УДК 517.911

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МАЛЫХ ДЕФОРМАЦИЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ С ВНУТРЕННИМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

С. А. Шабров

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 01.02.2013 г.

Аннотация: в работе применяется поточечный подход к изучению математических моделей, возникающих при описании малых деформаций стержневой системы, которая имеет внутреннюю структуру приводящую к потере гладкости решения.
Ключевые слова: производная по мере, интеграл Стилтьеса, математическая модель.

Abstract: in point-to-point approach is applied to the study of mathematical models arising in the description of deformations of the core system, which has an internal structure resulting in the loss of smoothness of solutions.
Keywords: derivative of the measure, Stieltjes integral, mathematical model.

В работе изучается линейная модель, возникающая при моделировании малых деформаций стержневых систем, при этом мы используем поточечный подход, который был предложен еще Ф. Аткинсоном [1] и М. Г. Крейном [2]. Однако, через некоторое время развитие этого направления замедлилось, и только после выхода работ Ю. В. Покорного [3], [4], в которых наряду с интегралом Стилтьеса предлагалось использование производных Радона–Никодима, оно получило новый импульс. Последнее показало свою высокую эффективность (см., напр., [5], [6]) для краевых задач второго порядка. И это неудивительно: возникающее дифференциальное уравнение является обыкновенным, т.е. поточечным, что в отличие от теории обобщенных функций, позволяет привлекать к анализу решений математических моделей качественные методы (типа теорем Ролля).

ЛИНЕЙНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАЛЫХ ДЕФОРМАЦИЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Пусть изучаемый объект, который состоит из конечного числа стержней сочлененных шарнирно, растянут вдоль отрезка $[0;\ell]$ оси Ox и деформируется в вертикальной плоскости. Обозначим через $0<\xi_1<\xi_2<\ldots<\xi_n<\ell$ — точки шарнирного сочленения стержней. К этим точкам, для удобства рассуждений, добавим точки $\xi_0=0$ и $\xi_{n+1}=\ell$.

Пусть система деформируется под воздействием внешней силы, приложенной перпендикулярно к положению равновесия и действующей в одной плоскости. Мы предполагаем деформации малыми, опуская в рассуждениях малые старших порядков. Также мы считаем деформации системы непрерывными функциями, заданными на отрезке $[0,\ell]$. Пусть $u(x)$ — форма деформации, принятая под воздействием на элемент $[x,x+dx)$ силой $dF(x)$, где $F(x)$ — суммарная сила, приложенная к участку $[0;x)$, причем $F(x)$, что вполне естественно с точки зрения физики, имеет

© Шабров С. А., 2013

конечное на $[0;\ell]$ изменение. Выполняемая этой силой работа при перемещении нашего элемента на дистанцию $u(x)$, равна $u(x)\,dF(x)$. Вдоль всей цепочки стержней затрачивается энергия $\Phi_F(u) = \int\limits_0^\ell u(x)\,dF(x)$. Последний интеграл существует по Риману–Стилтьесу, так как $u(x)$ непрерывна на $[0;\ell]$ и $F(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[0;\ell]$.

Найдем энергию $\Phi_Q(u)$, накапливаемую за счет упругой реакции окружающей среды. Пусть dQ — локальный коэффициент упругости внешней среды. При отклонении элемента $[x, x+dx)$ на дистанцию h сила упругой реакции по закону Гука равна $h\,dQ(x)$. Поэтому работа по преодолению этой силы при изменении h от нуля до $u(x)$ равна $\left(\int\limits_0^{u(x)} h\,dh\right) dQ = \dfrac{u^2}{2}\,dQ$, что в целом на $[0,\ell]$ приводит к интегралу $\Phi_Q(u) = \int\limits_0^\ell \dfrac{u^2}{2}\,dQ$, который опять же существует по Риману–Стилтьесу. Полная энергия $\Phi(u)$, накапливаемая стержнем под воздействием нагрузки $F(x)$, определяется еще дополнительным слагаемым $\Phi_0(u)$, описывающим внутреннюю энергию стержней. Подчеркнем, что рассматриваемая функция $u(x)$ — это гипотетическая (виртуальная) деформация. Реальная деформация должна давать минимум потенциальной (полной) энергии $\Phi(u)$.

Работа, которую необходимо совершить на изменение длины участка $[x; x+dx)$ на величину $dl - dx = \left(\sqrt{1+u'^2(x)} - 1\right) dx$, согласно закону Гука, равна $r(x)\cdot\left(\sqrt{1+u'^2(x)} - 1\right) dx$, где $r(x)$ — натяжение стержня в точке x, что вдоль всей системы приводит к интегралу $\int\limits_0^\ell r(x)\cdot\left(\sqrt{1+u'^2(x)} - 1\right) dx$. Раскладывая $\sqrt{1+u'^2}$ в ряд Тейлора и отбрасывая малые высокого порядка, будем иметь $\sqrt{1+u'^2} - 1 \cong \dfrac{u'^2}{2}$. Тогда накопленная энергия за счет внутренних сил упругости равна $\int\limits_0^\ell \dfrac{r(x)u'^2(x)}{2}\,dx$.

Пусть x — регулярная точка, т. е. x не совпадает ни с одной ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда $\widehat{p}(x) = E(x)I(x)$, где $E(x)$ — модуль Юнга и $I(x)$ — момент инерции сечения; $(\widehat{p}u''_{xx})(x)$ имеет физический смысл изгибающего момента, действующего в поперечном сечении, проходящего через точку x. Поэтому, работа, необходимая для придания элементу $[x; x+dx)$ изгибающего момента $(\widehat{p}u''_{xx})(x)$, равна $\dfrac{\widehat{p}(x)u''^2_{xx}(x)}{2}\,dx$, что вдоль всей цепочки приводит к сумме

$$\sum_{i=0}^{m} \int\limits_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \frac{\widehat{p}(x)u''^2_{xx}(x)}{2}\,dx.$$

Таким образом,

$$\Phi_0(u) = \sum_{i=0}^{m} \int\limits_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \frac{\widehat{p}(x)u''^2_{xx}(x)}{2}\,dx + \int\limits_0^\ell \frac{r(x)u'^2(x)}{2}\,dx.$$

Пусть в каждой точке ξ_i шарнирного сочленения стержней добавлена пружина жесткости $\widehat{\gamma}_i$, реагирующая исключительно на изгибающий момент, следующим образом. Один конец пружины припаен к правому концу стержня, находящегося слева от ξ_i, а другой — к левому концу стержня, находящегося правее точки ξ_i. Тогда энергия, накапливаемая этой пружиной, равна $\widehat{\gamma}_i \dfrac{(\Delta u'(\xi_i))^2}{2}$, так как с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, изменение длины пружины равно $\Delta u'(\xi_i) = u'(\xi_i + 0) - u'(\xi_i - 0)$. Следовательно, всеми пружинами накапливается энергия

$$\sum_{i=1}^{m} \widehat{\gamma}_i \frac{(\Delta u'(\xi_i))^2}{2}.$$

Предположим, что к каждой точке $x = 0$ и $x = \ell$ присоединены еще по две пружины жесткостью γ_1, γ_2 и γ_3, γ_4 соответственно. Первая пружина, присоединенная к левому концу системы, реагирует на крутящий момент, возникающий в точке $x = 0$, а вторая — на смещение левого конца. Тогда энергия, накапливаемая этими пружинами, равна $\gamma_1 \dfrac{u'^2(0)}{2} + \gamma_2 \dfrac{u^2(0)}{2}$. Аналогично для пружин, находящихся на правом конце — $\gamma_3 \dfrac{u'^2(\ell)}{2} + \gamma_4 \dfrac{u^2(\ell)}{2}$.

Таким образом, потенциальная (полная) энергия системы равна

$$\Phi(u) = \sum_{i=0}^{m} \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \frac{\widehat{p}(x) u''^2_{xx}(x)}{2}\, dx + \int_0^\ell \frac{r(x) u'^2_x(x)}{2}\, dx + \int_0^\ell \frac{u^2}{2}\, dQ - \int_0^\ell u\, dF + \\ + \sum_{i=1}^{m} \widehat{\gamma}_i \frac{(\Delta u'_x(\xi_i))^2}{2} + \gamma_1 \frac{u'^2(0)}{2} + \gamma_2 \frac{u^2(0)}{2} + \gamma_3 \frac{u'^2(\ell)}{2} + \gamma_4 \frac{u^2(\ell)}{2}. \quad (1)$$

Пусть $\theta(x)$ — функция Хевисайда, равная 0 при $x < 0$, и 1 в противном случае. Введем в рассмотрение возрастающую на $[0;\ell]$ функцию $\widehat{\mu}(x) = x + \sum_{i=1}^{m} \widehat{\gamma}_i \theta(x - \xi_i)$. Заметим, что $\widehat{\mu}(x)$ не определена в точках ξ_i.

Введенная функция порождает на $[0;\ell]$ меру $\widehat{\mu}$, причем мера точки ξ_i равна $\widehat{\mu}\{\xi_i\} = \widehat{\mu}(\xi_i + 0) - \widehat{\mu}(\xi_i - 0) = \Delta\widehat{\mu}_i(\xi_i) = \widehat{\gamma}_i$.

Положим

$$p(x) = \begin{cases} \widehat{p}(x), & \text{если } x \neq \xi_i \, (i = 1, 2, \ldots, m), \\ \widehat{\gamma}_i^2, & \text{если } x = \xi_i \text{ при каком-то } i = 1, 2, \ldots, m. \end{cases}$$

Если теперь воспользоваться понятием μ-производной, то (1) принимает вид

$$\Phi(u) = \int_0^\ell \frac{p u''^2_{x\widehat{\mu}}}{2}\, d\widehat{\mu} + \int_0^\ell \frac{r u'^2_x}{2}\, dx + \int_0^\ell \frac{u^2}{2}\, dQ - \int_0^\ell u\, dF + \\ + \gamma_1 \frac{u'^2(0)}{2} + \gamma_2 \frac{u^2(0)}{2} + \gamma_3 \frac{u'^2(\ell)}{2} + \gamma_4 \frac{u^2(\ell)}{2}. \quad (2)$$

Далее мы изучим функционал более общего, чем (2), на минимум.

