системы. Более того, для неаналитической системы ядра Вольтерры не удается связать напрямую с внутренними характеристиками схемы. В этом случае ядра операторов могут быть найдены только в результате обработки внешних характеристик "вход-выход", получаемых в ходе натурных или численных (с привлечением других методов) экспериментов. Иными словами, анализ переводится на бесструктурный уровень "черного ящика", ядра теряют наглядный физический смысл и становятся всего лишь способом (очень громоздким) хранения численной информации о поведении системы в проведенных над ней экспериментах. При этом непрерывные ряды Вольтерры переходят в дискретную форму [3; 13; 14].

Такие конечные ряды Вольтерры следует рассматривать как аппарат функционально-полиномиальной регрессии наподобие метода наименьших квадратов для систем "без памяти". Хорошо известно [1], что нормальные уравнения для определения полиномиальных коэффициентов в методе наименьших квадратов являются плохо обусловленными, т. е. они чрезвычайно сильно зависят от самых незначительных погрешностей, неизбежно присутствующих во входных данных. Естественно, что регрессия с помощью функциональных рядов неизбежно сталкивается с еще более серьезными проблемами, поскольку надо аппроксимировать не только нелинейность, но и память. Неслучайно, что большая часть публикаций по рядам Вольтерры относится именно к этой чрезвычайно сложной задаче. Однако, несмотря на мозговую атаку, большого прогресса в этой области не произошло: надежно идентифицировать по внешним характеристикам можно только ядра 1-го - 3-го порядков, в очень редких случаях до 5-го порядка. К тому же задача идентификации намного усложняется при переходе от одновходовых SISO ("single input – single output") систем к многовходовым MIMO ("multiple input — multiple output") системам.

Таким образом, в широком смысле ряды Вольтерры — это функционально-полиномиальная регрессия поведения нелинейных динамических систем. В более узком смысле, для аналитических систем ряды Вольтерры можно считать функциональным обобщением рядов Тейлора. Только в этом случае ряды Вольтерры являются эффективным подходом к анализу схем, имеющих внутреннюю структуру, в частности, эквивалентных схем. В дальнейшем речь будет идти о возможности применения аналитических рядов Вольтерры для описания сильно нелинейных процессов в устройствах, представленными эквивалентными схемами.

3. ФОРМИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ИСТОЧНИКОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

При расчете нелинейных схем моделью любого нелинейного элемента (для определенности управляемого напряжением) является линейный элемент с параллельно подключенными нелинейными источниками тока различных порядков. Каждый член исходных уравнений вида U^r $(1 < r < n)$ порождает в нелинейном источнике n-го порядка многочисленные комбинации из ядер более низких порядков, чем n [12]. Исключением служит только нелинейный член U^n, дающий единственную комбинацию произведения ядер 1-го порядка

$$U^n \to K(p_1)K(p_2)\dots K(p_n).$$

Нелинейный член U^r $(1 < r < n)$ приводит к появлению в нелинейном источнике n-го порядка суперпозиции произведений ядер следующего вида:

$$K_{l_1}(p_1,\dots,p_{l_1})K_{l_2}(p_{l_1+1},\dots,p_{l_1+l_2})\dots K_{l_r}(p_{n-l_r+1},\dots,p_n), \tag{4}$$

где порядки ядер находятся из условия

$$l_1 + l_2 + \dots + l_r = n. \tag{5}$$

При разложении целого числа n (n — рассматриваемый порядок нелинейности) на r целых положительных чисел необходимо рассматривать всевозможные варианты представления. Во избежание повторения одинаковых наборов $\{l_1, l_2, \dots, l_r\}$ целесообразно наложить условие

$$l_r \geqslant l_{r-1} \geqslant \dots \geqslant l_2 \geqslant l_1. \tag{6}$$

По мере роста порядка нелинейности n число наборов $\{l_1, l_2, \dots, l_r\}$, удовлетворяющих условию (5), резко возрастает. Однако в целом алгоритм формирования замещающих подсистем по исходным уравнениям не очень сложный. И, следовательно, нет принципиальных ограничений для применения рядов Вольтерры в сильно нелинейных режимах из-за громоздкости нелинейных источников.

