УДК 517.954.988.8

СХОДИМОСТЬ МЕТОДА ГАЛЁРКИНА ПРИБЛИЖЁННОГО РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ УСЛОВИЕМ НА РЕШЕНИЕ*

В. В. Смагин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 12.12.12 г.

Аннотация: в гильбертовом пространстве слабо разрешимое абстрактное линейное параболическое уравнение с периодическим условием на решение решается приближенно полудискретным методом Галёркина. Установлены оценки погрешностей приближенных решений, сходимость приближенных решений к точному решению и порядки скорости сходимости.

Ключевые слова: гильбертово пространство, метод Галеркина, параболическое уравнение, периодическое условие.

Abstract: in the Hilbert space the abstract linear parabolic equation with periodic conditions for the solution is approximative y solved by means of semi-discrete Galerkin's method. We establish error estimates for approximate solutions, the convergence of approximate solution to the exact solution and the orders of the rate of convergence.

Keywords: Hilbert space, Galerkin method, parabolic equation, periodic conditions.

ОПИСАНИЕ ТОЧНОЙ И ПРИБЛИЖЕННОЙ ЗАДАЧ

Предполагается, что задана тройка сепарабельных гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$, где пространство V' - двойственное к V, а пространство H отождествляется со своим двойственным H'. Оба вложения плотные и непрерывные. При почти всех $t \in [0,T]$ на $u, v \in V$ определены полуторалинейные формы $a(t,u,v)$. Предполагается, что функция $t \to a(t,u,v) \in \mathbb{C}^1$ при всех $u, v \in V$ измерима на $[0,T]$. Пусть для всех $u, v \in V$ и почти всех $t \in [0,T]$ выполнены оценки:

$$|a(t,u,v)| \leqslant M\|u\|_V\|v\|_V, \quad \operatorname{Re} a(t,u,u) \geqslant \alpha\|u\|_V^2, \tag{1}$$

где $\alpha > 0$. Форма $a(t,u,v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A(t) : V \to V'$ такой, что выполняется соотношение $a(t,u,v) = (A(t)u,\, v)$. Здесь под выражением типа $(z,\, v)$ понимается значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Для $z \in H$ выражение $(z,\, v)$, в силу отождествления $H \equiv H'$, совпадает со скалярным произведением в H [1]. Из определения оператора $A(t)$ следует оценка $\|A\|_{V \to V'} \leqslant M$.

В пространстве V' на $[0,T]$ рассмотрим периодическую параболическую задачу:

$$u'(t) + A(t)u(t) = f(t), \qquad u(0) = u(T)\,. \tag{2}$$

В (2) задана функция $t \to f(t) \in V'$. Производные функций здесь и далее понимаются в обобщенном смысле.

В [2, с.289] приводится теорема о существовании слабого решения задачи (2).

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 13-01-00378

Теорема 1. *Предположим, что в задаче (2) функция* $f \in L_2(0,T;V')$. *Тогда существует единственная функция* $u(t)$ *такая, что* $u \in L_2(0,T;V) \cap C([0,T],H)$, $u' \in L_2(0,T;V')$, *удовлетворяющая почти всюду на* $[0,T]$ *уравнению в (2), и выполняется периодическое условие.*

В условиях теоремы 1 установим оценку решения $u(t)$. Из (2) для решения $u \in L_2(0,T;V) \cap C([0,T],H)$ следует равенство

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 + 2\mathrm{Re}\, a(t,u(t),u(t)) = 2\mathrm{Re}\,(f(t),u(t))\,. \tag{3}$$

Интегрируем (3) от 0 до T. Учитывая периодические условия и (1), получим оценку

$$2\alpha\int\limits_0^T \|u(t)\|_V^2\,dt \leqslant \int\limits_0^T |(f(t),u(t))|\,dt \leqslant \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^T \|f(t)\|_{V'}^2\,dt + \alpha\int\limits_0^T \|u(t)\|_V^2\,dt\,.$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^T \|u(t)\|_V^2\,dt \leqslant \frac{1}{\alpha^2}\int\limits_0^T \|f(t)\|_{V'}^2\,dt\,. \tag{4}$$

