УДК 519.1

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ НА ГРАФАХ С НЕСТАНДАРТНОЙ ДОСТИЖИМОСТЬЮ

В. А. Скороходов

Южный федеральный университет

Поступила в редакцию 26.03.2013 г.

Аннотация: в настоящей работе для графов с нестандартной достижимостью и заданных на них функций введено понятие дискретного оператора Лапласа. Определены понятия границы и внутренности графа с нестандартной достижимостью. Предложены оценки значений функции и сформулирован принцип максимума для субгармонических внутри графа с нестандартной достижимостью функций. Сформулирована и доказана теорема существования и единственности решения задачи Дирихле на графах с нестандартной достижимостью.
Ключевые слова: граф, граф с нестандартной достижимостью, задача Дирихле.

Abstract: in this paper the notion of a discrete Laplace operator is introduced for digraphs with nonstandard reachability and for function, which defined on them. The notions of a border and interior of digraph with nonstandard reachability are defined. The estimates for function value and the maximum principle are proposed for subharmonic functions on the interior of such digraphs. The theorem of existence and uniqueness of solutions of the Dirichlet problem on digraphs with nonstandard reachability is formulated and proved.
Keywords: graph, graph with nonstandard reachabiliy, Dirichlet problem.

1. ВВЕДЕНИЕ

Графы с нестандартной достижимостью для различных ограничений на прохождение по дугам рассматривались в работах [1]-[7]. Особенностью графов такого вида является то, что не все дуги являются равноправными при построении путей, вследствие чего некоторые пути становятся недопустимыми. Вместе с тем, обыкновенные ориентированные графы можно считать графами с нестандартной достижимостью (тривиальной). Характерной же особенностью задач на графах с нестандартной достижимостью является неприменимость напрямую классических алгоритмов, поскольку все они предполагают, что все возможные пути на графе являются допустимыми. В работах [1]-[6] рассмотрены методы решения задач о кратчайших путях (см. [1], [3], [4], [6]), о максимальном потоке (см. [2], [3], [5]) и о случайных блужданиях (см. [3], [7]) по вершинам графов с нестандартной достижимостью.

При исследовании дискретного аналога оператора Лапласа на графах и краевых задач, порождаемых им, рассматривают, зачастую, некоторые топологические сети, которые имеют только некоторые сходства с графами. Однако, имеются работы, посвященные изучению краевых задач именно на ориентированных графах ([8], [9]). В этих работах рассмотрены дискретные аналоги оператора Лапласа на ориентированных графах и предложен метод декомпозиции для решения некоторых краевых задач, порождаемых оператором Лапласа, на ориентированных графах. Однако, для графов с нестандартной достижимостью предложенный метод декомпозиции становятся неприменим. Более того, некоторые классические понятия такие как, например, граница и внутренность ориентированного графа, для графов с нестандартной достижимостью не являются допустимыми в классическом их определении.

В настоящей работе предложен метод, позволяющий ставить краевые задачи на графах с нестандартной достижимостью и находить их решения.

2. ОБЩИЙ ПОДХОД К НЕСТАНДАРТНОЙ ДОСТИЖИМОСТИ

Приведем основные определения и утверждения для графов с нестандартной достижимостью [1].

Определение 1. *Графом с нестандартной достижимостью φ будем называть ориентированный граф $G_\varphi(X,U,f)$, для которого заданы:*

Два набора подмножеств дуг $U_\Delta = \{U_0,\ldots,U_m\}$ и $U^\Delta = \{U^{(0)},\ldots,U^{(k)}\}$, при этом $U_i \cap U_j = \varnothing \quad \forall i \neq j$. ($k,m \in Z_+$ – заранее известные, фиксированные числа).

Отображение $\varphi_\mu : N \to [0;k]_Z$, которое будем называть числовой характеристикой произвольного пути μ.

Формальное ограничение на достижимость.

Далее будем считать, что характеристика φ_μ произвольного пути μ определяется рекуррентно следующим образом:

$$\varphi_\mu(i) = F(\varphi_\mu(i-1), a_i), \quad \forall i > 0,\ \varphi_\mu(0) = 0,$$

где число a_i зависит от того, к какому множеству из набора U_Δ принадлежит дуга $\mu(i)$, а $F : Z \times Z \to [0;k]_Z$ – некоторая функция, например, определяемая правилом: $F(x,y) = \min\{k, x+y\}$.

Будем рассматривать два типа формальных ограничений на достижимость: строгие и нестрогие.

Ограничения строгого типа можно записать в виде:

$$\forall m(\varphi_\mu(m) = j) \Rightarrow (\mu(m+1) \in U^{(j)}),$$

т. е., если характеристика φ пути μ на шаге m равна числу j, то следующая ($(m+1)$-я) дуга пути μ обязана быть только из множества $U^{(j)}$.

Ограничения нестрогого типа можно записать в виде:

$$\forall m(\varphi_\mu(m) = j)\&([(p_2 \circ f \circ \mu)(m)]^+ \cap U^{(j)} \neq \varnothing) \Rightarrow (\mu(m+1) \in U^{(j)})$$

где $[x]^+$ – множество всех тех дуг, которые выходят из вершины x.

Другими словами, если характеристика φ пути μ на шаге m равна числу j и из концевой вершины m-той дуги выходит хотя бы одна дуга множества $U^{(j)}$, то следующая ($(m+1)$-я) дуга пути μ обязана быть только из множества $U^{(j)}$.

Всюду далее набор U_Δ будем называть характеристическим, а U^Δ – путевым набором.