4. УЧЕТ ПОВТОРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В ПОДСИСТЕМАХ n-ГО ПОРЯДКА

Члены U^n исходных уравнений трансформируются в произведение n ядер l-го порядка и характеризуют первичные взаимодействия основных частот $m\omega_1 + n\omega_2 + \dots$. Преобразование членов U^r $(1 < r < n)$ описывает нелинейное взаимодействие ранее образовавшихся высших гармонических и комбинационных частот между собой и с основными гармониками

$$p(m_1\omega_1 + n_1\omega_2 + \dots) + q(m_2\omega_1 + n_2\omega_2 + \dots) = m\omega_1 + n\omega_2 + \dots, \tag{7}$$

где $p, q, m, n, m_1, n_1, m_2, n_2, \dots$ — всевозможные целые числа.

Согласно модели Вольтерры все нелинейные элементы схемы и соответствующие им нелинейные члены в уравнениях становятся нелинейными источниками, которые излучают во все инцидентные ветви схемы продукты нелинейного взаимодействия не только основных частот, но и ранее образовавшихся высших гармонических и комбинационных составляющих. Эти продукты нелинейного взаимодействия циркулируют по всем контурам схемы, в том числе в обратном направлении, от выхода к входу схемы.

Все сопротивления, емкости и индуктивности являются взаимными элементами, т. е. одинаково проводят ток и в прямом и в обратном направлении. Поэтому в схеме неизменно есть компоненты обратного распространения продуктов нелинейности от нелинейных источников. Нелинейные составляющие обратного распространения снова попадают на нелинейные элементы. Это и есть повторные нелинейные взаимодействия.

Итак, реальные нелинейные схемы всегда содержат петли обратной связи (ОС), по которым циркулируют нелинейные продукты. И если в контуре помимо нелинейного элемента есть хотя бы еще один RLC-элемент, порядок нелинейности становится неограниченным, а ряды Вольтерры будут содержать бесконечное число членов.

Число повторных нелинейных взаимодействий, которые приходится рассматривать при описании схем на структурном уровне, нарастает лавинообразно при увеличении порядка нелинейности. Естественно учет повторных взаимодействий усложняет анализ на основе функциональных рядов. Однако современная техника программирования позволяет учитывать повторные комбинационные взаимодействия в полном объеме.

5. СИММЕТРИЗАЦИЯ ЯДЕР ВОЛЬТЕРРЫ

Одним из свойств ядер Вольтерры является симметричность оригиналов и изображений ядер относительно своих аргументов

$$\begin{aligned} &k(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) = k(\tau_2, \tau_1, \ldots, \tau_n) = k(\tau_n, \tau_{n-1}, \ldots, \tau_1), \\ &K(p_1, p_2, \ldots, p_n) = K(p_2, p_1, \ldots, p_n) = K(p_n, p_{n-1}, \ldots, p_1). \end{aligned} \tag{8}$$

В общем случае число возможных перестановок $n!$.

Симметричность ядер Вольтерры позволяет несколько упростить их вычисление. В каких-то случаях бывает проще сконструировать несимметричный фрагмент ядра, а затем восстановить недостающие фрагменты ядра до полностью симметричного выражения.

Поэтому фрагменты нелинейных источников (4) также подлежат симметризации. Однако в сильно нелинейном режиме симметризация нелинейных источников требует выполнения очень большого числа операций. Быстродействие программ расчета сильно нелинейных режимов напрямую зависит от оптимальности алгоритма симметризации нелинейных источников. Если при построении нелинейных источников производить все $n!$ перестановок аргументов, то программа начинает "зависать" при $n = 10$. Увеличение мощности компьютера не дает существенного продвижения. Например, в работе [5] описывается грандиозный эксперимент с распараллеливанием вычислений на 8 компьютерах, в результате которого были рассчитаны ядра 9-го порядка. При этом использовались предварительно подготовленные таблицы. Процесс длился более 10 часов.