Далее заметим, что из уравнения (2) почти всюду на $[o,T]$ следует оценка

$$\|u'(t)\|_{V'} \leqslant M\|u(t)\|_V + \|f(t)\|_{V'}\,. \tag{5}$$

Из (4) и (5) получим оценку

$$\int\limits_0^T \left(\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{V'}^2\right)dt \leqslant C\int\limits_0^T \|f(t)\|_{V'}^2\,dt\,. \tag{6}$$

Так как $u \in L_2(0,T;V)$ и $u' \in L_2(0,T;V')$, то [3, с.110] решение $u \in C([0,T],H)$ и выполняется оценка

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_H^2 \leqslant C\int\limits_0^T \left(\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{V'}^2\right)dt\,. \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует окончательная оценка решения задачи (2).

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_H^2 + \int\limits_0^T \left(\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{V'}^2\right)dt \leqslant C\int\limits_0^T \|f(t)\|_{V'}^2\,dt\,.$$

Далее задача (2) решается приближенно методом Галеркина.

Заметим, что применение и сходимость метода Галеркина для параболических уравнений с начальным условием на решение достаточно хорошо исследовано. Отметим здесь наиболее близкие к данной статье работы [4]–[7]. Разработанная в указанных работах методика в предлагаемой статье применяется к исследование метода Галеркина приближенного решения слабо разрешимого параболического уравнения с периодическим условием на решение.

Итак, пусть V_h – конечномерное подпространство пространства V. Здесь параметр $h > 0$. Определим пространство V_h', задав на $u_h \in V_h$ двойственную норму $\|u_h\|_{V_h{}'} = \sup|(u_h,v_h)|$, где точная верхняя граница берется по всем $v_h \in V_h$ и $\|v_h\|_V = 1$. Очевидно, что $\|u_h\|_{V_h'} \leqslant \|u_h\|_{V'}$. Обозначим через P_h ортогональный проектор в пространстве H на V_h. В [4] замечено , что оператор P_h допускает расширение по непрерывности до оператора $\overline{P}_h : V' \to V_h'$ и справедлива оценка

$$\|\overline{P}_h u\|_{V_h'} \leqslant \|u\|_{V'} \quad (u \in V'). \tag{8}$$

Отметим также для $u \in V'$ и $v \in H$ соотношение $(\overline{P}_h u, v) = (u, P_h v)$, которое получается соответствующим предельным переходом [5].

Задаче (2) поставим в соответствие приближенную в V_h задачу. Определенную на $[0, T]$ функцию $t \to u_h(t) \in V_h$ назовем приближенным решением задачи (2), найденным полудискретным методом Галеркина, если

$$u_h'(t) + A_h(t)u_h(t) = \overline{P}_h f(t),\ u_h(0) = u_h(T)\,. \tag{9}$$

В (9) оператор $A_h(t) = \overline{P}_h A(t) : V_h \to V_h$. Заметим, что задача (9) сводится к конечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическим условием на решение. Разрешимость задачи (9) устанавливается как и для задачи (2).

СХОДИМОСТЬ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ

Установим оценку погрешности приближенных решений.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и $u_h(t)$ – решение задачи (9). Тогда справедлива оценка*

$$\int\limits_0^T \left(\|u_h(t)\|_V^2 + \|u_h'(t)\|_{V_h'}^2 \right) dt \leqslant C \int\limits_0^T \|\overline{P}_h f(t)\|_{V_h'}^2\, dt\,. \tag{10}$$

Доказательство. Равенство (9) умножим на $u_h(t)$ скалярно в H, затем возьмем удвоенную вещественную часть. Получим при почти всех $t \in [0, T]$

$$\frac{d}{dt}\|u_h(t)\|_H^2 + 2\mathrm{Re}\ a(t, u_h(t), u_h(t)) = 2\mathrm{Re}\ (\overline{P}_h f(t), u_h(t))\,. \tag{11}$$