Определение 2. *Путь μ будем называть допустимым путем на графе G_φ с нестандартной достижимостью φ, если он удовлетворяет формальному ограничению, заданному на G.*

Таким образом, выбором двух наборов подмножеств, числовой характеристики произвольного пути и заданием формального ограничения, любой граф, на котором не все пути являются допустимыми, можно записать в терминах графов с нестандартной достижимостью. Более того, классические ориентированные графы являются частным случаем графов с нестандартной достижимостью.

Пример 1.

Рассмотрим некоторый граф $G(X,U,f)$. Выберем в качестве характеристического и путевого наборов, наборы, состоящие из одного множества U. Т.е. $U_\Delta = \{U_0\}$ и $U^\Delta = \{U^{(0)}\}$ ($m = k = 0$).

Очевидно, $U_0 = U^{(0)} = U$. Характеристику φ выберем таким образом, что $\varphi_\mu(i) = \varphi_\mu(i-1) + 0$ $\forall i > 0$, $\forall \mu$.

Тогда при формальном ограничении любого типа все дуги графа G являются равноправными при формировании пути, вследствие чего все пути являются допустимыми.

Поскольку классические алгоритмы для решения задач о достижимости требуют, чтобы все пути на графе являлись допустимыми, то применять их к графам с нестандартной достижимостью не представляется возможным.

Основным подходом к решению классических задач о кратчайших путях, о потоках в сетях, о случайных блужданиях и др. на графах с нестандартной достижимостью является построение вспомогательного графа большего размера, но на котором все пути являются допустимыми. Показано (см. [1]–[6]), что перечисленные задачи для графов с нестандартной достижимостью сводятся к аналогичным задачам на вспомогательных графах.

Вспомогательный граф $G'(X', U', f')$ будем строить следующим образом:

Каждой вершине x исходного графа G ставим в соответствие $k+1$ вершину $\{x^{(0)}, \ldots, x^{(k)}\}$ на вспомогательном графе G'. Дуги строятся по правилу:

Пусть u такая, что $f(u) = (x, y)$, тогда

1. $\forall i$ $\forall j$ для дуги $u \in U_i \cap U^{(j)}$ строим дугу $u_i^{(j)}$ такую, что $f'(u_i^{(j)}) = (x^{(j)}, y^{(F(j,a_i))})$.

Если выбрано формальное ограничение нестрогого типа, то, кроме этих дуг, строим дополнительные дуги по правилу:

2. $\forall i$ $\forall j$ для каждой дуги $u_i \in U_i \cap (U \backslash U^{(j)})$ такой, что $[(p_1 \circ f)(u_i))]^+ \cap U^{(j)} = \varnothing$ строим дугу u'_i такую, что $f'(u'_i) = (x^{(j)}, y^{(F(j,a_i))})$.

Имеет место следующая теорема (см. [1]).

Теорема 1. *Любому пути μ' на вспомогательном графе G' соответствует допустимый путь μ на исходном графе G и вершина y достижима из x на исходном графе с нестандартной достижимостью G тогда и только тогда, когда на вспомогательном графе G' из вершины $x^{(0)}$ достижима, по крайней мере, одна из вершин множества $V_y = \{y^{(0)}, \ldots, y^{(k)}\}$.*

Рассмотрим случай, когда характеристика произвольного пути μ задана нерекуррентно, но, начиная с некоторого s, периодически с периодом l, то есть $\varphi_\mu(s+l+i) = \varphi_\mu(s+i)$ $i = 0, 1, \ldots$. Заметим, что в этом случае оказывается лишним характеристический набор U_Δ, поскольку характеристика φ_μ задана независимо от типа дуг пройденных на пути μ.

Построение вспомогательного графа, в этом случае, будем проводить следующим образом:

Каждой вершине x исходного графа ставится в соответствие $l+s$ вершин на вспомогательном графе. Дуги вспомогательного графа строятся по следующему правилу:

1. Для каждой дуги $u \in U^{(j)}$ исходного графа ставятся в соответствие дуги вспомогательного графа $\{u_i\}_{i \in \varphi_\mu^{-1}(j) \cap [0; l+s-1]}$ таких, что

$$f'(u_i) = \begin{cases} (x^{(i)}, y^{(i+1)}), & i \in \varphi_\mu^{-1}(j) \cap [0; l+s-2]; \\ (x^{(i)}, y^{(s)}), & i \in \varphi_\mu^{-1}(j) \cap \{l+s-1\}. \end{cases}$$

2. Если выбрано ограничение нестрогого типа, то, кроме указанных дуг, строятся следующие дуги:

Рассматриваем все вершины x исходного графа, такие, что $[x]^+ \cap U^{(j)} = \varnothing$, тогда для всех вершин $z \in \Gamma^+(x)$ строим дуги $\{u'_i\}_{i \in \varphi_\mu^{-1}(j) \cap [0; l+s-1]}$ такие, что

$$f'(u_i) = \begin{cases} (x^{(i)}, z^{(i+1)}), & i \in \varphi_\mu^{-1}(j) \cap [0; l+s-2]; \\ (x^{(i)}, z^{(s)}), & i \in \varphi_\mu^{-1}(j) \cap \{l+s-1\}. \end{cases}$$

В данном случае также имеет место теорема 1. Ее доказательство для случая нерекуррентной, но периодической характеристики аналогично доказательству для рекуррентной характеристики.

Таким образом, для нахождения кратчайшего допустимого пути из одной вершины в другую на графе с нестандартной достижимостью можно использовать классические алгоритмы на вспомогательном графе.

3. ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА НА ГРАФАХ С НЕСТАНДАРТНОЙ ДОСТИЖИМОСТЬЮ

Рассмотрим граф $G_\varphi(X, U, f)$ с нестандартной достижимостью φ. Введем в рассмотрение понятия границы и внутренности графа с нестандартной достижимостью (см. [1]-[4]). Отметим, что для обыкновенных (классических) графов граница определялась следующим образом (см. [8], [9]).

Определение 3. *Вершина x графа G называется граничной, если подграф, порожденный множеством $\widehat{\Gamma}(x)$ (множество всех вершин графа, достижимых из вершины x) является сильно связным.*

Определение 4. *Множество всех граничных вершин графа G называется его границей и обозначается ∂G.*

Для графов с нестандартной достижимостью сами понятия "связность" и "сильная связность" имеют достаточно сложный характер, поскольку не все пути становятся допустимыми с введением ограничения на достижимость. Более того, некоторая вершина y может не быть достижимой из вершины x, если начальный уровень характеристики произвольного пути равен нулю, но y является достижимой из x при начальном уровне характеристики пути большем нуля. Таким образом, будем пользоваться следующим определением границы графа G_φ с нестандартной достижимостью φ.

Определение 5. *Будем говорить, что вершина x является граничной вершиной графа с нестандартной достижимостью G_φ, если оня является граничной на том же самом графе G без ограничения на достижимость.*

Другими словами, $\partial G_\varphi = \partial G$. На текущий момент нам достаточно такого определения, однако, далее будет дано более точное определение границы графа с нестандартной достижимостью.

Определение 6. *Границу графа будем называть тривиальной, если $\partial G_\varphi = X$.*

Определение 7. *Внутренностью графа G_φ будем называть множество всех вершин, не являющихся граничными. Т.е. $intG_\varphi = X \backslash \partial G_\varphi$.*

Оператор Лапласа на обыкновенном ориентированном графе G задается следующим образом (см. [8], [9]):

$$\Delta_p g(x) = \sum_{y \in \Gamma(x)} p(u_{xy}) \cdot g(y) - g(x),$$

где функция $f : X \to R$, вес $p(u_{xy})$ задан для каждой дуги u_{xy} графа G и удовлетворяет неравенству

$$\sum_{u \in [x]^+} p(u) \leqslant 1. \tag{1}$$

В том случае, если $p(u_{xy}) = \frac{1}{|[x]^+|}$, то говорят, что на графе задан классический лапласиан (см. [8]):

$$\Delta g(x) = \frac{1}{|[x]^+|} \sum_{y \in \Gamma(x)} g(y) - g(x)$$

Однако, для графов с нестандартной достижимостью, поскольку не все пути остаются допустимыми с введением ограничения на достижимость, такое определение лапласиана требует некоторого уточнения.

Поскольку в [2] ограничения на достижимость были разделены на два типа – строгие и нестрогие – с существенным отличием в построении вспомогательных графов для решения классических задач, то мы, придерживаясь этой позиции, дадим два определения оператора Лапласа: для графов с ограничением строгого типа и для графов с ограничением нестрогого типа.

Пусть задана функция $g : X \times [0;k]_Z \to R$, здесь $k+1$ – число множеств в путевом наборе для графа с нестандартной достижимостью G_φ.

Оператор Лапласа на графе G_φ с нестандартной достижимостью φ строгого типа зададим следующим образом:

$$\Delta_\varphi g(x,y) = \sum_{u\in[x]^+\cap U^{(y)}} \frac{p(u)}{\sum\limits_{v\in[x]^+\cap U^{(y)}} p(v)} g((p_2\circ f)(u), F(y,a_u)) - g(x,y),$$

где вершина $z = (p_2 \circ f)(u)$ – концевая вершина дуги u, F – функция, использующаяся при вычислении характеристик путей для нестандартной достижимости (см. [1]).

Оператор Лапласа на графе G_φ с нестандартной достижимостью φ нестрогого типа зададим следующим образом:

$$\Delta_\varphi g(x,y) = h_{xy} - g(x,y),$$

где величина h_{xy} определяется следующим образом:

$$h_{xy} = \begin{cases} \sum\limits_{u\in[x]^+\cap U^{(y)}} \widetilde{p}(u)\cdot g((p_2\circ f)(u), F(y,a_u)), & [x]^+\cap U^{(y)} \neq \varnothing \\ \sum\limits_{u\in[x]^+\cap(U\setminus U^{(y)})} \overline{p}(u)\cdot g((p_2\circ f)(u), F(y,a_u)), & [x]^+\cap U^{(y)} = \varnothing. \end{cases}$$

здесь $\widetilde{p}(u) = \frac{p(u)}{\sum\limits_{v\in[x]^+\cap U^{(y)}} p(v)}$, $\bar{p}(u) = \frac{p(u)}{\sum\limits_{v\in[x]^+\cap(U\setminus U^{(y)})} p(v)}$.

Отметим, что $\sum\limits_u \widetilde{p}(u) = 1$ и $\sum\limits_u \overline{u}(u) = 1$, т. е. для весов графа выполняется основное неравенство (1).

Замечание. *При $k=0$ для каждой вершины x графа G_φ выполняется $\Delta_\varphi g(x,0) = \Delta_p g(x,0)$, поскольку при $k=0$ имеем тривиальное ограничение на достижимость (все пути являются допустимыми).*

Определение 8. *Функцию $g : X \times [0;k]_Z \to R$ будем называть гармонической на графе G_φ, если для каждой пары $(x,y) \in X \times [0;k]_Z$ выполняется $(\Delta_\varphi g)(x,y) = 0$.*

Определение 9. *Функцию $g : X \times [0;k]_Z \to R$ будем называть гармонической внутри графа G_φ, если для каждой пары $(x,y) \in \partial G_\varphi \times [0;k]_Z$ выполняется $(\Delta_\varphi g)(x,y) = 0$.*

Отметим, что функция, гармоническая на графе является гармонической и внутри графа, обратное вообще говоря не выполняется.