Пусть $\mu(x)$ — строго возрастающая на $[0;\ell]$ функция, непрерывная на концах отрезка $[0;\ell]$. Меру, которую порождает функция $\mu(x)$, обозначим через μ.

На множестве E абсолютно непрерывных на $[0;\ell]$ функций, первая производная которых μ-абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$, вторая производная $u''_{x\mu}(x)$ имеет конечное на $[0;\ell]$ изменение, рассмотрим функционал

$$\Phi(u) = \int_0^\ell \frac{p u''^2_{x\mu}}{2}\, d\mu + \int_0^\ell \frac{r u'^2_x}{2}\, dx + \int_0^\ell \frac{u^2}{2}\, dQ - \int_0^\ell u\, dF + \gamma_1 \frac{u'^2_x(0)}{2} + \gamma_2 \frac{u^2(0)}{2} + \gamma_3 \frac{u'^2_x(\ell)}{2} + \gamma_4 \frac{u^2(\ell)}{2}.$$

Если $u(x) \in E$ дает минимум функционалу $\Phi(u)$, то, применяя схему Лагранжа, мы получим, что первая вариация $\delta\Phi(u)h = \dfrac{d}{d\lambda}\Phi(u+\lambda h)\Big|_{\lambda=0}$ равна нулю:

$$\delta\Phi(u)h = \int\limits_0^\ell p u''_{x\mu} h''_{x\mu}\, d\mu + \int\limits_0^\ell r u'_x h'_x\, dx + \int\limits_0^\ell uh\, dQ - \int\limits_0^\ell h\, dF + \gamma_1 u'_x(0)h'_x(0) +$$
$$+ \gamma_2 u(0)h(0) + \gamma_3 u'_x(\ell)h'_x(\ell) + \gamma_4 u(\ell)h(\ell) = 0 \quad (3)$$

для любой $h \in E$. Положив $R(x) = \int\limits_0^x r(s)u'_x(s)\, ds$, второй интеграл в правой части (3) проинтегрируем по частям:

$$\int\limits_0^\ell h'_x r u'_x\, dx = R \cdot h'_x\Big|_0^\ell - \int\limits_0^\ell R h''_{x\mu}\, d\mu = R(\ell)h'_x(\ell) - \int\limits_0^\ell R h''_{x\mu}\, d\mu. \quad (4)$$

Аналогично взяв $\alpha(x) = \int\limits_0^x u\, dQ$ ($x \notin S(Q)$ — множество точек разрыва функции $Q(x)$), третий интеграл дважды проинтегрируем по частям:

$$\int\limits_0^\ell uh\, dQ = \alpha(x)\cdot h(x)\Big|_0^\ell - \int\limits_0^\ell \alpha h'_x\, dx = h(\ell)\alpha(\ell) - \alpha^{(-1)}(x)h'_x(x)\Big|_0^\ell + \int\limits_0^\ell \alpha^{(-1)} h''_{x\mu}\, d\mu =$$
$$= h(\ell)\alpha(\ell) - h'(\ell)\alpha^{(-1)}(\ell) + \int\limits_0^\ell \alpha^{(-1)} h''_{x\mu}\, d\mu, \quad (5)$$

где $\alpha^{(-1)}(x) = \int\limits_0^x \alpha(t)\, dt$. И, наконец, четвертый интеграл в (3) проинтегрируем дважды по частям, положив $F^{(-1)}(x) = \int\limits_0^x F(t)\, dt$:

$$\int\limits_0^\ell h\, dF = F(x)\cdot h(x)\Big|_0^\ell - F^{(-1)}(x)\cdot h'_x(x)\Big|_0^\ell + \int\limits_0^\ell F^{(-1)} h''_{x\mu}\, d\mu = h(\ell)F(\ell) - h(0)F(0) -$$
$$- h'_x(\ell)F^{(-1)}(\ell) + \int\limits_0^\ell F^{(-1)} h''_{x\mu}\, d\mu. \quad (6)$$

Тогда (3), с учетом (4), (5) и (6), принимает вид

$$\int\limits_0^\ell \left[p u''_{x\mu} - R + \alpha^{(-1)} - F^{(-1)}\right] h''_{x\mu}\, d\mu + h'(0)\cdot\gamma_1 u'(0) + h(0)\left(\gamma_2 u(0) + F(0)\right) +$$

$$+h'(\ell)\cdot\Big[\gamma_3 u'(\ell)+R(\ell)-\alpha^{(-1)}(\ell)+F^{(-1)}(\ell)\Big]+h(\ell)\cdot[\gamma_4 u(\ell)+\alpha(\ell)-F(\ell)]=0. \quad (7)$$

Покажем, что *если* $A(x)\in BV[0;\ell]$ *и для любой* $h\in E_0=\{h\in E\,|\,h(0)=h'_x(0)=h(\ell)=h'_x(\ell)=0\}$ *справедливо равенство*

$$\int\limits_0^\ell A(x)h''_{x\mu}(x)\,d\mu(x)=0, \quad (8)$$

то $A(x)$ *— линейная функция, т. е.* $A(x)=C_1+C_2x$ *при некоторых постоянных* C_1 *и* C_2.

Так как $\int\limits_0^\ell (C_1+C_2x)h''_{x\mu}\,d\mu=0$ для любых C_1 и C_2, то (8) можно переписать следующим образом

$$\int\limits_0^\ell \Big[A(x)-C_1-C_2x\Big]\,h''_{x\mu}\,d\mu=0. \quad (9)$$

Рассмотрим функцию $h_0(x)=\int\limits_0^x\int\limits_0^t(A(s)-C_1-C_2s)\,d\mu(s)\,dt$. Для любых C_1 и C_2 имеем $h_0(0)=h_0{}'_x(0)=0$. Если в качестве C_1 и C_2 взять решение линейной системы (отличие от нуля определителя системы проверяется непосредственно)

$$\begin{cases} C_1(\mu(\ell)-\mu(0))+C_2\int\limits_0^\ell s\,d\mu(s)=\int\limits_0^\ell A(s)\,d\mu(s),\\ C_1\int\limits_0^\ell\int\limits_0^t d\mu(s)\,ds+C_2\int\limits_0^\ell\int\limits_0^t s\,d\mu(s)\,dt=\int\limits_0^\ell\int\limits_0^t A(s)\,d\mu(s)\,dt,\end{cases}$$

то будут выполнятся равенства $h_0(\ell)=h_0{}'_x(\ell)=0$, т. е. $h_0\in E_0$. Подставляя $h_0(x)$ в (8) будем иметь

$$\int\limits_0^\ell\Big(A(x)-(C_1+C_2x)\Big)^2\,d\mu(x)=0.$$

Тогда $A(x)-(C_1+C_2x)=0$ почти всюду (по мере μ), причем $A(x-0)=A(x+0)=C_1+C_2x$ для каждой точки x, следовательно, так как собственное значение $A(x)$ в точках разрыва x функции с конечным изменением не играет роли, $A(x)$ непрерывна и $A(x)=C_1+C_2x$ для всех x.

На основании доказанного, из равенства (7) вытекает тождество

$$\left(pu''_{x\mu}\right)(x)-R(x)+\alpha^{(-1)}(x)-F^{(-1)}(x)\equiv C_1+C_2x,$$

или, с учетом введенных обозначений,

$$\left(pu''_{x\mu}\right)(x)\equiv\int\limits_0^x r(s)u'_x(s)\,ds-\int\limits_0^x\alpha(t)\,dt+\int\limits_0^x F(t)\,dt+C_1+C_2x. \quad (10)$$

Равенство (7), с учетом последнего тождества, принимает вид

$$h'_x(0)\left[\gamma_1u'_x(0)-C_1\right]+h(0)\left[\gamma_2u(0)+F(0)+C_2\right]+$$

$$+ h'_x(\ell)\left[\gamma_3 u'_x(\ell) + R(\ell) - \alpha^{(-1)}(\ell) + F^{(-1)}(\ell) + C_1 + C_2\ell\right] +$$
$$+ h(\ell)\left[\gamma_4 u(\ell) + \alpha(\ell) - F(\ell) - C_2\right] = 0.$$

Откуда немедленно получаем равенства

$$\gamma_1 u'_x(0) - C_1 = 0, \tag{11}$$
$$\gamma_2 u(0) + F(0) + C_2 = 0, \tag{12}$$
$$\gamma_3 u'_x(\ell) + R(\ell) - \alpha^{(-1)}(\ell) + F^{(-1)}(\ell) + C_1 + C_2\ell = 0, \tag{13}$$
$$\gamma_4 u(\ell) + \alpha(\ell) - F(\ell) - C_2 = 0. \tag{14}$$

При $x = 0$ равенство (10) принимает вид $\left(pu''_{x\mu}\right)(0) = C_1$, что вместе с (11), нам дает граничное условие $\left(pu''_{x\mu}\right)(0) - \gamma_1 u'_x(0) = 0$. Аналогично получаем условие $\left(pu''_{x\mu}\right)(\ell) + \gamma_3 u'_x(\ell) = 0$.

Функция $R(x) = \int\limits_0^x r(s)u'_x(s)\,ds$ абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$, так как $r(x) \in BV[0;\ell]$ (следовательно, суммируема) и $u'_x(x)$ суммируема как производная Лебега абсолютно непрерывной функции $u(x)$. Тогда $R(x)$ дифференцируема и $R'_x(x) = r(x)u'_x(x)$.