Левую часть равенства (11) оцениваем снизу, а правую сверху.

$$\frac{d}{dt}\|u_h(t)\|_H^2 + 2\alpha\|u_h(t)\|_V^2 \leqslant \alpha^{-1}\|\overline{P}_h f(t)\|_{V_h'}^2 + \alpha\|u_h(t)\|_V^2\,.$$

Отсюда, в результате интегрирования от 0 до T, следует оценка

$$\int\limits_0^T \|u_h(t)\|_V^2\, dt \leqslant \alpha^{-2} \int\limits_0^T \|\overline{P}_h f(t)\|_{V_h'}^2\, dt\,. \tag{12}$$

Оценим $u_h'(t)$. Из (9) и (8) почти при всех $t \in [0, T]$ получим

$$\|u_h'(t)\|_{V_h'} \leqslant \|\overline{P}_h f(t)\|_{V_h'} + \|A_h(t)u_h(t)\|_{V_h'} \leqslant \|\overline{P}_h f(t)\|_{V_h'} + M\|u_h(t)\|_V\,.$$

Отсюда, с учетом оценки (12), оценка (10) следует в полном объеме. □

Теорема 2. *Пусть $u(t)$ – слабое решение задачи (2), а $u_h(t)$ – решение задачи (9). Тогда справедливы две оценки:*

$$\int\limits_0^T \|u(t) - u_h(t)\|_V^2\, dt \leqslant C \int\limits_0^T \|(I - P_h)u(t)\|_V^2\, dt\,, \tag{13}$$

$$\int\limits_0^T \|\overline{P}_h u'(t) - u_h'(t)\|_{V_h'}^2\, dt \leqslant C\left(\int\limits_0^T \|(I - P_h)u(t)\|_V^2\, dt + \int\limits_0^T \|(I - \overline{P}_h)u'(t)\|_{V'}^2\, dt \right). \tag{14}$$

Доказательство. Из (2) и (9) следует равенство

$$[P_h u(t) - u_h(t)]' + \overline{P}_h A(t)[P_h u(t) - u_h(t)] = \overline{P}_h A(t)(P_h - I)u(t)\,. \tag{15}$$

К (15) применим оценку (10).

$$\int_0^T \|P_h u(t) - u_h(t)\|_V^2\, dt + \int_0^T \|\overline{P}_h u'(t) - u_h'(t)\|_{V_h'}^2\, dt \leqslant C \int_0^T \|\overline{P}_h A(t)(P_h - I)u(t)\|_{V_h'}^2\, dt\,. \tag{16}$$

Из (16), неравенства треугольника, свойства (8) и ограниченности оператора $A(t) : V \to V'$ следуют окончательные оценки (13) и (14). □

Перейдем к условиям, позволяющим из оценок (13) и (14) делать вывод о сходимости погрешностей в соответствующих нормах к нулю.

Предположим, что задана последовательность $\{V_h\}$ конечномерных подпространств пространства V, которая является предельно плотной в V. Это означает, что для любого $v \in V$ при $h \to 0$

$$\|(I - Q_h)v\|_V \to 0\,, \tag{17}$$

где Q_h – ортогональный проектор пространства V на V_h.

Заметим, что такая последовательность $\{V_h\}$ является предельно плотной последовательностью в H, что следует из оценки для любых $u \in H$ и $v \in V$

$$\|(I - P_h)u\|_H \leqslant \|(I - P_h)(u - v)\|_H + \|(I - P_h)v\|_H \leqslant \|u - v\|_H + \|(I - Q_h)v\|_H$$

и плотного непрерывного вложения $V \subset H$.

Аналогично из оценки для $u \in V'$ и $v \in H$

$$\|(I - S_h)u\|_{V'} \leqslant \|u - v\|_{V'} + \|(I - P_h)v\|_{V'}\,,$$

где S_h – ортогональный проектор пространства V' на V_h, и плотного непрерывного вложения $H \subset V'$ следует предельная плотность последовательности $\{V_h\}$ и в пространстве V'.