Определение 10. *Функцию $g : X \times [0;k]_Z \to R$ будем называть субгармонической (супергармонической) на графе G_φ, если для каждой пары $(x,y) \in X \times [0;k]_Z$ выполняется $(\Delta_\varphi g)(x,y) \geqslant 0((\Delta_\varphi g)(x,y) \leqslant 0)$.*

Определение 11. *Функцию $g : X \times [0;k]_Z \to R$ будем называть субгармонической (супергармонической) внутри графа G_φ, если для каждой пары $(x,y) \in \partial G_\varphi \times [0;k]_Z$ выполняется $(\Delta_\varphi g)(x,y) \geqslant 0((\Delta_\varphi g)(x,y) \leqslant 0)$.*

Многие классические задачи на графах с нестандартной достижимостью (к их числу относятся задачи о достижимости, о максимальном потоке, о случайных блужданиях частицы и др.) решены при помощи построения вспомогательного графа (см. [2]). Применим этот подход и в нашем случае, т.е. по правилам указанным в [1] и [2], для графа G_φ построим вспомогательный граф

$G'(X', U', f')$. Отличительной чертой вспомогательного графа является то, что на нем нет ограничений на достижимость, а это означает, что вспомогательный граф является обыкновенным орграфом. Значит, оператор Лапласа, заданный для обыкновенных графов, очевидно задан и для G'. Кроме этого, каждому пути вспомогательного графа G' соответствует допустимый путь на исходном графе G_φ.

Зададим на вспомогательном графе G' функцию $\widetilde{g} : X' \to R$ по правилу $\widetilde{g}(x_y) = g(x, y)$, где g – функция, заданная на исходном графе G_φ.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 2. *Функция $\widetilde{g}$ является гармонической на вспомогательном графе G' тогда и только тогда, когда функция g является гармонической на исходном графе G_φ.*

Теорема 3. *Функция $\widetilde{g}$ является субгармонической (супергармонической) на вспомогательном графе G' тогда и только тогда, когда функция g является субгармонической (супергармонической) на исходном графе G_φ.*

Доказательства данных теорем следуют из правил построения вспомогательного графа и определений операторов Лапласа для обыкновенных графов и для графов с нестандартной достижимостью.

Заметим, однако, что на графе G' граничные вершины, не обязательно соответствуют граничным вершинам исходного графа G_φ и наоборот, для граничной вершины исходного графа не обязательно, что все соответствующие ей вершины вспомогательного графа являются граничными. Проиллюстрируем эту ситуацию на следующем примере.

Пример 2.

Рассмотрим граф G с магнитной достижимостью (см. [2]) при $k = 1$ на рис. 1. При этом будем считать, что $U_0 = \{u_1, u_4, u_5\}$, $U_1 = \{u_2, u_3, u_6, u_7\}$, $U^{(0)} = U$ и $U^{(1)} = U_1$.

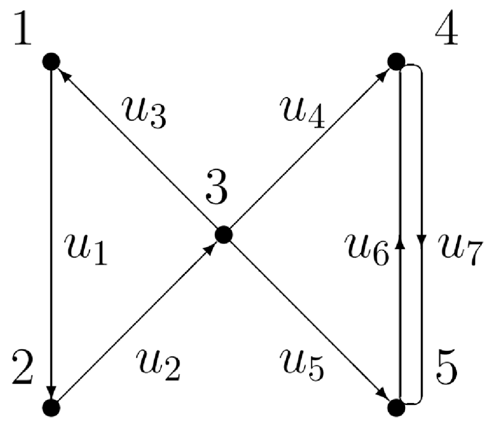

Рис. 1. *Исходный граф G с магнитной достижимостью.*

Вспомогательный граф G' показан на рис. 2.

Для вспомогательного графа на рис.2 определим границу: $\partial G' = \{1_1, 2_1, 3_1, 4_1, 5_1\}$. Вершины $\{1_1, 2_1, 3_1\}$ соответствуют внутренним вершинам исходного графа G_φ и, наоборот, граничным вершинам 4 и 5 исходного графа соответствуют вершины 4_0 и 5_0, которые не являются граничными на G'.

Пример показывает, что необходимо уточнение понятий границ и внутренностей исходного и вспомогательного графов.

Определение 12. *Вершину x вспомогательного графа G' будем называть граничной, если она соответствует граничной вершине исходного графа G без ограничения на достижимость*

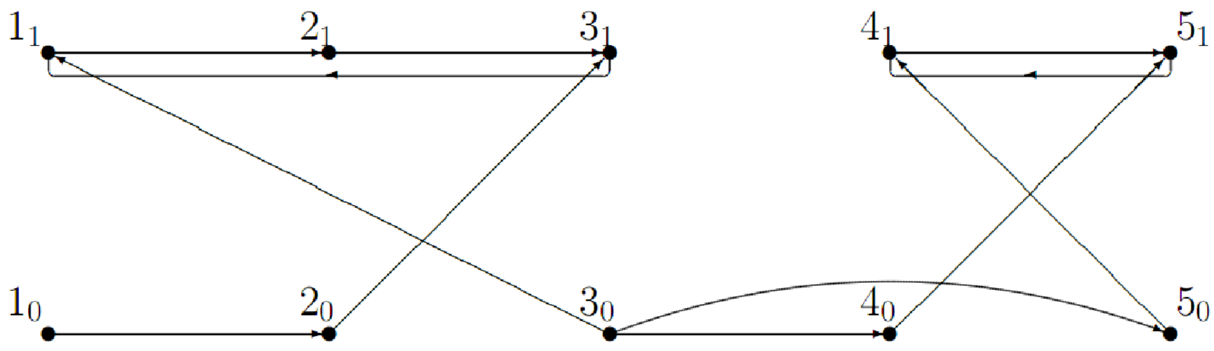

Рис. 2. *Вспомогательный граф G'.*

или подграф, порожденный множеством $\widehat{\Gamma}(x)$ является сильно связным.