Функции $\alpha(x) = \int\limits_0^x u(s)\,dQ(s)$ и $F(x)$ имеют конечное на $[0;\ell]$ изменение, поэтому $\alpha(x) - F(x)$ суммируема и

$$\left(\alpha^{(-1)}(x) - F^{(-1)}(x)\right)'_x(x) = \alpha(x) - F(x).$$

Тогда, равенство (10) допускает дифференцирование по x:

$$\left(pu''_{x\mu}\right)'_x(x) = r(x)u'_x(x) - \int\limits_0^x u(s)\,dQ(s) + F(x) + C_2. \tag{15}$$

Из равенств $\left(pu''_{x\mu}\right)'_x(0) = \left(ru'_x\right)(0) + F(0) + C_2$, полученного из (15) при $x = 0$, и (12), получаем третье условие $\left(pu''_{x\mu}\right)'_x(0) - \left(ru'_x\right)(0) + \gamma_2 u(0) = 0$. Аналогично находим четвертое граничное условие $\left(pu''_{x\mu}\right)'_x(\ell) - \left(ru'_x\right)(\ell) - \gamma_4 u(\ell) = 0$.

Так как $u'_x(x)$ μ-абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$, то $u'_x(x) \in BV[0;\ell]$. Отсюда следует, что в каждой точке существуют пределы слева и справа.

Согласно [7] существует строго возрастающая функция $\sigma(x)$, порождающая меру на $[0;\ell]$, такая, что x, $\mu(x)$, $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ будут σ-абсолютно непрерывны на $[0;\ell]$.

Так как $u'_x(x)$ является на $[0;\ell]$ μ-абсолютно непрерывной функцией и $\mu(x)$ σ-абсолютно непрерывна на этом же множестве, то и $u'_x(x)$ также σ-абсолютно непрерывна на отрезка $[0;\ell]$. Тогда, в правой части равенства (15) стоит σ-абсолютно непрерывная на $[0;\ell]$ функция, следовательно, и в левой части стоит σ-абсолютно непрерывная на $[0;\ell]$ функция, что позволяет продифференцировать по σ равенство (15):

$$\left(pu''_{x\mu}\right)''_{x\sigma}(x) - \left(ru'_x\right)'_\sigma(x) + u(x)Q_\sigma(x) = F'_\sigma(x). \tag{16}$$

Уравнение (16) понимается на множестве $\overline{[0;\ell]}_\sigma$, которое строится следующим образом.

Обозначим через $S(\sigma)$ множество точек разрыва $\sigma(x)$. Наиболее интересный для нас случай, когда $S(\sigma)$ непусто. При этом мы допускаем у функции $\sigma(x)$ счетное число точек разрыва. Каждая из таких точек имеет σ-меру, равную $\Delta\sigma(\xi) = \sigma(\xi + 0) - \sigma(\xi - 0)$.

Пусть $J_\sigma = [0,\ell] \setminus S(\sigma)$. Введем на J_σ метрику равенством $\varrho(x,y) = \sigma(y+0) - \sigma(x-0)$ для $x < y$. Пополнение J_σ по этой метрике обозначим через $\overline{[0;\ell]}_S$. В этом множестве вместо прежних точек $\xi \in S(\sigma)$ появляется пара собственных элементов ξ_- и ξ_+. Индуцируя на $\overline{[0;\ell]}_S$ исходную упорядоченность, имеем $\xi_- < \xi_+$. Формальное объединение $\overline{[0;\ell]}_S$ с $S(\sigma)$, при котором $\xi_- < \xi < \xi_+$ для каждой $\xi \in S(\sigma)$, обозначим через $\overline{[0;\ell]}_\sigma$. В этом множестве точки из $S(\sigma)$ как бы вставлены на прежние места, но теперь они обрамлены с боков уже собственными в $\overline{[0;\ell]}_\sigma$ элементами ξ_-, ξ_+, а не символами предельных переходов в этих точках, как было ранее. Отметим, что в точках ξ_- и ξ_+ множества $\overline{[0;\ell]}_S$ (когда $\xi \in S(\sigma)$) σ-абсолютно непрерывная функция $F(x)$ определена своими предельными значениями: $F(\xi_\pm) = F(\xi \pm 0)$; σ-абсолютно непрерывные функции, определенные на $\overline{[0;\ell]}_S$, достигают на $\overline{[0;\ell]}_S$ наибольшее и наименьшее значения, что на $[0;\ell]$ могло и не быть. Например, функция $F(x) = \dfrac{\ell - x}{\ell - \xi}\theta(x-\xi)$, очевидно, σ-абсолютно непрерывна при $\sigma(x) = x+\theta(x-\xi)$ (здесь, как и ранее, $\theta(x)$ — функция Хевисайда, равная нулю при $x < 0$, и единице при $x > 0$), наибольшее значение не достигает на $[0;\ell]$, а на $\overline{[0;\ell]}_S$ — в точке ξ_+; σ-производная σ-абсолютно непрерывной функции $v(x)$ определена почти всюду (относительно σ-меры) на множестве $\overline{[0;\ell]}_\sigma$, причем в точках $\xi \in S(\sigma)$ как отношение скачков: $\dfrac{dv}{d\sigma}(\xi) = \dfrac{\Delta v(\xi)}{\Delta\sigma(\xi)}$.

Возвращаясь к функционалу, мы получаем, что нами доказана

Теорема 1. *Необходимое условие экстремума функционала $\Phi(u)$ реализуется в виде дифференциальной модели*

$$\begin{cases} \left(pu''_{x\mu}\right)''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma, \\ \left(pu''_{x\mu}\right)(0) - \gamma_1 u'_x(0) = 0, \\ \left(pu''_{x\mu}\right)'_x(0) - \left(ru'_x\right)(0) + \gamma_2 u(0) = 0, \\ \left(pu''_{x\mu}\right)(\ell) + \gamma_3 u'_x(\ell) = 0, \\ \left(pu''_{x\mu}\right)'_x(\ell) - \left(ru'_x\right)(\ell) - \gamma_4 u(\ell) = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Следует отметить, что уравнение в (17) в каждой точке $\xi \in S(\sigma)$ принимает вид

$$\Delta(pu''_{x\mu})'_x(\xi) - \Delta(ru'_x)(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = \Delta F(\xi), \tag{18}$$

(здесь $\Delta v(\xi)$ — скачок функции $v(x)$ в точке ξ, т. е. $\Delta v(\xi) = v(\xi+0) - v(\xi-0)$).

Равенство (18) означает, что скачок перерезывающей силы прямопропорционален скачку $\Delta(ru'_x)(\xi)$, значению решения $u(\xi)$ и величине сосредоточенной силы $\Delta F(\xi)$ в точке ξ.

В первом слагаемом в левой части равенства (16) третье дифференцирования по x означает, что квазипроизводная $pu''_{x\mu}(x)$ непрерывна во всех точках, в частности, в точках $\xi \in S(\mu)$:

$$p(\xi-0)u''_{x\mu}(\xi-0) = p(\xi)\frac{\Delta u'(\xi)}{\Delta\mu(\xi)} = p(\xi+0)u''_{x\mu}(\xi+0) \tag{19}$$

Окончательно получаем, что в точках ξ, принадлежащих множеству $S(\sigma)$, выполнены четыре условия: условие непрерывности $u(x)$, два — (19), и — (18).

Всюду далее мы предполагаем выполненными следующие условия:

1) x, $\mu(x)$, $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — σ-абсолютно непрерывны на $\overline{[0;\ell]}_S$;

2) $p(x) > 0$ для всех $x \in [0;\ell]$, $\min\limits_{\overline{[0;\ell]}_{S(\mu)} \setminus S(\mu)} p(x) > 0$;

3) интеграл $\displaystyle\int\limits_0^\ell \frac{d\mu(x)}{p(x)}$ конечен;

4) $r(x) \geqslant 0$ на всем $\overline{[0;\ell]}_S$;

5) $Q(x)$ не убывает на $\overline{[0;\ell]}_S$.

Покажем, что уравнение

$$(pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma. \tag{20}$$

разрешимо в форме задачи Коши.

Теорема 2. *Для любой точки* $x_0 \in \overline{[0;\ell]}_S$, *любых чисел* u_0, u_1, u_2, u_3 *и любой* σ*-абсолютно непрерывной функции* $F(x)$, *существует единственное решение уравнения* (20), *удовлетворяющее начальным условиям*

$$\begin{cases} u(x_0) = u_0, \\ u'(x_0) = u_1, \\ \left(pu''_{x\mu}\right)(x_0) = u_2, \\ \left(\left(pu''_{x\mu}\right)'_x\right)(x_0) = u_3. \end{cases} \tag{21}$$

Доказательство. Функция $P(x) = \int\limits_0^x \frac{d\mu(\tau)}{p(\tau)}$ ($x \in \overline{[0;\ell]}_\mu$), в силу условий теоремы, принадлежит $BV[0;\ell]$. После четырехкратного интегрирования в предела от x_0 до x (первый раз по мере σ, второй и четвертый — по x, третий по μ), интегрирования по частям интеграла $\int\limits_{x_0}^x r(s)\,du(s)$, что возможно, так как $r(x) \in BV[0;\ell]$ и $u(x)$ принадлежит $C[0;\ell]$, разрешимость задачи (20), (21), эквивалентна разрешимости в $C[0;\ell]$ интегрального уравнения $u(x) = \alpha(x) + (Au)(x)$, где

$$\alpha(x) = u_0 + u_1 x + (u_2 + r(x_0)u_0)\int\limits_{x_0}^x (P(\eta) - P(x_0))\,d\eta + \\ + (u_3 - r(x_0)u_1)\int\limits_{x_0}^x\int\limits_{x_0}^\eta (\tau - x_0)\,dP(\eta)\,d\eta + \int\limits_{x_0}^x\int\limits_{x_0}^\eta\int\limits_{x_0}^\tau (F(t) - F(x_0))\,dt\,dP(\tau)\,d\eta, \tag{22}$$

$$(Au)(x) = \int\limits_{x_0}^x\int\limits_{x_0}^\eta u(\tau)r(\tau)\,dP(\tau)\,d\eta + \int\limits_{x_0}^x\int\limits_{x_0}^\eta\int\limits_{x_0}^\tau u(s)\,dr(s)\,dP(\tau)\,d\eta + \\ + \int\limits_{x_0}^x\int\limits_{x_0}^\eta\int\limits_{x_0}^\tau\int\limits_{x_0}^t u(s)\,dQ(s)\,dt\,dP(\tau)\,d\eta. \tag{23}$$

Функция $\alpha(x)$, определенная равенством (22), как нетрудно видеть, является непрерывной; оператор A действует из $C[0;\ell]$ в $C[0;\ell]$. Методом математической индукции доказывается неравенство

$$|(A^n u)(x)| \leqslant \|u\|_C \cdot C^n \frac{|x - x_0|^n}{n!}, \tag{24}$$

где $\|u\|_C = \max\limits_x |u(x)|$ — норма в $C[0;\ell]$, $C = \sup\limits_\tau r(\tau) \cdot \bigvee\limits_0^\ell (P) + \bigvee\limits_0^\ell (r) \cdot \bigvee\limits_0^\ell (P) + \bigvee\limits_0^\ell (Q) \cdot \bigvee\limits_0^\ell (P)$.