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Пусть для последовательности конечномерных подпространств $\{V_h\}$ выполнено условие (17). Пусть $\|P_h\|_{V \to V}$ равномерно по $h > 0$ ограничены. Тогда при $h \to 0$*

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u(t) - u_h(t)\|_H^2 + \int_0^T \|u(t) - u_h(t)\|_V^2\, dt + \int_0^T \|u'(t) - u_h'(t)\|_{V'}^2\, dt \to 0\,, \tag{18}$$

где $u(t)$ – решение задачи (2), а $u_h(t)$ – решение задачи (9).

Доказательство. Прежде всего установим сходимость к нулю правой части оценки (13).

Для любого элемента $v \in V$ выполнено

$$\|(I - P_h)v\|_V = \|(I - P_h)(v - Q_h v)\|_V \leqslant (1 + \|P_h\|_{V \to V})\|(I - Q_h)v\|_V \to 0 \tag{19}$$

при $h \to 0$. Отсюда, так как решение $u \in L_2(0, T; V)$, с учетом теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, следует

$$\int_0^T \|(I - P_h)u(t)\|_V^2\, dt \to 0\,. \tag{20}$$

Установлена сходимость к нулю второго слагаемого в (18).

Установим сходимость к нулю второго слагаемого в правой части (14).

Прежде докажем, что

$$\|\overline{P}_h\|_{V'\to V'} \leqslant \|P_h\|_{V\to V}\,. \tag{21}$$

Для произвольного $v_h \in V_h$ получим

$$\|v_h\|_{V'} = \sup_{v\in V,\,\|v\|_V=1} |(v_h, v)| = \sup_{v\in V,\,\|v\|_V=1} |(v_h, P_h v)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{v\in V,\,\|v\|_V=1} \|P_h v\|_V\,\|v_h\|_{V_h'} = \|P_h\|_{V\to V}\,\|v_h\|_{V_h'}\,. \tag{22}$$

Из (22) с учетом (8) для $v \in V'$ следует оценка

$$\|\overline{P}_h v\|_{V'} \leqslant \|P_h\|_{V\to V}\|\overline{P}_h v\|_{V_h'} \leqslant \|P_h\|_{V\to V}\|v\|_{V'}\,,$$

что и доказывает (21).

Теперь для любого $v \in V'$, учитывая (20) и предельную плотность $\{V_h\}$ в V', при $h \to 0$ получим

$$\|(I-\overline{P}_h)v\|_{V'} = \|(I-\overline{P}_h)(v - S_h v)\|_{V'} \leqslant$$

$$\leqslant (1 + \|\overline{P}_h\|_{V'\to V'})\|(I-S_h)v\|_{V'} \leqslant (1 + \|P_h\|_{V\to V})\|(I-S_h)v\|_{V'} \to 0\,, \tag{23}$$

где S_h – ортопроектор в пространстве V' на V_h.

Так как $u' \in L_2(0,T;V')$, то из (23) при $h \to 0$ следует

$$\int\limits_0^T \|(I-\overline{P}_h)u'(t)\|_{V'}^2\,dt \to 0\,. \tag{24}$$

Рассмотрим третье слагаемое в (18). Учитывая (22), получим

$$\int\limits_0^T \|u'(t) - u_h'(t)\|_{V'}^2\,dt \leqslant 2\int\limits_0^T \|(I-\overline{P}_h)u'(t)\|_{V'}^2\,dt + 2\int\limits_0^T \|\overline{P}_h u'(t) - u_h'(t)\|_{V'}^2\,dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_0^T \|(I-\overline{P}_h)u'(t)\|_{V'}^2\,dt + 2\|P_h\|_{V\to V}^2 \int\limits_0^T \|\overline{P}_h u'(t) - u_h'(t)\|_{V_h'}^2\,dt\,. \tag{25}$$

Из (25), (14), (20) и (24) при $h \to 0$ следует стремление к нулю третьего слагаемого в (18).