Определение 13. *Вершину x исходного графа G_φ на уровне достижимости j будем называть граничной, если вершина является граничной без ограничения на достижимость или вершина вспомогательного графа x_j, соответствующая паре (x, j), является граничной на вспомогательном графе G'.*

Другими словами, на исходном графе границей является, строго говоря, не сама вершина, но пара – вершина и уровень достижимости для этой вершины. Таким образом, имеет место соотношение $\partial G_\varphi = \{(x, j) \in X \times [0; k]_Z | x_j \in \partial G'\}$. Аналогичным образом переопределяется и множество внутренних точек графа G_φ: $intG_\varphi = (X \times [0; k]_Z) \setminus \partial G_\varphi$.

Каждой вершине x с уровнем достижимости j исходного графа однозначно соответствует вершина x_j на вспомогательном графе G'. Введем следующие обозначения: $\Gamma(x, j) = \{(y, i) \in X \times [0; k]_Z | y_i \in \Gamma(x_j)\}$ и $d^+(x, j) = |\Gamma(x, j)|$.

Замечание. *На вспомогательном графе множество граничных вершин разбивается на три подмножества: $\partial G' = \partial G'_n \cup \partial G'_d \cup \partial G'_p$:*

Множество $\partial G'_n$, содержащее все вершины, которые являются граничными в смысле определения для обыкновенных графов и соответствуют граничным вершинам исходного графа G, будем называть нормальной границей графа G'.

Множество $\partial G'_d$, содержащее все вершины, которые являются граничными в смысле определения для обыкновенных графов, но соответствуют внутренним вершинам исходного графа G, будем называть дополнительной границей графа G'.

Множество $\partial G'_p$, содержащее все вершины, которые не являются граничными в смысле определения для обыкновенных графов, но соответствуют граничным вершинам исходного графа G, будем называть псевдограницей графа G'.

Теперь, когда уточнены понятия границ для исходного и вспомогательного графа, справедливы следующие теоремы (аналоги теорем 2 и 3).

Теорема 4. *Функция $\widetilde{g}$ является гармонической внутри вспомогательного графа G' тогда и только тогда, когда функция g является гармонической внутри исходного графе G_φ.*

Теорема 5. *Функция $\widetilde{g}$ является субгармонической (супергармонической) внутри вспомогательного графа G' тогда и только тогда, когда функция g является субгармонической (супергармонической) внутри исходного графа G_φ.*

4. ПРИНЦИП МАКСИМУМА. ФОРМУЛЫ ГРИНА

Для субгармонических функций, заданных на вспомогательном графе G' имеет место хорошо известный принцип максимума. Напомним основные определения и теоремы (см. [8], [9]).

Определение 14. *Функция* $\widetilde{g} : X \to R$ *называется транзитивно постоянной в вершине* x, *если для каждой вершины* $y \in \widehat{\Gamma}(x)$ *выполняется* $g(y) \equiv g(x)$.

Теорема 6. *(Принцип максимума) Субгармоническая функция, не являющаяся транзитивно постоянной ни в одной вершине* $x \in X \backslash X(0)$ *(здесь* $X(0) = \{x \in X | \Gamma(x) = \varnothing\}$*) графа* G' *не может достигать своего наибольшего значения на этом множестве вершин.*

Теорема 7. *Пусть граф* G' *не содержит бесконечных компонент сильной связности, его конденсация прогрессивно конечна (см. [10]) и функция* $\widetilde{g} : X \to R$ *– субгармоническая внутри графа* G', *тогда*

$$\sup_{x \in X} \widetilde{g}(x) = \sup_{x \in \partial G'} \widetilde{g}(x). \tag{2}$$

Доказательства теорем 6 и 7 приведены в [8].

Отметим, что поскольку по теореме 6 супремум функции $\widetilde{g}$ не может достигаться в вершинах множества $\partial G'_d$, значит, возможны два случая выполнения равенства (2) для вспомогательного графа:

1. $\sup\limits_{x \in X} \widetilde{g}(x) = \sup\limits_{x \in \partial G'_n} \widetilde{g}(x)$ и в этом случае приведенные выше теоремы 6 и 7 очевидно переносятся на случай исходного графа G_φ и определенной на нем субгармонической функции $g : X \times [0;k]_Z \to R$. Более того, в этом случае не требуется переопределения понятия границы исходного графа.

2. $\sup\limits_{x \in X} \widetilde{g}(x) = \sup\limits_{x \in \partial G'_d} \widetilde{g}(x)$ и в этом случае теоремы 6 и 7 переносятся на случай исходного графа G_φ только в случае переопределения понятия границы исходного графа.

Приведем формулировку теоремы 7 на случай исходного графа с нестандартной достижимостью.