Здесь следует идти не по пути увеличения производительности компьютеров, а совершенствовать алгоритмы симметризации. В частности, число перестановок в нелинейных источниках можно сократить на несколько порядков, если исключить ненужные перестановки: 1) внутри ядер более низких порядков, т. к. эти ядра уже симметризованы на предшествующих этапах; 2) внутри группы ядер одинаковых порядков, которые только изменяют порядок сомножителей в произведении.

Даже только эти меры позволяют формировать симметричные нелинейные источники 15-17 порядков на компьютерах средней производительности. Как правило, этого более чем достаточно.

6. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Как уже отмечалось, в одних случаях модель устройства может быть аналитической, т. е. точно описываться рядами Вольтерры (3), в других случаях конечные ряды Вольтерры — это инструмент регрессионного анализа нелинейных динамических систем. При этом аналитические модели могут быть как структурными (схемными), так и бесструктурными (блочными).

Для неаналитических систем рассмотрение проводится на уровне поведенческих моделей со свойствами "черного ящика". В любом случае проведению запланированных экспериментов должен предшествовать этап определения параметров модели. Техника идентификации для схемных и поведенческих моделей существенно отличается. Однако и в том и в другом случае это — задача не из легких, требующая проведения большого числа натурных экспериментов и вычислений. Проблема идентификации параметров модели совершенно необозримая, поскольку она является узким местом исследований сложных нелинейных динамических систем.

Точность расчета аналитической системы, представленной эквивалентной схемой, исключительно зависит от точности определения параметров элементов схемы. Если модель плохо соответствует реальному устройству, то никакая точность последующих расчетов не поможет исправить ситуацию.

Первый шаг — это выбор структуры эквивалентной схемы. Размеры эквивалентных схем одних и тех же устройств могут очень сильно варьироваться. Далеко не всегда схемы с большим числом элементов являются более точными, поскольку, чем меньше идентифицируемых параметров, тем надежнее они определяются. Поэтому предпочтение следует отдавать хорошо зарекомендовавшим себя эквивалентным схемам с минимальным числом элементов, правильно отражающим физические процессы в устройстве.

Следующим шагом после определения топологии схемы является идентификация линейных параметров схемных элементов. Источниками информации могут служить конструктивно-технологическая документация, нормативно-справочные данные, измерение статических и динамических характеристик в разных точках частотного диапазона, S-параметры и т. д.

Самый сложный этап — это идентификация нелинейных параметров эквивалентной схемы. Здесь следует иметь ввиду, что

— наличие в схеме нескольких нелинейных элементов весьма затрудняет разделение вкладов каждого из них;

— источник, управляемый двумя напряжениями, эквивалентен нескольким обычным нелинейным элементам в смысле надежности идентификации;

— повышение степени аппроксимирующего полинома для любого нелинейного элемента сопровождается ухудшением достоверности определения полиномиальных коэффициентов.

Даже для доминирующего нелинейного элемента не стоит выбирать степень аппроксимирующего полинома выше 5-7. Достаточно адекватное извлечение параметров нелинейных элементов можно получить из амплитудных и фазовых характеристик, описывающих поведение высших гармонических составляющих в слабо нелинейных режимах.

7. РЯДЫ ВОЛЬТЕРРЫ И РЯДЫ ТЕЙЛОРА

Многие из непосвященных во все тонкости математического аппарата рядов Вольтерры имели отрицательный опыт, столкнувшись с их расходимостью.

Почему процесс последовательного решения ассоциированных подсистем для определения ядер Вольтерры более высоких порядков по ядрам более низких порядков может срываться в сильно нелинейных режимах? Причина этого в том, что аналитические ряды Вольтерры являются обобщением рядов Тейлора на динамические системы. Когда говорят, что ряды

Вольтерры — это ряды Тейлора “с памятью”, то тем самым подчеркивают фундаментальную роль этого аппарата в теории нелинейных систем. При этом обычно остается в тени другая сторона этой аналогии. Непрерывность и дифференцируемость функции $f(x)$ на интервале $(-R, R)$ гарантирует разложение Тейлора в окрестности $(-\rho, \rho)$, не обязательно совпадающей с интервалом дифференцируемости функции $(-R, R)$. Тривиальным примером служит функция $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, непрерывная и дифференцируемая на всей числовой оси, но разложение в ряд Тейлора возможно только на интервале $|x| < 1$. Этот интервал характеризуется особыми точками аналитического продолжения функции на комплексную область. Для функции $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ особые точки $z = \pm i$ определяют окружность единичного радиуса. Разложение Тейлора справедливо только внутри этого круга, вне круга имеет место разложение в ряд Лорана [15] (с отрицательными степенями z).