Сходимость к нулю первого слагаемого в (18) следует теперь из оценки (7), которая приводит к оценке

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|u(t) - u_h(t)\|_H^2 \leqslant C\int\limits_0^T \Bigl(\|u(t) - u_h(t)\|_V^2 + \|u'(t) - u_h'(t)\|_{V'}^2\Bigr)\,dt\,. \tag{26}$$

Таким образом, сходимость к нулю первого слагаемого в (18) следует из сходимости к нулю второго и третьего слагаемых. □

ПРОЕКЦИОННЫЕ КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ТИПА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ

Укажем весьма эффективные в приложениях проекционные конечномерные подпространства V_h, построенные методом конечных элементов.

Пусть подпространства $V_h \subset V$ такие, что выполняются аппроксимационные свойства:

$$\|(I - Q_h)v\|_H \leqslant r_1 h \|v\|_V \,, \tag{27}$$

$$\|v_h\|_V \leqslant r_2 h^{-1} \|v_h\|_H \,, \tag{28}$$

где константы r_1 и r_2 не зависят от $v \in V$, $v_h \in V_h$ и $h > 0$. Условие (27) типично для метода конечных элементов, а условие (28) в приложениях означает равномерное разбиение области изменения пространственных переменных на конечные элементы. В простейшем одномерном случае такими подпространствами являются, например, подпространства кусочно линейных на равномерной сетке функций (см., напр., [8], [9]).

Из (27) и (28) для $v \in V$ следует оценка

$$\|P_h v\|_V \leqslant \|P_h v - Q_h v\|_V + \|Q_h v\|_V r_2 h^{-1} \|P_h (I - Q_h)v\|_H + \|v\|_V \leqslant (r_1 r_2 + 1)\|v\|_V \,,$$

что означает равномерную по $h > 0$ оценку $\|P_h\|_{V \to V} \leqslant r_1 r_2 + 1$.

Лемма 2. *Пусть подпространства $V_h \subset V$ такие, что выполнено свойство (27). Тогда для $u \in H$ справедлива оценка*

$$\|(I - P_h)u\|_{V'} \leqslant r_1 h \|(I - P_h)u\|_H \,. \tag{29}$$

Доказательство. Проведем оценку

$$\|(I - P_h)u\|_{V'} = \sup_{v \in V,\, \|v\|_V = 1} |((I - P_h)u, v)| \leqslant \|(I - P_h)u\|_H \sup_{v \in V,\, \|v\|_V = 1} \|(I - P_h)v\|_H \leqslant$$

$$\leqslant \|(I - P_h)u\|_H \sup_{v \in V,\, \|v\|_V = 1} \|(I - Q_h)v\|_H \,.$$

Остается воспользоваться оценкой (27). $\square$

Предположим теперь, что существует гильбертово пространство E такое, что $E \subset V$ и пространство V совпадает с интерполяционным пространством $[E, H]_{1/2}$ (см. [2, с.23]). Например, если оператор $A(t)$ порожден в области с гладкой границей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ равномерно эллиптическим дифференциальным выражением второго порядка и краевым условием Дирихле, то полагаем

$$H = L_2(\Omega),\; V = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),\; E = W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \,.$$

Если же на границе Ω задано краевое условие Неймана, то полагаем

$$H = L_2(\Omega),\; V = W_2^1(\Omega),\; E = W_2^2(\Omega) \,.$$

Пусть теперь подпространства $V_h \subset V$ такие, что для $v \in E$

$$\|(I - Q_h)v\|_V \leqslant r h \|v\|_E \,. \tag{30}$$

В [10] показано, что из (30) для $v \in V$ следует оценка (аналог леммы Обэна-Нитше)

$$\|(I - Q_h)v\|_H \leqslant r_1 h \|(I - Q_h)v\|_V \,, \tag{31}$$

из которой очевидным образом следует (27).