Теорема 8. *Пусть граф* G_φ *не содержит бесконечных компонент сильной связности, его конденсация прогрессивно конечна и функция* $g : X \times [0;k]_Z \to R$ *– субгармоническая внутри графа* G_φ, *тогда*

$$\sup_{\substack{x \in X \\ y \in [0;k]_Z}} g(x,y) = \sup_{(x,y) \in \partial G_\varphi} g(x,y). \tag{3}$$

Равенство (3) фактически дает оценку для субгармонической дискретной функции двух переменных на графе с нестандартной достижимостью. Справедлива следующая теорема.

Теорема 9. *В условиях теоремы 8 следующие выражения равносильны:*

1. $\sup\limits_{\substack{x \in X \\ y \in [0;k]_Z}} g(x,y) = \sup\limits_{(x,y) \in \partial G_\varphi} g(x,y)$;
2. $g(x,y) \leqslant \sup\limits_{(z,i) \in \partial G_\varphi} g(z,i) \;\; \forall x \in X \; \forall y \in [0;k]_Z$.

Далее построим дискретные аналоги классических формул Грина для графов с нестандартной достижимостью.

Теорема 10. *Для любого графа* G_φ *с нестандартной достижимостью* φ *и любых функций* $g, f : X \times [0;k]_Z \to R$ *имеет место равенство*

$$\sum_{\substack{\widetilde{x} \in intG_\varphi \\ \widetilde{y} \in \Gamma(\widetilde{x}) \cap intG_\varphi}} (f(\widetilde{y}) - f(\widetilde{x})) \cdot (g(\widetilde{y}) - g(\widetilde{x})) = \sum_{\substack{\widetilde{x} \in intG_\varphi \\ \widetilde{y} \in \Gamma(\widetilde{x}) \cap \partial G_\varphi}} f(\widetilde{x}) \cdot (g(\widetilde{y}) - g(\widetilde{x})) -$$
$$- \sum_{\widetilde{x} \in intG_\varphi} d^+(\widetilde{x}) \cdot f(\widetilde{x}) \cdot \Delta_\varphi g(\widetilde{x}) + \sum_{\widetilde{x} \in intG_\varphi} f(\widetilde{y}) \cdot (g(\widetilde{y}) - g(\widetilde{x})). \tag{4}$$

Доказательство. Доказательство проведем прямой проверкой равенства (4). Рассмотрим

$$\sum_{\substack{\widetilde{x}\in intG_\varphi \\ \widetilde{y}\in\Gamma(\widetilde{x})\cap\partial G_\varphi}} f(\widetilde{x})\cdot(g(\widetilde{y})-g(\widetilde{x}))-\sum_{\widetilde{x}\in intG_\varphi} d^+(\widetilde{x})\cdot f(\widetilde{x})\cdot\Delta_\varphi g(\widetilde{x})=$$

преобразуем выражение $\Delta_\varphi g(\widetilde{x})$ согласно определению лапласиана, получим

$$\sum_{\substack{\widetilde{x}\in intG_\varphi \\ \widetilde{y}\in\Gamma(\widetilde{x})\cap\partial G_\varphi}} f(\widetilde{x})\cdot(g(\widetilde{y})-g(\widetilde{x}))-\sum_{\widetilde{x}\in intG_\varphi} f(x)\cdot\sum_{\widetilde{y}\Gamma(\widetilde{x})}(g(\widetilde{y})-g(\widetilde{x}))=$$

поскольку $\Gamma(\widetilde{x})\backslash(\partial G_\varphi)=\Gamma(\widetilde{x})\cap intG_\varphi$ для каждого элемента $\widetilde{x}$, следовательно,

$$-\sum_{\substack{\widetilde{x}\in intG_\varphi \\ \widetilde{y}\in\Gamma(\widetilde{x})\cap\partial G_\varphi}} f(\widetilde{x})\cdot(g(\widetilde{y})-g(\widetilde{x}))-\sum_{\substack{\widetilde{x}\in intG_\varphi \\ \widetilde{y}\in\Gamma(\widetilde{x})\cap\partial G_\varphi}}(f(\widetilde{x})-f(\widetilde{y})+f(\widetilde{y}))\cdot(g(\widetilde{y})-g(\widetilde{x}))=$$

таким образом, получили выражение

$$-\sum_{\substack{\widetilde{x}\in intG_\varphi \\ \widetilde{y}\in\Gamma(\widetilde{x})\cap\partial G_\varphi}}(f(\widetilde{y}-f(\widetilde{x}))\cdot(g(\widetilde{y})-g(\widetilde{x}))-\sum_{\substack{\widetilde{x}\in intG_\varphi \\ \widetilde{y}\in\Gamma(\widetilde{x})\cap\partial G_\varphi}} f(\widetilde{y})\cdot(g(\widetilde{y})-g(\widetilde{x})).$$

Теорема доказана.

Равенство (4) является дискретным аналогом первой формулы Грина для графов с нестандартной достижимостью.