В связи с тем, что ряды Тейлора далеко не всегда представляют собой решение нелинейных уравнений, то и аналитические ряды Вольтерры наследуют те же проблемы.

8. ОСОБЫЕ ТОЧКИ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Проиллюстрируем на специальном примере, что радиус сходимости ряда Вольтерры — это точки, в которых решение перестает существовать в виде степенного ряда. Придется ограничиться 3-й степенью аппроксимирующего полинома, т. к. в общем случае решение для произвольных алгебраических уравнений не может быть получено. Даже для кубического уравнения формулы Кардано не очень удобны для интерпретации.

Кубическое уравнение

$$a_1 u^3 + a_2 u^2 + u - \varepsilon = 0 \tag{9}$$

согласно формулам Кардано имеет решение:

$$y_1 = Y_1 - Y_2, \quad y_{2,3} = -\frac{y_1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(Y_1 + Y_2)i, \tag{10}$$

где

$$Y_{1,2} = \sqrt[3]{\sqrt{(p/3)^3 + (q/2)^2} \mp q/2}, \tag{11}$$

$$p = \frac{1 - \alpha \cdot a_2}{\sqrt[3]{a_3}}, q = \frac{2}{3}\alpha^2 a_2 - \alpha - \varepsilon, \quad \alpha = \frac{a_2}{3a_3}.$$

Один из корней всегда вещественный, другие корни либо оба вещественные, либо комплексно-сопряженные, причем любой из корней может быть вещественным, а может быть комплексным.

Для дальнейших рассуждений необходимо построить аналитическое продолжение функции $y_i(\varepsilon)$ $(i = 1, 2, 3)$ в комплексную область

$$y_i(\varepsilon) \to y_i(z).$$

Характер корней при различных значениях z зависит от знака подкоренного выражения

$$(p/3)^3 + (q/2)^2.$$

Для сокращения записи введем обозначения:

$$\rho_3 = \frac{2}{3\sqrt{3\,|a_3|}}, \quad R = \rho_3\,|1 - \alpha \cdot a_2|^{3/2}, \quad \Lambda = \frac{2}{3}\alpha^2 \cdot a_2 - \alpha. \tag{12}$$

Можно показать, что ρ_3 — это радиус сходимости решения для $a_2 = 0$. При условии $p > 0$ особыми точками функций $y_i(z)$ являются $z_{1,2} = -\Lambda \pm iR$. При $p < 0$ особые точки $z_{1,2} = \Lambda \pm R$. В соответствии с теорией функции комплексной переменной, решение $y_i(z)$ может быть представлено рядом Тейлора только внутри круга с радиусом

$$|z| = \sqrt{R^2 + \Lambda^2}, \quad p > 0$$

или

$$|z| = \min\{|R - \Lambda|, |R + \Lambda|\}, \quad p < 0. \tag{13}$$

Возвращаясь к функции действительной переменной ε, можно утверждать, что решение на основе рядов Тейлора может быть найдено только при изменении входного воздействия ε в пределах от $-\rho$ до ρ, где ρ — радиус сходимости

$$\rho = \begin{cases} \sqrt{R^2 + \Lambda^2} \text{ при } \frac{1-\alpha}{\sqrt[3]{a_3}} > 0 \\ \min\{|R - \Lambda|, |R + \Lambda|\} \text{ при } \frac{1-\alpha}{\sqrt[3]{a_3}} < 0 \end{cases}. \tag{14}$$

Представленные на рис. 1 расчеты полностью подтверждают этот вывод. Центральные кривые соответствуют точному решению уравнения (9) при $a_2 = 0.5$, $a_3 = -0.1$ (рис. 1a) и $a_3 = 0.1$ (рис. 1b). Метод простой итерации и метод Ньютона дают правильные результаты для всех показанных на рис. 1 значений ε. Однако решение, полученное при помощи рядов Вольтерры, сходится к правильному результату только до значений $\rho = 0.429$ (рис. 1a) и $\rho = 0.745$ (рис. 1b). Эти критические значения ρ полностью соответствуют оценкам (14).