Из (24) следует, что спектральный радиус оператора A равен нулю, следовательно, интегральное уравнение $u = \alpha + Au$ однозначно разрешимо в $C[0;\ell]$ для любой α, более того, решение представимо в виде равномерно сходящегося ряда Неймана $u = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n\alpha$. Теорема доказана. $\square$

Из доказанной теоремы непосредственно следует, что пространство решений однородного уравнения

$$\left(pu''_{x\mu}\right)''_{x\sigma} - \left(ru'_x\right)'_\sigma + uQ'_\sigma = 0 \qquad (25)$$

четырехмерно. В частности, система функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{i=4}$ — решений однородного уравнения (25), удовлетворяющих начальным условиям $\varphi_i(x_0) = \delta_1^i$, ${\varphi_i}'_x(x_0) = \delta_2^i$, $\left(p{\varphi_i}''_{x\mu}\right)(x_0) = \delta_3^i$, $\left(\left(p{\varphi_i}''_{x\mu}\right)'_x\right)(x_0) = \delta_4^i$, где δ_i^j — символ Кронекера, равный 1, если $i = j$, и нулю в противном случае, при некотором $x_0 \in \overline{[0;\ell]}_S$, образуют базис в пространстве решений однородного уравнения (25).

На множестве $\overline{[0;\ell]}_S$ определим аналог определителя Вронского

$$W[\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4](x) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \\ {\varphi_1}'_x & {\varphi_2}'_x & {\varphi_3}'_x & {\varphi_4}'_x \\ {\varphi_1}''_{x\mu} & {\varphi_2}''_{x\mu} & {\varphi_3}''_{x\mu} & {\varphi_4}''_{x\mu} \\ \left(p{\varphi_1}''_{x\mu}\right)'_x & \left(p{\varphi_2}''_{x\mu}\right)'_x & \left(p{\varphi_3}''_{x\mu}\right)'_x & \left(p{\varphi_4}''_{x\mu}\right)'_x \end{vmatrix}(x), \qquad (26)$$

где $\varphi_i(x)$ $(i = 1,2,3,4)$, — решения однородного уравнения (25). Для простоты введенный определитель будем обозначать через $W(x)$, всякий раз когда из контекста будет понятно для каких функций он посчитан.

Пусть $\varphi_i(x)$ $(i = 1,2,3,4)$ — решения однородного уравнения (25). *Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) *найдется точка $x_0 \in \overline{[0;\ell]}_S$ такая, что $W(x_0) = 0$;*

б) $W(x) \equiv 0$ *на* $\overline{[0;\ell]}_S$;

в) *Функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ и $\varphi_4(x)$ линейно зависимы на $\overline{[0;\ell]}_S$.*

Доказательство на основе теоремы 2 проводится элементарно — алгебраическими рассуждениями.

Если $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, и $\varphi_4(x)$ — решения однородного уравнения (25), *то $pW[\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4](x)$ постоянна на $\overline{[0;\ell]}_S$.*

Так как $\varphi_i(x)$, $p{\varphi_i}''_{x\mu}(x)$ $(i = 1,2,3,4)$ абсолютно непрерывны на $[0;\ell]$, ${\varphi_i}'_x(x)$ $(i = 1,2,3,4)$ — μ-абсолютно непрерывны на $\overline{[0;\ell]}_S$, мера Лебега и мера, порождённая функцией $\mu(x)$, являются σ-абсолютно непрерывными мерами, то $\varphi_i(x)$, ${\varphi_i}'_x(x)$, $p{\varphi_i}''_{x\mu}(x)$ и $\left(p{\varphi_i}''_{x\mu}\right)'_x(x)$ являются σ-абсолютными на $\overline{[0;\ell]}_S$ функциями, следовательно, $(pW)(x)$ — σ-абсолютно непрерывна на $\overline{[0;\ell]}_S$. Последнее означает, что почти всюду (по мере σ) у функции $(pW)(x)$ существует σ-производная по Радону-Никодиму. Пусть Z — множество точек в которых существуют σ-производные $\dfrac{dx}{d\sigma}$, $\dfrac{d}{d\sigma}(pW)$, $\dfrac{d}{d\sigma}r$ и $\dfrac{d}{d\sigma}\mu$. Множество Z имеет полную σ-меру.

Для точек $x \in Z \setminus S(\sigma)$ имеем

$$\frac{d}{d\sigma}(pW) = \begin{vmatrix} {\varphi_1}'_x & {\varphi_2}'_x & {\varphi_3}'_x & {\varphi_4}'_x \\ {\varphi_1}'_x & {\varphi_2}'_x & {\varphi_3}'_x & {\varphi_4}'_x \\ p{\varphi_1}''_{x\mu} & p{\varphi_2}''_{x\mu} & p{\varphi_3}''_{x\mu} & p{\varphi_4}''_{x\mu} \\ (p{\varphi_1}''_{x\mu})'_x & (p{\varphi_2}''_{x\mu})'_x & (p{\varphi_3}''_{x\mu})'_x & (p{\varphi_4}''_{x\mu})'_x \end{vmatrix} \cdot \frac{dx}{d\sigma} +$$

$$+\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \\ \varphi_1{}''_{x\mu} & \varphi_2{}''_{x\mu} & \varphi_3{}''_{x\mu} & \varphi_4{}''_{x\mu} \\ p\varphi_1{}''_{x\mu} & p\varphi_2{}''_{x\mu} & p\varphi_3{}''_{x\mu} & p\varphi_4{}''_{x\mu} \\ (p\varphi_1{}''_{x\mu})'_x & (p\varphi_2{}''_{x\mu})'_x & (p\varphi_3{}''_{x\mu})'_x & (p\varphi_4{}''_{x\mu})'_x \end{vmatrix} \cdot \frac{d\mu}{d\sigma} +$$

$$+\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \\ \varphi_1{}'_x & \varphi_2{}'_x & \varphi_3{}'_x & \varphi_4{}'_x \\ (p\varphi_1{}''_{x\mu})'_x & (p\varphi_2{}''_{x\mu})'_x & (p\varphi_3{}''_{x\mu})'_x & (p\varphi_4{}''_{x\mu})'_x \\ (p\varphi_1{}''_{x\mu})'_x & (p\varphi_2{}''_{x\mu})'_x & (p\varphi_3{}''_{x\mu})'_x & (p\varphi_4{}''_{x\mu})'_x \end{vmatrix} \cdot \frac{dx}{d\sigma} +$$

$$+\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \\ \varphi_1{}'_x & \varphi_2{}'_x & \varphi_3{}'_x & \varphi_4{}'_x \\ p\varphi_1{}''_{x\mu} & p\varphi_2{}''_{\mu} & p\varphi_3{}''_{x\mu} & p\varphi_4{}''_{x\mu} \\ (p\varphi_1{}''_{x\mu})''_{x\sigma} & (p\varphi_2{}''_{x\mu})''_{x\sigma} & (p\varphi_3{}''_{x\mu})''_{x\sigma} & (p\varphi_4{}''_{x\mu})''_{x\sigma} \end{vmatrix} = 0,$$

так как во всех определителях имеются пропорциональные строки.

Если $x \in S(\mu)$, то

$$\frac{d}{d\sigma}(pW)(x) = \frac{\Delta(pW)(x)}{\Delta\sigma(x)} = \frac{1}{\Delta\sigma(x)} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x) \\ \Delta\varphi_1{}'_x(x) & \Delta\varphi_2{}'_x(x) & \Delta\varphi_3{}'_x(x) & \Delta\varphi_4{}'_x(x) \\ p\varphi_1{}''_{x\mu}(x) & p\varphi_2{}''_{x\mu}(x) & p\varphi_3{}''_{x\mu}(x) & p\varphi_4{}''_{x\mu}(x) \\ (p\varphi_1{}''_{x\mu})'_x(x+0) & (p\varphi_2{}''_{x\mu})'_x(x+0) & (p\varphi_3{}''_{x\mu})'_x(x+0) & (p\varphi_4{}''_{x\mu})'_x(x+0) \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x) \\ \varphi_1{}'_x(x-0) & \varphi_2{}'_x(x-0) & \varphi_3{}'_x(x-0) & \varphi_4{}'_x(x-0) \\ p\varphi_1{}''_{x\mu}(x) & p\varphi_2{}''_{x\mu}(x) & p\varphi_3{}''_{x\mu}(x) & p\varphi_4{}''_{x\mu}(x) \\ \Delta(p\varphi_1{}''_{x\mu})'_x(x) & \Delta(p\varphi_2{}''_{x\mu})'_x(x) & \Delta(p\varphi_3{}''_{x\mu})'_x(x) & \Delta(p\varphi_4{}''_{x\mu})'_x(x) \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\Delta\sigma(x)}.$$

В силу пропорциональности соответствующих строк, оба определителя в правой части последнего равенства равны нулю. Наконец, в случае $x \in S(\sigma) \setminus S(\mu)$, имеем

$$\frac{d}{d\sigma}(pW)(x) = \frac{\Delta(pW)(x)}{\Delta\sigma(x)} = \frac{1}{\Delta\sigma(x)} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x) \\ \varphi_1{}'_x(x) & \varphi_2{}'_x(x) & \varphi_3{}'_x(x) & \varphi_4{}'_x(x) \\ p\varphi_1{}''_{x\mu}(x) & p\varphi_2{}''_{x\mu}(x) & p\varphi_3{}''_{x\mu}(x) & p\varphi_4{}''_{x\mu}(x) \\ \Delta(p\varphi_1{}''_{x\mu})'_x(x) & \Delta(p\varphi_2{}''_{x\mu})'_x(x) & \Delta(p\varphi_3{}''_{x\mu})'_x(x) & \Delta(p\varphi_4{}''_{x\mu})'_x(x) \end{vmatrix} = 0,$$

так как строки пропорциональны. Таким образом, $\dfrac{d}{d\sigma}(pW)(x)$ равна нулю почти всюду, следовательно, $pW(x)$ есть константа.

ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Далее изучается вопрос о разрешимости математической модели

$$\begin{cases} (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma \\ (pu''_{x\mu})(0) - \gamma_1 u'(0) = 0, & \text{(а)} \\ (pu''_{x\mu})'_x(0) - ru'(0) + \gamma_2 u(0) = 0, & \text{(б)} \\ (pu''_{x\mu})(\ell) + \gamma_3 u'(\ell) = 0, & \text{(в)} \\ (pu''_{x\mu})'_x(\ell) - ru'(\ell) - \gamma_4 u(\ell) = 0, & \text{(г)} \end{cases} \tag{27}$$

при условиях $\gamma_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, $p(x) > 0$, $r(x) \geqslant 0$, $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ являются σ-абсолютно непрерывными функциями на $[0; \ell]$, причем $Q(x)$ не убывает.

Условие (а) означает, что на левом конце присутствует пружина жесткостью γ_1, которая реагирует на изменение крутящего момента, причем случай $\gamma_1 = \infty$ соответствует ситуации, когда крутящий момент в точке $x = 0$ отсутствует, и тогда граничное условие (а) принимает вид $u'(0) = 0$. Если же $\gamma_1 = 0$, то пружина отсутствует, и условие превращает в $(pu''_{x\mu})(0) = 0$.

Граничное условие (б) означает, что на левом конце присутствует пружина, реагирующая на смещение $u(0)$, причем случай $\gamma_2 = \infty$ соответствует условию $u(0) = 0$ — различным способам закрепления левого конца, либо защемления: $u'(0) = 0$, либо шарнирного: $u''_{x\mu}(0) = 0$.

Аналогично обстоит дело и с правым концом $x = \ell$.

В дальнейшем под записью $\gamma_1 = \infty$ мы будем подразумевать граничное условие $u'_x(0) = 0$; аналогично $\gamma_2 = \infty$ — $u(0) = 0$, $\gamma_3 = \infty$ — $u'_x(\ell) = 0$, $\gamma_4 = \infty$ — $u(\ell) = 0$.

Определение 1. *Дифференциальную модель* (27) *назовём невырожденной (или будем говорить обладает свойством невырожденности), если однородная модель (при $F(x) \equiv \mathrm{const}$) имеет только тривиальное решение.*

Следующая теорема даёт достаточные условия невырожденности модели (27).

Теорема 3. *Пусть x, $\mu(x)$, $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — σ-абсолютно непрерывны на $\overline{[0;\ell]}_S$, причём $p(x) > 0$, $\min\limits_{x \in \overline{[0;\ell]}_{S(\mu)} \setminus S(\mu)} p(x) > 0$, $\int\limits_0^\ell \frac{d\mu(x)}{p(x)} < \infty$, $r(x) \geqslant 0$ и $Q(x)$ не убывает на $\overline{[0;\ell]}_S$; $\gamma_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Тогда математическая модель* (27) *обладает свойством невырожденности при выполнении одного из следующих условий:*

1) $\gamma_i > 0$ *$(i = 1, 2, 3, 4)$ (включая случаи $\gamma_i = \infty$);*

2) $\gamma_i \geqslant 0$ *$(i = 1, 2, 3, 4)$, $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$, $\gamma_3 + \gamma_4 > 0$ и $\gamma_2 + \gamma_4 > 0$;*

3) $\gamma_i \geqslant 0$ *$(i = 1, 2, 3, 4)$, $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$ или $\gamma_3 + \gamma_4 > 0$, и $Q(\ell) - Q(0) > 0$;*

4) $\gamma_i = 0$ *$(i = 1, 2, 3, 4)$, найдется точка $x_1 \in \overline{[0;\ell]}_S$ такая, что $r(x)$ непрерывна в точке x_1 и $r(x_1) > 0$ и $Q(\ell) - Q(0) > 0$.*

5) $\gamma_i = 0$ *$(i = 1, 2, 3, 4)$, $r(x) \equiv 0$ и найдутся точки x_1, x_2, принадлежащие множеству $\overline{[0;\ell]}_\sigma$, такие, что $\Delta Q(x_1) > 0$ и $\Delta Q(x_2) > 0$.*

Доказательство. Пусть $u(x)$ — нетривиальное решение однородного уравнения $(pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = 0$, удовлетворяющее граничным условиям (27а)–(27г). После подстановки в однородное уравнение решения $u(x)$, умножения полученного тождества на $u(x)$, и интегрирования по $\overline{[0;\ell]}_\sigma$ по мере σ, будем иметь

$$\int\limits_0^\ell \left(pu''_{x\mu}\right)''_{x\sigma} u\, d\sigma - \int\limits_0^\ell \left(ru'_x\right)'_\sigma u\, d\sigma + \int\limits_0^\ell u^2\, dQ = 0.$$

Первый интеграл в последнем равенстве дважды проинтегрируем по частям, а второй — один раз, получим

$$\left(pu''_{x\mu}\right)'_x u\Big|_0^\ell - pu''_{x\mu}u'_x\Big|_0^\ell - ru'_x u\Big|_0^\ell + \int\limits_0^\ell pu''^2_{x\mu}\, d\mu + \int\limits_0^\ell ru'^2_x\, dx + \int\limits_0^\ell u^2\, dQ = 0,$$

или,

$$u(\ell)\left[\left(pu''_{x\mu}\right)'_x(\ell) - ru'_x(\ell)\right] - u(0)\left[\left(pu''_{x\mu}\right)'_x(0) - ru'_x(0)\right] - pu''_{x\mu}(\ell)u'_x(\ell) + pu''_{x\mu}(0)u'_x(0) +$$

$$+\int_0^\ell p u''^2_{x\mu}\,d\mu + \int_0^\ell r u'^2_x\,dx + \int_0^\ell u^2\,dQ = 0. \quad (28)$$

Если все $\gamma_i = \infty$, то внеинтегральные слагаемые равны нулю, так как $u(0) = u'_x(0) = u'_x(\ell) = u(\ell) = 0$.

Если, например, $\gamma_1 > 0$ и $\neq \infty$, а остальные равны ∞, т. е. $\gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \infty$, то сумма внеинтегральных слагаемых равна $\gamma_1 u'^2(0)$.

Аналогично рассматриваются остальные случаи: хотя бы одно γ_i равно ∞.

Пусть теперь все γ_i конечны. Тогда внеинтегральные слагаемые можно переписать в виде

$$\gamma_1 u'^2_x(0) + \gamma_2 u^2(0) + \gamma_3 u'^2_x(\ell) + \gamma_4 u^2(\ell), \quad (29)$$

и равенство (28) есть сумма неотрицательных слагаемых. Отсюда следуют тождества

$$p u''^2_{x\mu}(x) \overset{\text{п.в.}}{\equiv} 0 \text{ и } r u'^2_x(x) \overset{\text{п.в.}}{\equiv} 0 \quad (30)$$

и равенство

$$\int_0^\ell u^2\,dQ = 0. \quad (31)$$

Из первого тождества (30) следует, что $u'_x(x) \equiv \mathrm{const}$ всюду на $\overline{[0;\ell]}_S$. Тогда $u(x)$ есть линейная функция, т. е. $u(x) = C_1 + C_2 x$. Если выполнено первое или второе условия, то либо $u(0) = u'_x(0) = u'_x(\ell) = u(\ell) = 0$, либо $u(0)\cdot u'_x(0) = 0$, $u(\ell)\cdot u'_x(\ell) = 0$ и $u(0)\cdot u(\ell) = 0$. В любом случае, как нетрудно видеть, приходим к выводу $u(x) \equiv 0$.

Третий случай. Рассмотрим подслучай $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$; второй — аналогичен. Из (29) мы находим, что $u(0)\cdot u'_x(0) = 0$. Если $u'_x(0) = 0$, то $u(x) \equiv C_1$ и, подставляя в (31), получим $C_1^2(Q(\ell) - Q(0)) = 0$. По условию $Q(\ell) - Q(0) > 0$, поэтому, $C_1 = 0$, т. е. $u(x) \equiv 0$.

Предположим, что $u'_x(0) \neq 0$. Тогда $u(x) \equiv C_2 x$, и равенство (31) принимает вид $C_2^2 \int_0^\ell x^2\,dQ = 0$. Интеграл $\int_0^\ell x^2\,dQ$ положителен в силу условий теоремы. Поэтому $C_2 = 0$ (и как следствие $C_1 = 0$). Таким образом, $u(x) \equiv 0$.