Поменяем местами функции f и g в равенстве (4):

$$-\sum_{\substack{\widetilde{x}\in intG_\varphi \\ \widetilde{y}\in\Gamma(\widetilde{x})\cap intG_\varphi}}(g(\widetilde{y}-g(\widetilde{x}))\cdot(f(\widetilde{y})-f(\widetilde{x}))=\sum_{\substack{\widetilde{x}\in intG_\varphi \\ \widetilde{y}\in\Gamma(\widetilde{x})\cap\partial G_\varphi}} g(\widetilde{x})\cdot(f(\widetilde{y})-f(\widetilde{x}))-$$

$$-\sum_{\widetilde{x}\in intG_\varphi} d^+(\widetilde{x})\cdot g(\widetilde{x})\cdot\Delta_\varphi f(\widetilde{x})+\sum_{\substack{\widetilde{x}\in intG_\varphi \\ \widetilde{y}\in\Gamma(\widetilde{x})\cap intG_\varphi}} g(\widetilde{y})\cdot(f(\widetilde{y})-f(\widetilde{x})).$$

Вычтем последнее равенство из равенства (4), получим

$$-\sum_{\substack{\widetilde{x}\in intG_\varphi \\ \widetilde{y}\in\Gamma(\widetilde{x})\cap\partial G_\varphi}}\Big(f(\widetilde{x})g(\widetilde{y})-f(\widetilde{x})g(\widetilde{x})-g(\widetilde{x})f(\widetilde{y})+g(\widetilde{x})f(\widetilde{x})\Big)-$$

$$-\sum_{\widetilde{x}\in intG_\varphi} d^+(\widetilde{x})\cdot(f(\widetilde{x})\cdot\Delta_\varphi g(\widetilde{x})-g(\widetilde{x})\cdot\Delta_\varphi f(\widetilde{x})+$$

$$+\sum_{\substack{\widetilde{x}\in intG_\varphi \\ \widetilde{y}\in\Gamma(\widetilde{x})\cap intG_\varphi}}\Big(f(\widetilde{y})g(\widetilde{y})-f(\widetilde{y})g(\widetilde{x})-g(\widetilde{y})f(\widetilde{y})+g(\widetilde{y})f(\widetilde{x})\Big)=0$$

приводя подобные, имеем

$$-\sum_{\substack{\widetilde{x}\in intG_\varphi \\ \widetilde{y}\in\Gamma(\widetilde{x})\cap\partial G_\varphi}}\Big(f(\widetilde{x})g(\widetilde{y})-g(\widetilde{x})f(\widetilde{y})\Big)+\sum_{\substack{\widetilde{x}\in intG_\varphi \\ \widetilde{y}\in\Gamma(\widetilde{x})\cap intG_\varphi}}\Big(g(\widetilde{y})f(\widetilde{x})-f(\widetilde{y})g(\widetilde{x})\Big)-$$

$$-\sum_{\widetilde{x}\in intG_\varphi} d^+(\widetilde{x})\cdot(f(\widetilde{x})\cdot\Delta_\varphi g(\widetilde{x})-g(\widetilde{x})\cdot\Delta_\varphi f(\widetilde{x}))=0$$

отсюда следует соотношение

$$\sum_{\widetilde{x}\in intG_\varphi} d^+(\widetilde{x})\cdot(f(\widetilde{x})\cdot\Delta_\varphi g(\widetilde{x})-g(\widetilde{x})\cdot\Delta_\varphi f(\widetilde{x}))=\sum_{\substack{\widetilde{x}\in intG_\varphi\\ \widetilde{y}\in\Gamma(\widetilde{x})}}(f(\widetilde{x})g(\widetilde{y})-g(\widetilde{x})f(\widetilde{y})). \tag{5}$$

Равенство (5) является дискретным аналогом второй формулы Грина для графов с нестандартной достижимостью.

5. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ

Рассмотрим граф $G_\varphi(X,U,f)$ с нестандартной достижимостью φ и лапласиан Δ_φ, заданный на нем. Сформулируем задачу Дирихле:

Необходимо найти функцию $g: X\times[0;k]_Z\to R$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\begin{cases}\Delta_\varphi g(x,y)=0, & (x,y)\in intG_\varphi;\\ g(x,y)=h(x,y), & (x,y)\in\partial G_\varphi,\end{cases} \tag{6}$$

т. е. функция g должна быть гармонической внутри графа и на границе ∂G_φ совпадать с заданой функцией h. При этом функцию $h:\partial G_\varphi\to R$ будем называть граничной функцией задачи Дирихле.

Покажем, что решение задачи Дирихле (6) существует и единственно для широкого класса графов G_φ с нестандартной достижимостью φ.

Как показано в [8], справедлива следующая теорема.

Теорема 11. *Пусть для матрицы A, соответствующей некоторому сильно связному графу G выполняются следующие свойства:*

1. $|a_{ii}|\geqslant\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|\quad\forall\, i\in[1;n]_N,$
2. $\exists i\ \ |a_{ii}|>\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|,$

тогда столбцы этой матрицы образуют линейно независимую систему.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 12. *(Теорема существования и единственности решения задачи Дирихле на графе с нестандартной достижимостью) Пусть граф G_φ с нестандартной достижимостью φ не имеет бесконечных компонент сильной связности и его конденсация прогрессивно конечна, тогда решение задачи Дирихле (6) существует и это решение единственно.*

Доказательство. Из теоремы 6 следует, что задача Дирихле (6) на графе G_φ равносильна следующей задаче Дирихле на вспомогательном графе $G'(X',U',f')$:

$$\begin{cases}\Delta_p\widetilde{g}(x_j)=0, & x_j\in intG';\\ \widetilde{g}(x_j)=h(x,j), & x_j\in\partial G'.\end{cases}\quad. \tag{7}$$

Поскольку исходный граф не имеет бесконечных компонент сильной связности и его конденсация прогрессивно конечна, значит, и вспомогательный граф обладает такими же свойствами. Это следует из правил построения вспомогательного графа.

Для дальнейшего доказательства будем использовать подход, рассмотренный в [8] и [9].