Покажем, как в сделанных предположениях получаются оценки, позволяющие судить о скорости сходимости приближенных решений к точному.

Пусть решение $u(t)$ задачи (2) такое, что

$$u \in L_2(0,T;E)\,. \tag{32}$$

Тогда из (13), (30), (28) и (19) получим

$$\int\limits_0^T \|u(t)-u_h(t)\|_V^2\,dt \leqslant Ch^2\int\limits_0^T \|u(t)\|_E^2\,dt\,. \tag{33}$$

К условиям выполнения оценки (33) добавим предположение

$$u' \in L_2(0,T;H)\,. \tag{34}$$

Воспользовавшись (29), получим

$$\int\limits_0^T \|(I-\overline{P}_h)u'(t)\|_{V'}^2\,dt \leqslant r_1^2h^2\int\limits_0^T \|u'(t)\|_H^2\,dt\,. \tag{35}$$

Из оценок (25), (14), (33) и (35) следует оценка

$$\int\limits_0^T \|u'(t)-u_h'(t)\|_{V'}^2\,dt \leqslant Ch^2\int\limits_0^T \Big(\|u(t)\|_E^2+\|u'(t)\|_H^2\Big)\,dt\,. \tag{36}$$

Установленные оценки скорости сходимости (33) и (36) позволяют в условиях (32) и (34) получить из (26) еще одну оценку, дающую описание скорости сходимости приближенных решений к точному.

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)-u_h(t)\|_H^2 \leqslant Ch^2\int\limits_0^T \Big(\|u(t)\|_E^2+\|u'(t)\|_H^2\Big)\,dt\,.$$

ПОСТРОЕНИЕ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОЕКЦИОННЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОЭРЦИТИВНОЙ ПОЛУТОРАЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ

Пусть, как и ранее, задана рассмотренная выше тройка сепарабельных гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$. Пусть задана система $\{\omega_i\}_{i=1}^{\infty} \subset V$ линейно независимых элементов. Определим $V_m = \mathcal{L}(\omega_1,\omega_2,...,\omega_m)$ как линейную оболочку соответствующих элементов. Далее укажем простые условия, при которых подпространства V_m можно использовать в качестве проекционных подпространств для приближенного решения задачи (2). В данном случае можно считать, что $V_m = V_h$ с параметром $h = 1/m$.

Будем считать, что система $\{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ является полной в пространстве V. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого элемента $v \in V$ найдется $n \in \mathbb{N}$ и коэффициенты $c_1, c_2, ..., c_n$ такие, что $\|v - \sum_{i=1}^{n} c_i\omega_i\|_V < \varepsilon$.

Теорема 3. *Система элементов $\{\omega_i\}_{i=1}^{\infty} \subset V$ полна в V тогда и только тогда, когда последовательность подпространств V_m является предельно плотной в V при $m \to \infty$.*

Доказательство. Пусть система $\{\omega_i\}_{i=1}^\infty$ полна в пространстве V. Возьмем произвольный элемент $v \in V$, произвольное $\varepsilon > 0$ и набор коэффициентов $c_1, c_2, ..., c_n$ таких, что $\|v - \sum_{i=1}^n c_i\omega_i\|_V < \varepsilon$. Пусть $m > n$, тогда справедливо вложение $V_n \subset V_m$. Пусть Q_m – ортопроектор пространства V на V_m. Тогда для всех $m > N$

$$\|(I - Q_m)v\|_V = \inf_{v_m \in V_m} \|v - v_m\|_V \leqslant \inf_{v_n \in V_n} \|v - v_n\|_V \leqslant \|v - \sum_{i=1}^n c_i\omega_i\|_V < \varepsilon\,.$$

Это означает, что $\|(I - Q_m)v\|_V \to 0$ при $m \to \infty$, то есть последовательность подпространств V_m является предельно плотной в V при $m \to \infty$.