Пусть теперь выполнено четвертое условие. Из второго тождества (30) в силу непрерывности $r(x)$ в точке x_1 и условия $r(x_1) > 0$, выполняет равенство $u'_x(x_1) = 0$, следовательно, $u'_x(x) \equiv 0$. Тогда, $u(x) \equiv \mathrm{const}$, и равенство (31) принимает вид

$$0 = u^2(0)\int_0^\ell dQ = u^2(0)(Q(\ell) - Q(0)).$$

По условию $Q(\ell) - Q(0) > 0$, отсюда вытекает равенство $u^2(0) = 0$, т. е. $u(x) \equiv 0$.

В пятом случае мы последовательно находим

$$\int_0^\ell u^2\,dQ \geqslant u^2(x_1)\Delta Q(x_1) + u^2(x_2)\Delta Q(x_2).$$

Но слева, в силу равенства (31), стоит нуль, а справа — сумма неотрицательных чисел. Поэтому $u(x_1) = u(x_2) = 0$, а так как $u(x)$ есть линейная функция, то $u(x) \equiv 0$.

Таким образом, во всех случаях мы приходим к противоречию. Теорема доказана. $\square$

Введем обозначения

$$
\begin{aligned}
l_1 u &= (pu''_{x\mu})(0) - \gamma_1 u'_x(0), &(32)\\
l_2 u &= (pu''_{x\mu})'_x(0) - ru'_x(0) + \gamma_2 u(0), &(33)\\
l_3 u &= (pu''_{x\mu})(\ell) - \gamma_3 u'_x(\ell), &(34)\\
l_4 u &= (pu''_{x\mu})'_x(\ell) - ru'_x(\ell) + \gamma_4 u(\ell), &(35)
\end{aligned}
$$

Очевидно, что функционалы l_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ являются линейными и непрерывными на пространстве решений однородного уравнения.

Математическая модель (27) *обладает свойством невырожденности, тогда и только тогда, когда определитель*

$$
\det \|l_i \varphi_j\|^4_{i,j} = \begin{vmatrix} l_1\varphi_1 & l_1\varphi_2 & l_1\varphi_3 & l_1\varphi_4 \\ l_2\varphi_1 & l_2\varphi_2 & l_2\varphi_3 & l_2\varphi_4 \\ l_3\varphi_1 & l_3\varphi_2 & l_3\varphi_3 & l_3\varphi_4 \\ l_4\varphi_1 & l_4\varphi_2 & l_4\varphi_3 & l_4\varphi_4 \end{vmatrix}
$$

отличен от нуля, если только $\{\varphi_i(x)\}^4_{i=1}$ *фундаментальная система решений однородного уравнения* $(pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = 0$.

Пусть $u(x)$ — произвольное решение однородного уравнения $(pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = 0$. Тогда, $u(x)$ можно представить в виде линейной комбинации фундаментальной системы $\{\varphi_i(x)\}^{i=4}_{i=1}$: $u(x) = \sum\limits_{i=1}^{4} C_i \varphi_i(x)$ при некоторых C_1, C_2, C_3, C_4. Для того, чтобы $u(x)$, определенная последним равенством, удовлетворяла граничным условиям (27а)–(27г), необходимо и достаточно, чтобы выполнились $l_j u = \sum\limits_{i=1}^{4} C_i l_j \varphi_i = 0$ $(j = 1, 2, 3, 4)$, или, в матричной форме,

$$
\begin{pmatrix} l_1\varphi_1 & l_1\varphi_2 & l_1\varphi_3 & l_1\varphi_4 \\ l_2\varphi_1 & l_2\varphi_2 & l_2\varphi_3 & l_2\varphi_4 \\ l_3\varphi_1 & l_3\varphi_2 & l_3\varphi_3 & l_3\varphi_4 \\ l_4\varphi_1 & l_4\varphi_2 & l_4\varphi_3 & l_4\varphi_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{36}
$$

Последняя система имеет единственное решение в том и только том случае, когда определитель $\det \|l_j \varphi_i\|^4_{i,j=1}$ отличен от нуля.

Покажем, что *математическая модель* (27) *имеет единственное решение для любой* σ*-абсолютно непрерывной на* $\overline{[0;\ell]}_S$ *функции* $F(x)$*, тогда и только тогда, когда она является невырожденной.*

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно. Если модель (27) имеет единственное решение для любой σ-абсолютно непрерывной на $\overline{[0;\ell]}_S$ функции, то и для $F(x) \equiv \text{const}$, в частности. Значит $u(x) \equiv 0$ — единственное решение однородной дифференциальной модели, т. е. модель невырождена.

Пусть теперь модель (27) обладает свойством невырожденности. Любое решение $u(x)$ неоднородного уравнения

$$
\left(pu''_{x\mu}\right)''_{x\sigma} - \left(ru'_x\right)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma \tag{37}
$$

можно представить в следующем виде $u(x) = v(x) + \sum\limits_{i=1}^{4} C_i\varphi_i(x)$, где $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^4$ — фундаментальная система однородного уравнения, $v(x)$ — решение неоднородного уравнения (37), удовлетворяющих нулевым начальным условиям $v(x_0) = v'_x(x_0) = \left(pv''_{x\mu}\right)(x_0) = \left(pv''_{x\mu}\right)'_x(x_0) = 0$ при некотором $x_0 \in \overline{[0;\ell]}_S$. Существование и единственность такого решения следует из теоремы 2. Подберем коэффициенты C_i так, чтобы функция $u(x)$ удовлетворяла граничным условиям. Для этого необходимо и достаточно, чтобы имела единственное решение система уравнений (относительно C_i): $l_j u \equiv l_j v + \sum\limits_{i=1}^{4} C_i l_j\varphi_i = 0$, или, в матричной форме,

$$\begin{pmatrix} l_1\varphi_1 & l_1\varphi_2 & l_1\varphi_3 & l_1\varphi_4 \\ l_2\varphi_1 & l_2\varphi_2 & l_2\varphi_3 & l_2\varphi_4 \\ l_3\varphi_1 & l_3\varphi_2 & l_3\varphi_3 & l_3\varphi_4 \\ l_4\varphi_1 & l_4\varphi_2 & l_4\varphi_4 & l_4\varphi_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_1 v \\ -l_2 v \\ -l_3 v \\ -l_4 v \end{pmatrix}.$$

Последняя система имеет единственное решение, так как определитель $\det \|l_j\varphi_i\|_{i,j=1}^4$ системы отличен от нуля в силу невырожденности модели. □

О КОРРЕКТНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

В пространстве решений введем норму

$$\|u\|_\sigma = \max_{0\leqslant x\leqslant\ell} |u(x)| + \bigvee_0^\ell (u') + \max_{0\leqslant x\leqslant\ell} |pu''_{x\mu}(x)| + \bigvee_0^\ell \left(\left(pu''_{x\mu}\right)'_x\right). \tag{38}$$

Очевидно, что мы получим банахово пространство.

Покажем, что *если $u(x,\alpha)$ — решение уравнения*

$$\left(pu''_{x\mu}\right)''_{x\sigma} - \left(ru'_x\right)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma, \tag{39}$$

удовлетворяющее начальным условиям $u(x_0) = æ_1(\alpha)$, $u'_x(x_0) = æ_2(\alpha)$, $\left(pu''_{x\mu}\right)(x_0) = æ_3(\alpha)$, $\left(\left(pu''_{x\mu}\right)'_x\right)(x) = æ_4(\alpha)$, при некотором $x_0 \in \overline{[0;\ell]}_S$, то $u(x,\alpha)$ непрерывно зависит от α, если этим свойством обладают функции $æ_i(\alpha)$ $(i = 1,2,3,4)$.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_i(x)\}$ — решения однородного уравнения

$$\left(pu''_{x\mu}\right)''_{x\sigma} - \left(ru'_x\right) + uQ'_\sigma = 0,$$

удовлетворяющие начальным условиям $\varphi_i(x_0) = \delta_i^1$, $(\varphi_i)'_x(x_0) = \delta_i^2$, $\left(p\,(\varphi_i)''_{x\mu}\right)(x_0) = \delta_i^3$, $\left(p\,(\varphi_i)''_{x\mu}\right)'_x(x_0) = \delta_i^4$ $(i = 1,2,3,4)$, где δ_i^j — символ Кронекера, равный 1, если $i = j$, 0 в противном случае; $v(x)$ — решение уравнения (39), удовлетворяющее начальным условиям $v(x_0) = v'_x(x_0) = \left(pv''_{x\mu}\right)'_x(x_0) = \left(\left(pv''_{x\mu}\right)'_x\right)(x_0) = 0$. Тогда $u(x,\alpha) = v(x) + \sum\limits_{i=1}^{4} \varphi_i(x)æ_i(\alpha)$. Теперь утверждение следует из неравенства

$$\|u(\cdot,\alpha) - u(\cdot,\alpha_0)\|_\sigma \leqslant \sum_{i=1}^{4} |æ_i(\alpha) - æ_i(\alpha_0)| \cdot \|\varphi_i\|_\sigma.$$

Последнее утверждение можно усилить: *Если $æ_i(\alpha)$ дифференцируемы k раз, то решение $u(x,\alpha)$ имеет производные (по α) до k-го порядка.*

Изучим далее вопрос о непрерывной зависимости решения уравнения

$$\left(pu''_{x\mu}\right)''_{x\sigma} - \left(ru'_x\right)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma \tag{40}$$

от параметра λ, когда коэффициент $p(x)$ не зависит от λ; при каждом $\lambda \in [\lambda_*; \lambda_{**}]$, $r(x,\lambda) \geqslant 0$, и коэффициенты имеют вид $r(x,\lambda) = r_0(x) + \psi_1(\lambda) r_1(x)$, $Q(x,\lambda) = Q_1(x) + \psi_2(\lambda) Q_2(x)$ и $F(x,\lambda) = F_1(x) + \psi_3(\lambda) F_2(x)$, причем функции $r_0(x)$, $r_1(x)$, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — σ-абсолютно непрерывны на $\overline{[0;\ell]}_S$.