Обозначим через $G'_1(X'',U'',f'')$ конденсацию вспомогательного графа G'. Поскольку G'_1 прогрессивно конечный, то порядковая функция существует на всем множестве X'' (см. [10]). Доказательство существования и единственности задачи Дирихле (7) проведем методом трансфинитной индукции, взяв в качестве ее параметра порядок компонент сильной связности.

Поскольку компоненты сильной связности нулевого порядка совпадают с границей, то решение на этих компонентах определяется заданной функцией h. Поэтому, покажем, что решение задачи Дирихле существует и единственно для любой компоненты сильной связности первого порядка.

Рассмотрим на вспомогательном графе G' произвольную компоненту сильной связности K первого порядка. Отметим, что для каждой вершины $x \in intK$ имеет место равенство

$$\widetilde{g}(x) - \sum_{y \in \Gamma(x)} p(u_{xy}) \cdot \widetilde{g}(y) = 0.$$

Занумеруем вершины компоненты сильной связности K, будем считать, что $X_K = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $|X_K| = n$. Обозначим через $p_{ij} = p(u_{x_i x_j})$. Тогда последнее равенство соответствует следующей системе линейных алгебраических уравнений

$$g_i - \sum_{x_j \in \Gamma(x_i) \cap X_K} p_{ij} \cdot g_j = b_i \quad \forall\, i \in [1; n]_N, \tag{8}$$

где

$$b_i = \sum_{y \in \Gamma(x) \setminus X_K} p(x_i, y) \cdot \widetilde{g}(y). \tag{9}$$

Здесь мы разбили сумму на две части – по внутренним и по граничным вершинам –, и поскольку в правой части выражения для b_i все $g(x_j)$ $(= h(x, j))$ известны, следовательно, правая часть системы (8) определена однозначно.

Заметим, что основная матрица этой системы удовлетворяет условиям теоремы 11, а значит, столбцы этой матрицы образуют линейно независимую систему векторов. Таким образом, система уравнений (8) имеет единственное решение при любой правой части, которое является решением задачи Дирихле для компоненты сильной связности K. Следовательно, мы показали, что решение задачи Дирихле для всех компонент сильной связности первого порядка существует и единственно.

Предположим, что решение задачи Дирихле существует и единственно для всех компонент сильной связности порядка, меньшего числа α. Докажем, что для произвольной компоненты сильной связности порядка α решение задачи Дирихле существует и единственно.

Пусть K_α – компонента сильной связности порядка α. Для того, чтобы найти решение задачи Дирихле, необходимо решить систему линейных уравнений (8) для компоненты K_α. Поскольку вершины y в правой части (9) принадлежат компонентам сильной связности порядка, меньшего α, а т.к. в этих вершинах функция гармоническая, то по теореме 7 $\widetilde{g}(y) \leqslant \sup\limits_{z_j \in \partial G'} h(z, j)$. Из этого следует, что правая часть системы (8) для компоненты K_α определена однозначно.

Отметим, что и в этом случае основная матрица системы удовлетворяет условиям теоремы 11, следовательно, столбцы этой матрицы образуют линейно независимую систему векторов. Это означает, что система уравнений (8) для компоненты K_α имеет единственное решение.

Таким образом, мы показали, что решение задачи Дирихле для любой компоненты сильной связности порядка α существует и единственно. Значит, по методу трансфинитной индукции решение задачи Дирихле (7) существует и единственно во всей внутренности вспомогательного графа.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Ерусалимский Я.М., Скороходов В.А.* Общий подход к нестандартной достижимости на графах // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2005, Псевдодифференциальные уравнения и некоторые проблемы математической физики. — С. 64–67.

[2] *Басангова Е.О., Ерусалимский Я.М.* Алгоритм нахождения максимального потока в частично-ориентированной сети // Дискретные структуры и их приложения. — Элиста: КГУ, 1988. — С. 23–28.

[3] *Ерусалимский Я.М., Скороходов В.А., Кузьминова М.В., Петросян А.Г.* Графы с нестандартной достижимостью: задачи, приложения. — Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2009. — 195с.

[4] *Скороходов В.А.* Достижимость на графах с ограничением на прохождение по дугам и зависимостью весов дуг от времени // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2009. — № 6. — С. 14–17.

[5] *Скороходов В.А.* Потоки в сетях с меняющейся длительностью прохождения // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2011. — № 1. — С. 21–26.

[6] *Ерусалимский Я.М., Логвинов С.Ю.* Некоторые задачи достижимости на графах с ограничениями на прохождения по дугам // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 1996. — № 2(94). — С. 14–17.

[7] *Ерусалимский Я.М., Скороходов В.А.* Графы с вентильной достижимостью. Марковские процессы и потоки в сетях // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2003. — № 2. — С. 3–5.

[8] *Степовой Д.В.* Оператор Лапласа на конечных ориентированных графах // Азово-Черномор. гос. агроинж. акад. — Зерноград, 1996. — 12с. — Деп. в ВИНИТИ 27.09.96, № 2899.

[9] *Ерусалимский Я.М., Степовой Д.В.* Потенциальный оператор, функция Грина на ориентированных графах и некоторые их приложения в квантовой механике // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естестественные науки. — 2001, спецвыпуск. — С. 67–71.

[10] *Берж К.* Теория графов и ее применения. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1962. — 319с.

Скороходов В. А., доцент кафедры алгебры и дискретной математики факультета математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета, к.ф.-м.н., доцент
E-mail: pdvaskor@yandex.ru

Skorokhodov V. A., Ph.D. (Phys. & Math.) Associated Prof., Dept. of Algebra and Discrete Mathematics, Southern Federal University
E-mail: pdvaskor@yandex.ru