Обратное утверждение очевидно. □

Предположим теперь, что на $u, v \in V$ определена полуторалинейная формы $b(u, v)$. Пусть для всех $u, v \in V$ выполнены оценки:

$$|b(u, v)| \leqslant L\|u\|_V\|v\|_V, \qquad \operatorname{Re} b(u, u) \geqslant \delta\|u\|_V^2, \tag{37}$$

где $\delta > 0$. Отметим, что форма $b(u, v)$ порождает линейный ограниченный оператор $B : V \to V'$ такой, что выполняется соотношение $b(u, v) = (Bu,\, v)$.

Теорема 4. *Пусть система элементов $\{\omega_i\}_{i=1}^\infty \subset V$ такая, что система $\{B\omega_i\}_{i=1}^\infty \subset V'$ полна в пространстве V'. Тогда система $\{\omega_i\}_{i=1}^\infty$ полна в V.*

Доказательство. Для произвольного $v \in V$, учитывая (37), получим

$$\|v\|_V^2 \leqslant \delta^{-1}\operatorname{Re} b(v, v) \leqslant \delta^{-1}|b(v, v)| = \delta^{-1}|(Bv\,, v)| \leqslant \delta^{-1}\|Bv\|_{V'}\|v\|_V\,.$$

Отсюда для всех $v \in V$ следует оценка

$$\|v\|_V \leqslant \delta^{-1}\|Bv\|_{V'}\,. \tag{38}$$

Возьмем произвольный элемент $u \in V$ и $\varepsilon > 0$. Тогда $Bu \in V'$ и найдутся коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_n$ такие, что

$$\|Bu - \sum_{i=1}^n c_i B\omega_i\|_{V'} < \delta\varepsilon\,.$$

Но тогда, учитывая (38), получим

$$\|u - \sum_{i=1}^n c_i\omega_i\|_V \leqslant \delta^{-1}\|Bu - \sum_{i=1}^n c_i B\omega_i\|_{V'} < \varepsilon\,,$$

что доказывает полноту системы $\{\omega_i\}_{i=1}^\infty$ в V. □

Следствие. *Пусть линейно независимая система $\{\omega_i\}_{i=1}^\infty \subset V$ такая, что $B\omega_i = \lambda_i\omega_i$, и пусть $\{\omega_i\}_{i=1}^\infty$ полна в V'. Тогда все $\lambda_i \neq 0$ и система элементов $\{\omega_i\}_{i=1}^\infty$ полна в V.*

Доказательство. Из (38) получим

$$\|\omega_i\|_V \leqslant \delta^{-1}\|B\omega_i\|_{V'} = |\lambda_i|\delta^{-1}\|\omega_i\|_{V'}\,.$$

Отсюда следует, что все $\lambda_i \neq 0$, иначе система $\{\omega_i\}_{i=1}^\infty$ будет линейно зависимой.

Так как система $\{\omega_i\}_{i=1}^\infty$ полна в V', то для произвольного элемента $v \in V \subset V'$ и заданного $\varepsilon > 0$ найдутся коэффициенты $c_1, c_2, ..., c_n$ такие, что $\|v - \sum_{i=1}^n c_i\omega_i\|_{V'} < \varepsilon$. Следовательно,

$$\|v - \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{\lambda_i} B\omega_i\|_{V'} = \|v - \sum_{i=1}^n c_i\omega_i\|_{V'} < \varepsilon\,,$$

что означает полноту в V' системы $\{B\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$. По теореме 4 это означает полноту системы $\{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ в пространстве V. □

Далее через P_m обозначаем ортогональный проектор пространства H на подпространство $V_m = \mathcal{L}(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m)$.