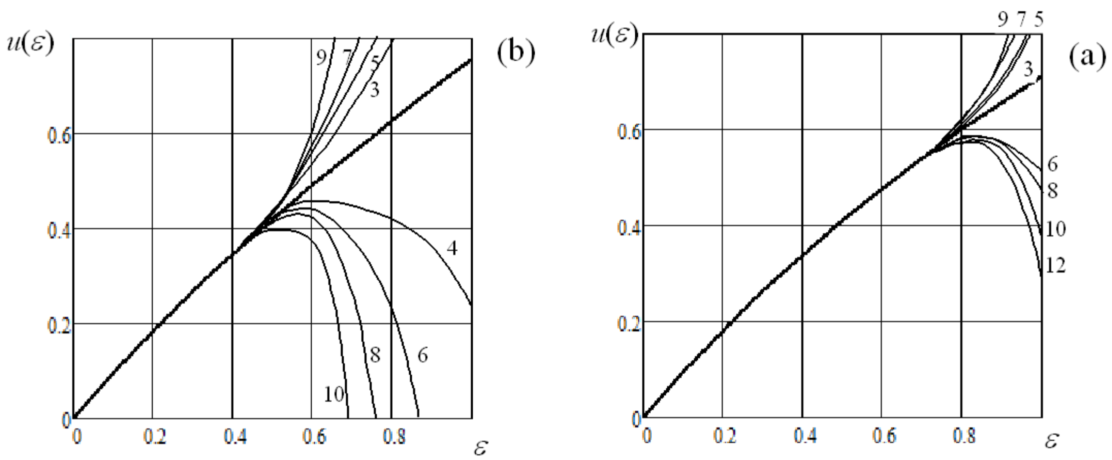

Рис. 1. *Расходимость рядов Вольтерры за пределами аналитичности системы;* ***(a)*** *—* $a_3 = -0.1$*;* ***(b)*** *—* $a_3 = 0.1$.

При $a_3 = -0.1$ значение $\alpha = -0.83$, и используется нижняя часть (14), при $a_3 = 0.1$ значение $\alpha = 0.83$, и применяется верхняя часть (14). Расходящиеся веером за критическими точками кривые рассчитаны с помощью рядов Вольтерры при учете в них различного числа ядер. Максимальные порядки учитываемых ядер отмечены на кривых. Хорошо видно, что никаких видимых аномалий в поведении точного решения не наблюдается. Без математического обоснования расходимость рядов Вольтерры выглядит непредсказуемой, т. к. поведение зависимостей на рис. 1 можно классифицировать как слабо нелинейное.

9. РЯДЫ ВОЛЬТЕРРЫ И МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

Если нелинейные системы не имеют памяти, то ряды Вольтерры становятся, по существу, итерационным методом решения нелинейных алгебраических уравнений. Несмотря на огромное разнообразие методов решения нелинейных уравнений, ни один из них не гарантирует нахождения всех решений любых уравнений. Естественно, и ряды Вольтерры не могут претендовать на полную универсальность. С помощью функциональных рядов можно найти только те решения, которые представимы суммой степеней входного воздействия. Именно этим и определяется радиус сходимости рядов Вольтерры.