Теорема 4. *Пусть $u(x,\lambda)$ — решение уравнения (40), удовлетворяющее начальным условиям*

$$u(x_0) = u_0, u'(x_0) = u_1, \left(pu''_{x\mu}\right)(x_0) = u_2, \left(\left(pu''_{x\mu}\right)'_x\right)(x_0) = u_3 \tag{41}$$

при некотором $x_0 \in \overline{[0;\ell]}_S$. Тогда,

1) *$u(x,\lambda)$ непрерывно зависит от λ по норме $\|\cdot\|_\sigma$, если $\psi_i(\lambda)$ непрерывны;*

2) *$u(x,\lambda)$ имеет непрерывные производные по λ до порядка k, если $\psi_i(\lambda)$, k раз непрерывно дифференцируемы.*

Доказательство. Пусть $u_0(x) = u(x,\lambda_0)$ и $u_1(x) = u(x,\lambda_1)$ — решения уравнения (40) при $\lambda = \lambda_0$ и $\lambda = \lambda_1$ соответственно, удовлетворяющие условиям (41). Тогда $w(x) = u_1(x) - u_0(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}\left(pw''_{x\mu}\right)''_{x\sigma} - \left(r(x,\lambda_1)w'_x\right)'_\sigma + Q'_\sigma(x,\lambda_1)w = \\ = \Big(\psi_1(\lambda_1) - \psi_1(\lambda_0)\Big)\left(r_1(x){u_0}'_x\right)'_\sigma + \Big(\psi_2(\lambda_0) - \psi_2(\lambda_1)\Big) u_0(x){Q_2}'_\sigma(x) + \\ + \Big(\psi_3(\lambda_1) - \psi_3(\lambda_0)\Big){F_2}'_\sigma(x),\end{aligned} \tag{42}$$

и нулевым начальным условиям $u(x_0) = u'(x_0) = \left(pu''_{x\mu}\right)(x_0) = \left(\left(pu''_{x\mu}\right)'_x\right)(x_0) = 0$. Интегрируя (42) четыре раза в пределах от x_0 до x, первый раз — по мере σ, второй и четвертый — по мере Лебега, и третий — по мере, порождаемой функцией $P(x) = \int\limits_0^x \frac{d\mu(\tau)}{p(\tau)}$, получим четыре равенства (с учётом нулевых начальных данных для $w(x)$)

$$\begin{aligned}\left(pw''_{x\mu}\right)'_x(x) = r(x,\lambda_1)w'_x(x) - \int\limits_{x_0}^x w(s)\,dQ(s,\lambda_1) + \Big(\psi_1(\lambda_1) - \psi_1(\lambda_0)\Big)\Big(r_1(x){u_0}'_x(x) - r_1(x_0)u_1\Big) + \\ + \Big(\psi_2(\lambda_0) - \psi_2(\lambda_1)\Big)\int\limits_{x_0}^x u_0(s)\,dQ_2(s) + \Big(\psi_3(\lambda_1) - \psi_3(\lambda_0)\Big)(F_2(x) - F_2(x_0)),\end{aligned} \tag{43}$$

$$\left(pw''_{x\mu}\right)(x) = r(x,\lambda_1)w(x) - \int\limits_{x_0}^x w(t)\,dr(t,\lambda_1) - \int\limits_{x_0}^x\int\limits_{x_0}^t w(s)\,dQ(s,\lambda_1)\,dt +$$

$$
+\Big(\psi_1(\lambda_1)-\psi_1(\lambda_0)\Big)\int\limits_{x_0}^{x}\big(r_1(t){u_0}'_x(t)-r_1(x_0)u_1\big)\,dt+
$$

$$
+\Big(\psi_2(\lambda_0)-\psi_2(\lambda_1)\Big)\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{t}u_0(s)\,dQ_2(s)\,dt+\Big(\psi_3(\lambda_1)-\psi_3(\lambda_0)\Big)\int\limits_{x_0}^{x}(F_2(t)-F_2(x_0))\,dt \quad (44)
$$

(здесь мы интеграл $\int\limits_{x_0}^{x} r(t,\lambda_1)\,dw(t)$ проингрировали по частям, что возможно ввиду его существования по Риману–Стилтьесу),

$$
w'_x(x)=\int\limits_{x_0}^{x} r(\tau,\lambda_1)w(\tau)\,dP(\tau)-\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{\tau} w(t)\,dr(t,\lambda_1)\,dP(\tau)-\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{\tau}\int\limits_{x_0}^{t} w(s)\,dQ(s,\lambda_1)\,dt\,dP(\tau)+
$$

$$
+\Big(\psi_1(\lambda_1)-\psi_1(\lambda_0)\Big)\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{\tau}\big(r_1(t){u_0}'_x(t)-r_1(x_0)u_1\big)\,dt\,dP(\tau)+
$$

$$
+\Big(\psi_2(\lambda_0)-\psi_2(\lambda_1)\Big)\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{\tau}\int\limits_{x_0}^{t}u_0(s)\,dQ_2(s)\,dt\,dP(\tau)+
$$

$$
+\Big(\psi_3(\lambda_1)-\psi_3(\lambda_0)\Big)\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{\tau}(F_2(t)-F_2(x_0))\,dt\,dP(\tau), \quad (45)
$$

$$
w(x)=\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{\eta} r(\tau,\lambda_1)w(\tau)\,dP(\tau)\,d\eta-\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{\eta}\int\limits_{x_0}^{\tau} w(t)\,dr(t,\lambda_1)\,dP(\tau)\,d\eta-
$$

$$
-\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{\eta}\int\limits_{x_0}^{\tau}\int\limits_{x_0}^{t} w(s)\,dQ(s,\lambda_1)\,dt\,dP(\tau)\,d\eta+
$$

$$
+\Big(\psi_1(\lambda_1)-\psi_1(\lambda_0)\Big)\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{\eta}\int\limits_{x_0}^{\tau}\big(r_1(t){u_0}'_x(t)-r_1(x_0)u_1\big)\,dt\,dP(\tau)\,d\eta+
$$

$$
+\Big(\psi_2(\lambda_0)-\psi_2(\lambda_1)\Big)\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{\eta}\int\limits_{x_0}^{\tau}\int\limits_{x_0}^{t}u_0(s)\,dQ_2(s)\,dt\,dP(\tau)\,d\eta+
$$

$$
+\Big(\psi_3(\lambda_1)-\psi_3(\lambda_0)\Big)\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{\eta}\int\limits_{x_0}^{\tau}(F_2(t)-F_2(x_0))\,dt\,dP(\tau)\,d\eta, \quad (46)
$$

Из (43), (44), (45) и (46) последовательно находим

$$
\bigvee_0^{\ell}\Big(\big(pw''_{x\mu}\big)'_x\Big)\leqslant\bigvee_0^{\ell}\big(r(\cdot,\lambda_1)w'_x(\cdot)\big)+\|w\|\bigvee_0^{\ell}\big(Q(\cdot,\lambda_1)\big)+\Big|\psi_1(\lambda_1)-\psi_1(\lambda_0)\Big|\bigvee_0^{\ell}\big(r_1(\cdot){u_0}'_x(\cdot)\big)+
$$

$$+\Big|\psi_2(\lambda_0)-\psi_2(\lambda_1)\Big|\,\|u_0\|\bigvee_0^{\ell}(Q_2)+\Big|\psi_3(\lambda_1)-\psi_3(\lambda_0)\Big|\bigvee_0^{\ell}(F_2)\,, \quad (47)$$

$$\begin{gathered}\|pw''_{x\mu}\|_C\leqslant \sup r(\cdot,\lambda_1)\|w\|_C+\|w\|_C\bigvee_0^{\ell}(r(\cdot,\lambda_1))+\ell\|w\|\bigvee_0^{\ell}(Q(\cdot,\lambda_1))+\\ +\Big|\psi_1(\lambda_1)-\psi_1(\lambda_0)\Big|\,\ell\left(\sup r_1(x)\sup {u_0}'_x(x)+r_1(x_0)|u_1|\right)+\\ +\Big|\psi_2(\lambda_0)-\psi_2(\lambda_1)\Big|\,\ell\|u_0\|_C\bigvee_0^{\ell}(Q_2)+\ell\Big|\psi_3(\lambda_1)-\psi_3(\lambda_0)\Big|\bigvee_0^{\ell}(F_2)\,, \quad (48)\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\bigvee_0^{\ell}(w'_x)\leqslant \sup r(\cdot,\lambda_1)\|w\|_C\bigvee_0^{\ell}(P)+\|w\|_C\bigvee_0^{\ell}(r(\cdot,\lambda_1))\bigvee_0^{\ell}(P)+\|w\|_C\ell\bigvee_0^{\ell}(Q(\cdot,\lambda_1))\bigvee_0^{\ell}(P)+\\ +\Big|\psi_1(\lambda_1)-\psi_1(\lambda_0)\Big|\,\ell\sup_x\left(r_1(x){u_0}'_x(x)-r_1(x_0)u_1\right)\bigvee_0^{\ell}(P)+\\ +\ell\Big|\psi_2(\lambda_0)-\psi_2(\lambda_1)\Big|\,\|u_0\|\bigvee_0^{\ell}(Q_2)\bigvee_0^{\ell}(P)+\Big|\psi_3(\lambda_1)-\psi_3(\lambda_0)\Big|\,\ell\sup_x|F_2(x)-F_2(x_0)|\bigvee_0^{\ell}(P)\,, \quad (49)\end{gathered}$$