Теорема 5. *При всех $m \in \mathbb{N}$ справедлива оценка $\|P_m\|_{V\to V} \leqslant \delta^{-1}L$, где константы L и δ определены в (37).*

Доказательство. Утверждение следует из (37) и следующей оценки для произвольного $v \in V$.

$$\|P_m v\|_V^2 \leqslant \delta^{-1}b(P_m v, P_m v) = \delta^{-1}(BP_m v, P_m v) = \delta^{-1}(BP_m v, v) =$$

$$= \delta^{-1}b(P_m v, v) \leqslant \delta^{-1}L\|P_m v\|_V \|v\|_V\,. \tag{39}$$

При получении (39) замечено, что $BP_m v \in V_m$, поэтому $P_m BP_m v = BP_m v$. □

Отметим, что подобная схема построения подпространств V_m достаточно хорошо известна для сходных самосопряженных положительно определенных операторов (напр., [11, с.217], [12, с.74]). В построениях же, предложенных выше, симметричность соответствующих форм не предполагается. Кроме того, для предложенных проекционных подпространств V_m впервые установлена равномерная ограниченность $\|P_m\|_{V\to V}$.

В качестве простого примера в тройке непрерывно и плотно вложенных пространств $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1) \subset L_2(0,1) \subset W_2^{-1}(0,1)$ рассмотрим на $u, v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$ коэрцитивную полуторалинейную форму $b(u,v) = \int_0^1 u'(x)\overline{v'(x)}\,dx$. Эта форма порождает оператор $B : \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1) \to W_2^{-1}(0,1)$, действующий по правилу $Bu(x) = -u''(x)$, где производные понимаются в обобщенном смысле. Рассмотрим линейно независимую систему элементов $\{\omega_i\} \subset \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$, где $\omega_i = \sin i\pi x$ и $i \in \mathbb{N}$. Очевидно, что $B\omega_i = (i\pi)^2\omega_i$ и система $\{\omega_i\}$ полна в $L_2(0,1)$. Но тогда $\{\omega_i\}$ полна и в $W_2^{-1}(0,1)$. Из следствия к теореме 4 получим полноту системы $\{\omega_i\}$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$. В результате последовательность подпространств $\{V_m\}$ предельно плотна в пространстве $V = \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$, причем $\|P_m\|_{V\to V}$ будут равномерно по $m \in \mathbb{N}$ ограничены.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Обэн Ж.-П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач. — М.: Мир, 1977. — 384 с.

[2] *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971. — 372 с.

[3] *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972. — 415 с.

[4] *Вайникко Г.М., Оя П.Э.* О сходимости и быстроте сходимости метода Галеркина для абстрактных эволюционных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1975. — Т. 11, № 7. — С. 1269–1277.

[5] *Смагин В.В.* Оценки скорости сходимости проекционного и проекционно-разностного методов для слабо разрешимых параболических уравнений // Математ. сборник. — 1997. – Т. 188, № 3. – С. 143–160.

[6] *Смагин В.В.* О теореме типа Обэна-Нитше для нестационарных задач // International Scientific Journal. Spectral and Evolution Problems. — Simferopol, 2008. — V. 18. — P. 134–137.

[7] *Смагин В.В.* Слабая разрешимость задачи Коши для параболического уравнения и среднеквадратичная сходимость полудискретного метода Галеркина // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: физика, математика. — 2009. — № 1. — С. 164–169.

[8] *Марчук Г.И., Агошков В.И.* Введение в проекционно-сеточные методы. — М.: Наука, 1981. — 416 с.

[9] *Оганесян Л.А., Руховец Л.А.* Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. — Ереван, 1979. — 236 с.

[10] *Смагин В.В.* Проекционно-разностные методы приближенного решения параболических уравнений с несимметричными операторами // Дифференц. ур-ния. — 2001. — Т. 37, № 1. — С. 115–123.

[11] *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. — М.: Наука, 1969. — 456 с.

[12] *Гавурин М.К.* Лекции по методам вычислений. — М.: Наука, 1971. — 248 с.

Смагин В. В., доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа и операторных уравнений Воронежского государственного университета
E-mail: smagin@math.vsu.ru
Тел.: 2-208-771

Smagin V. V., Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor of the Department of functional analysis and operation equations, Voronezh State University
E-mail: smagin@math.vsu.ru
Tel.: 2-208-771