Среди других итерационных методов ряды Вольтерры ближе всего к методу простой итерации. Моделью нелинейного элемента в методе рядов Вольтерры служит неизменяемый линейный элемент с параллельно подключенным нелинейным источником, при формировании которого не учитываются уровни нелинейности выше номера итерации. В методе простой итерации линейные элементы тоже фиксированные, но итеративный источник не фильтрует нелинейные члены, и может содержать линейные члены. В методе рядов Вольтерры нелинейные источники не могут содержать линейных членов, а начальные приближения всегда берутся из линейной теории. Поэтому ряды Вольтерры обладают всегда пониженным радиусом сходимости по сравнению с методом простой итерации и тем более методом Ньютона-Рафсона.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ряды Вольтерры всегда позволяют выполнить анализ слабо нелинейных режимов. Однако при существенно нелинейных процессах могут возникнуть принципиальные, непреодолимые в рамках классического подхода трудности, которые связаны с наличием критических для рядов Вольтерры точек. Эти критические точки неявным образом связаны с линейными и нелинейными параметрами схемы, и установить их точное местоположение a priori, до проведения расчетов невозможно. Может быть так, что эти критические точки не проявят себя, если они лежат за пределами уровней подаваемых на вход сигналов. Однако вполне возможно появление таких критических точек сразу за пределами слабо нелинейного режима. В последнем случае приходится с сожалением признать, что ряды Вольтерры позволяют далеко не всегда выполнить полный цикл расчетов, без привлечения других методов.

Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 - 2013 годы по соглашению №14.B37.21.0620 от 20.08.2012г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Maas S.A. Nonlinear Microwave and RF Circuits. — Artech House, 2003. — 582 p.

[2] Schetzen M. The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems. — Krieger Pub Co, 2006. — 595 p.

[3] Schreues D., O'Droma M., Goacher A.A. RF Power Amplifier Behavioral Modeling. — Cambrige University Press, 2008. — 269 p.

[4] Heiskanen A., Rahkonen T. 5-th Order Multi-Tone Volterra Simulator with Component-level Output // IEEE International Symposium on Circuits and Systems. ISCAS 2002. — Vol. 3. — P. 591–594.

[5] Kolding T.E., Larsen T. High Order Volterra Series Analysis Using Parallel Computing //

International Journal of Circuit Theory and Applications. — 1997. — Vol. 25, № 2. — P. 107–114.

[6] Helie T., Laroche B. Computation of Convergence Bounds for Volterra Series of Linear-Analytic Single-Input Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2011. — Vol. 56, № 9. — P. 2062–2072.

[7] Peng Z.K., Lang Z.Q. On the Convergence of the Volterra Series Representation of the Duffing'sOscilators subjected to Harmonic Excitations // Journal of Sound and Vibration. — 2007. — Vol. 305, № 1–2. — P. 322–332.

[8] Пупков К. А., Капалин В.И., Ющенко А.С. Функциональные ряды в теории нелинейных систем. — М.: Наука, 1976. — 448 с.

[9] Методы классической и современной теории автоматического управления. Т. 1. / Под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. — М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. — 2004. — 656 с.

[10] Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1982. — 304 с.

[11] Богданович Б.М. Нелинейные искажения в приемно-усилительных устройствах. — М.: Связь, 1980. — 280 с.

[12] Бобрешов А.М., Мымрикова Н.Н., Уткин А.М. Методы анализа нелинейных схем на основе функциональных рядов // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. — 2012. — Т. 15, № 3. — С. 51–58.

[13] Wang T., Brazil T.J. Volterra-Mapping-Based Behavioral Modeling of Nonlinear Circuits and Systems for High Frequencies // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. — 2007. — Vol. 51, № 5. — P. 1433–1440.

[14] Zhu Q., Dooley J., Brazil T.J. Simplified Volterra Series Based Behavioral Modeling of RF Power Amplifiers Using Deviation – Reduction // International Microwave Symposium Digest. — 2006. — P. 1113–1116.

[15] Свешников А.Ф., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. – М.: Физматлит. — 2004. — 335 с.

Бобрешов Анатолий Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры электроники ВГУ
E-mail: bobreshov@phys.vsu.ru
Тел.: (473)–220–82–84

Bobreshov Anatoly Mikhailovich, Dr. Sci (Phys.-Math.), full professor of electronics department of Voronezh state University
E-mail: bobreshov@phys.vsu.ru
Tel.: (473)–220–82–84

Мымрикова Нина Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры электроники ВГУ
E-mail: ninamymrikova@gmail.com
Тел.: (473)–220–82–84

Mymrikova Nina Nikolaevna, Cand. Sci (Phys.-Math.), associate professor of electronics department of Voronezh state University.
E-mail: ninamymrikova@gmail.com
Tel.: (473)–220–82–84