Таким образом, для нормы $\|w\|_\sigma$ справедлива оценка (ниже, точка вместо аргумента означает, что по этому аргументу берется соответствующая операция: нахождение супремума или вариации)

$$\begin{gathered}\|w\|_\sigma=\max_{0\leqslant x\leqslant\ell}|w(x)|+\bigvee_0^{\ell}(w')+\max_{0\leqslant x\leqslant\ell}|pw''_{x\mu}(x)|+\bigvee_0^{\ell}\left(\left(pw''_{x\mu}\right)'_x\right)\leqslant\\ \leqslant\|w\|_C+\sup r(\cdot,\lambda_1)\|w\|_C\bigvee_0^{\ell}(P)+\|w\|_C\bigvee_0^{\ell}(r(\cdot,\lambda_1))\bigvee_0^{\ell}(P)+\|w\|_C\ell\bigvee_0^{\ell}(Q(\cdot,\lambda_1))\bigvee_0^{\ell}(P)+\\ +\Big|\psi_1(\lambda_1)-\psi_1(\lambda_0)\Big|\,\ell\sup_x\left(r_1(x){u_0}'_x(x)-r_1(x_0)u_1\right)\bigvee_0^{\ell}(P)+\\ +\ell\Big|\psi_2(\lambda_0)-\psi_2(\lambda_1)\Big|\,\|u_0\|\bigvee_0^{\ell}(Q_2)\bigvee_0^{\ell}(P)+\\ +\Big|\psi_3(\lambda_1)-\psi_3(\lambda_0)\Big|\,\ell\sup_x|F_2(x)-F_2(x_0)|\bigvee_0^{\ell}(P)+\\ +\sup r(\cdot,\lambda_1)\|w\|_C+\|w\|_C\bigvee_0^{\ell}(r(\cdot,\lambda_1))+\ell\|w\|\bigvee_0^{\ell}(Q(\cdot,\lambda_1))+\\ +\Big|\psi_1(\lambda_1)-\psi_1(\lambda_0)\Big|\,\ell\left(\sup r_1(x)\sup {u_0}'_x(x)+r_1(x_0)|u_1|\right)+\\ +\Big|\psi_2(\lambda_0)-\psi_2(\lambda_1)\Big|\,\ell\|u_0\|_C\bigvee_0^{\ell}(Q_2)+\ell\Big|\psi_3(\lambda_1)-\psi_3(\lambda_0)\Big|\bigvee_0^{\ell}(F_2)+\end{gathered}$$

$$+\left(\sup_x r(x,\lambda_1)+\bigvee_0^\ell(r(\cdot,\lambda_1))\right)\left(\sup r(\cdot,\lambda_1)\|w\|_C\bigvee_0^\ell(P)+\right.$$

$$+\|w\|_C\bigvee_0^\ell(r(\cdot,\lambda_1))\bigvee_0^\ell(P)+\|w\|_C\ell\bigvee_0^\ell(Q(\cdot,\lambda_1))\bigvee_0^\ell(P)+$$

$$+\left|\psi_1(\lambda_1)-\psi_1(\lambda_0)\right|\ell\sup_x\left(r_1(x){u_0}'_x(x)-r_1(x_0)u_1\right)\bigvee_0^\ell(P)+$$

$$+\ell\left|\psi_2(\lambda_0)-\psi_2(\lambda_1)\right|\|u_0\|\bigvee_0^\ell(Q_2)\bigvee_0^\ell(P)+$$

$$\left.+\left|\psi_3(\lambda_1)-\psi_3(\lambda_0)\right|\ell\sup_x|F_2(x)-F_2(x_0)|\bigvee_0^\ell(P)\right)+\|w\|\bigvee_0^\ell(Q(\cdot,\lambda_1))+$$

$$+\left|\psi_1(\lambda_1)-\psi_1(\lambda_0)\right|\bigvee_0^\ell\left(r_1(\cdot){u_0}'_x(\cdot)\right)+$$

$$+\left|\psi_2(\lambda_0)-\psi_2(\lambda_1)\right|\|u_0\|\bigvee_0^\ell(Q_2)+\left|\psi_3(\lambda_1)-\psi_3(\lambda_0)\right|\bigvee_0^\ell(F_2). \quad (50)$$

Из (50) видно, что норма $\|w\|_\sigma$ оценивается сверху величинами $|\psi_i(\lambda_1)-\psi_i(\lambda_0)|$ и $\|w\|_C$. Так как $w(x)$ является решением интегрального уравнения

$$w(x)=z(x)+(Aw), \quad (51)$$

где

$$z(x)=\int_{x_0}^x\int_{x_0}^\eta\int_{x_0}^\tau\left(r_1(t)(\psi_1(\lambda_1)-\psi_1(\lambda_0)){u_0}'_x(t)+\ (\psi_2(\lambda_0)-\psi_2(\lambda_1))\int_{x_0}^t u_0(s)\,dQ_2(s)+\right.$$

$$\left.+F_2(t)(\psi_3(\lambda_1)-\psi_3(\lambda_0))\ -F_2(x_0)(\psi_3(\lambda_1)-\psi_3(\lambda_0))\right)\,dt\,dP(\tau)\,d\eta, \quad (52)$$

полученного из (22), с учетом нулевым начальных условий, и A определяется равенством (23), то для $\|w\|_C$ справедлива оценка

$$\|w\|_C\leqslant\sum_{n=0}^\infty\|A^nz\|_C\leqslant\sum_{n=0}^\infty\frac{C^n\ell^n}{n!}\|z\|_C=\|z\|_C\cdot e^{C\ell}.$$

Из последней оценки вытекает, что $\|w\|_C$ оценивается нормой $z(x)$ в $C[0;\ell]$, которая в силу (52) может быть сделана сколь угодно малой ввиду непрерывности $\psi_i(\lambda)$, и первая часть теоремы доказана.

Пусть теперь $\psi_i(\lambda)$ непрерывно дифференцируемы. Применяя теорему Лагранжа о конечных разностях к $\psi_i(\lambda_1)-\psi_i(\lambda_0)$, равенство (42) мы можем переписать в виде

$$\left(pw''_{x\mu}\right)''_{x\sigma}-\left(r(x,\lambda_1)w'_x\right)'_\sigma+Q'_\sigma(x,\lambda_1)w=$$
$$=\psi_1'\left(\widehat{\lambda}_1\right)(\lambda_1-\lambda_0)\left(r_1(x){u_0}'_x\right)'_\sigma-\psi_2'\left(\widehat{\lambda}_2\right)(\lambda_1-\lambda_0)u_0(x){Q_2}'_\sigma(x)+\psi_3'\left(\widehat{\lambda}_3\right)(\lambda_1-\lambda_0){F_2}'_\sigma(x), \quad (53)$$

при некоторых $\widehat{\lambda}_i$. Обозначим $y = \dfrac{w}{\lambda - \lambda_0}$. Разделим обе части последнего равенства на $\lambda_1 - \lambda_0$, будем иметь

$$\begin{aligned}(py''_{x\mu})''_{x\sigma} - \left(r(x,\lambda_1)y'_x\right)'_\sigma + Q'_\sigma(x,\lambda_1)y = \\ = \psi'_1\left(\widehat{\lambda}_1\right)\left(r_1(x)u_0{}'_x\right)'_\sigma - \psi'_2\left(\widehat{\lambda}_2\right)u_0(x)Q_2{}'_\sigma(x) + \psi'_3\left(\widehat{\lambda}_3\right)F_2{}'_\sigma(x). \quad (54)\end{aligned}$$

Таким образом, для определения y мы получили уравнение (54). Величина y пока определена только при $\lambda \neq \lambda_0$. Определим ее при $\lambda = \lambda_0$ так, чтобы y удовлетворяло уравнению (54) и $x = x_0$ обращалось в нуль, вместе со всеми производными до третьего порядка включительно. Так как y, y'_x, $y''_{x\mu}$ и $y'''_{x\mu x}$ обращается в нуль при $x = x_0$ при всех λ, и коэффициенты уравнения (54) удовлетворяют первой части теоремы, то y непрерывно зависит от параметра λ по норме пространства E при всех λ достаточно близких к λ_0, следовательно, y, y'_x, $y''_{x\mu}$ и $y'''_{x\mu x}$ стремятся к определенным пределам при $\lambda \to \lambda_0$. Остается применить первую часть теоремы, чтобы получить требуемое.

Пусть теперь функции $\psi_i(\lambda)$ k раз непрерывно дифференцируемы. Применяя последовательно k раз вторую часть теоремы, мы получим утверждение теоремы. Теорема доказана. □

В случае, когда коэффициенты $r(x.\lambda)$, $Q(x,\lambda)$ и $F(x,\lambda)$ удовлетворяют по второму аргументу условию Липшица, то можно утверждать, что решение соответствующей начальной задачи непрерывно зависит от параметра λ локально, т. е. существует окрестность точки x_0 в которой при достаточной близости λ к λ_0 функции $u(x,\lambda)$ и $u(x,\lambda_0)$ отличаются мало по норме $\|\cdot\|_\sigma$, только максимум и вариации берутся по окрестности точки x_0.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. — М.: Мир, 1968. — 749 с.

[2] Кац И.С., Крейн М.Г. Дополнение II к книге Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. — М.: Мир, 1968. — 749 с. — С. 648–733.

[3] Покорный Ю. В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // ДАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С.167–169.

[4] Покорный Ю.В. О дифференциалах Стилтьеса в обобщенной задаче Штурма–Лиувилля / Ю.В. Покорный // Докл. АН. — 2002. — Т. 383, № 5. — С. 1–4.

[5] Покорный Ю. В., Зверева М. Б., Шабров С. А. Осцилляционная теория Штурма—Лиувилля для импульсных задач // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, вып. 1 (379). — С. 98–141.

[6] Покорный Ю. В., Бахтина Ж. И., Зверева М. Б., Шабров С. А. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач. — М.: Физматлит, 2009. — 192с.

[7] Шабров С. А. О μ-регуляризации функции с конечным изменением / С. А. Шабров // Сборник статей аспирантов и студентов математического факультета ВГУ. — Воронеж, 1999. — С. 166–169.

Шабров С. А., кафедра математического анализа Воронежского Государственного Университета, доцент
E-mail: shaspoteha@mail.ru
Тел.: 8 (473) 220-86-90

Shabrov S. A., Department of Mathematical Analysis, Voronezh State University, Associate Professor
E-mail: shaspoteha@mail.ru
Tel.: 8 (473) 220-86-90