УДК 517.929

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ИМПУЛЬСНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ*

В. В. Обуховский, Г. Г. Петросян

Воронежский Государственный Педагогический Университет

Поступила в редакцию 28.12.2012 г.

Аннотация: в настоящей работе доказывается существование решения и компактность множества всех решений задачи Коши для функционально-дифференциального включения дробного порядка с бесконечным запаздыванием и импульсными характеристиками в банаховом пространстве. Статья состоит из введения и трех параграфов. Во введении обосновывается актуальность данной проблематики и излагается история вопроса. Во втором параграфе описывается постановка задачи. Третий параграф состоит из четырех подпунктов, в которых приводятся предварительные сведения. В последнем параграфе формулируется и доказывается основной результат работы (Теорема 4.1).

Ключевые слова: функционально-дифференциальное включение, дробная производная, задача Коши, бесконечное запаздывание, импульсная характеристика, мера некомпактности, неподвижная точка, уплотняющее мультиотображение.

Abstract: in this paper we prove the existence of a solution and the compactness of the solutions set of the Cauchy problem for functional differential inclusions of fractional order with infinite delay and impulsive characteristics in a Banach space.

Keywords: fractional derivative, differential inclusions, Cauchy problem, measure of noncompactness, fixed point, condensing multimap, the impulsive characteristics.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория дифференциальных уравнений дробного порядка берет свое начало от идей Лейбница и Эйлера, но лишь в последнее время интерес к этой тематике значительно усилился, благодаря интересным приложениям в различных разделах прикладной математики, физики, инженерии, биологии, экономики и др. (см., например, монографии [3], [4], [7], [9], [12], [16], [19], [21], [22], статьи [13], [15], [17] и др.).

В настоящей работе мы рассматриваем функционально-дифференциальные включения произвольного дробного порядка с бесконечным запаздыванием в банаховом пространстве. Следуя аксиоматическому подходу Хейла и Като [8], мы предполагаем, что распределенное бесконечное запаздывание принадлежит специальному функциональному пространству (см. также [10]).

Мы предполагаем также, что изучаемая в данной работе система содержит импульсные характеристики. Отметим, что импульсные дифференциальные уравнения и включения являются удобной моделью для описания динамических систем, подверженным скачкообразным изменениям своего состояния (см. монографии [5], [14], [18]).

* Работа поддержана грантами РФФИ 11-01-00328 и 12-01-00392.

В данной работе применяя теорию топологической степени уплотняющих многозначных отображений (см. [11]), мы доказываем (см. Теорему 4.1) существование решения и компактность множества решений задачи Коши для функционально-дифференциального включения дробного порядка с бесконечным запаздыванием и импульсными характеристиками в банаховом пространстве.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть E — банахово пространство. Для разбиения отрезка $[0, T]$ точками $0 < t_1 < \ldots < t_m < T$, $m \geqslant 1$ и функции $c : [0, T] \to E$ обозначим

$$c(t_k^+) = \lim_{h \to 0+} c(t_k + h), \quad c(t_k^-) = \lim_{h \to 0-} c(t_k + h),$$

для $1 \leqslant k \leqslant m$.

Для целого $N \geqslant 1$ и $\alpha \in (N-1, N]$, в работе изучается следующая задача Коши:

$$^C D^{\alpha} u(t) \in F(t, u_t, \nabla^N u(t)) \text{ п.в. } t \in [0, T] \setminus \{t_1, \ldots, t_m\}, \tag{1}$$

$$\nabla^N u(0) = U_0, \tag{2}$$

$$u(s) = \varphi(s), \quad s \in (-\infty, 0], \tag{3}$$

где $^C D^{\alpha}$ - дробная производная Капуто порядка α (см. Определение 3.2 ниже),

$$\nabla^N u(t) = (u(t), u^{'}(t), \ldots, u^{(N-1)}(t)),$$

и $F : [0, T] \times \mathcal{B} \times E^N \multimap E$ - мультиотображение с непустыми выпуклыми компактными значениями. Здесь $\mathcal{B}$ обозначает фазовое пространство бесконечных запаздываний (см. п. 3) и $u_t \in \mathcal{B}$ характеризует предысторию функции до момента $t \in [0, T]$, то есть $u_t(\theta) = u(t + \theta)$, $\quad \theta \in (-\infty, 0]$. Начальные данные $U_0 = (\widetilde{u^0}, \widetilde{u^1}, \ldots, \widetilde{u^{N-1}})$ заданы в E^N и начальная функция $\varphi \in \mathcal{B}$ такова, что $\varphi(0) = \widetilde{u^0}$.

Предполагается, что сужение искомой функции $u : (-\infty, T] \to E$ на $[0, T]$ принадлежит пространству $\mathcal{PC}^{N-1}([0, T]; E)$ функций $z : [0, T] \to E$, непрерывных вместе со своими производными $z^{'}, z^{''}, \ldots, z^{(N-1)}$(при $N = 1$ просто непрерывных) на $[0, T] \setminus \{t_1, \ldots, t_m\}$ и таких, что левые и правые пределы $z^{(j)}(t_k^-)$ и $z^{(j)}(t_k^+)$, $\quad 0 \leqslant j \leqslant N - 1, \quad 1 \leqslant k \leqslant m$, существуют и $z^{(j)}(t_k^-) = z^{(j)}(t_k)$. При $N = 1$, пространство $\mathcal{PC}^0([0, T]; E)$ будем обозначать просто $\mathcal{PC}([0, T]; E)$.

Нетрудно видеть, что пространство $\mathcal{PC}^{N-1}([0, T]; E)$, снабженное нормой

$$\|z\|_{\mathcal{PC}} = \|z\| + \|z^{'}\| + \ldots + \|z^{(N-1)}\|,$$

где в правой части равенства рассматриваются обычные нормы равномерной сходимости, является банаховым пространством и что классическое пространство $C^{N-1}([0, T]; E)$ является его замкнутым подпространством.

Для удобства обозначим $t_0 = 0, t_{m+1} = T$. Тогда для $z \in \mathcal{PC}^{N-1}([0, T]; E)$ обозначим $\widehat{z}_k \in C^{N-1}([t_k, t_{k+1}]; E)$, $k = 0, \ldots, m$ — функции заданные вместе со своими производными соотношениями: $\widehat{z}_k^{(j)}(t) = z_k^{(j)}(t)$, $t \in (t_k, t_{k+1}]$; $\widehat{z}_k^{(j)}(t_k) = z_k^{(j)}(t_k^+)$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$. Более того, для множества $D \subset \mathcal{PC}^{N-1}([0, T]; E)$ обозначим $\widehat{D}_k$, $k = 0, \ldots, m$ множества $\widehat{D}_k = \{\widehat{z}_k : z \in D\}$.

Нетрудно проверить следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Множество $D \subset \mathcal{PC}^{N-1}([0, T]; E)$ относительно компактно в $\mathcal{PC}^{N-1}([0, T]; E)$ тогда и только тогда, когда каждое множество $\widehat{D}_k$, $\quad k = 0, \ldots, m$ относительно компактно в $C^{N-1}([t_k, t_{k+1}]; E)$.*

Из данного предложения и классической теоремы Арцела-Асколи вытекает следующий критерий относительной компактности множества в пространстве $\mathcal{PC}^{N-1}([0,T];E)$.

Лемма 2.2. *Множество* $D \subset \mathcal{PC}^{N-1}([0,T];E)$ *относительно компактно в* $\mathcal{PC}^{N-1}([0,T];E)$ *тогда и только тогда, когда* D *и множества* $D^{(j)} = \left\{z^{(j)} : z \in D\right\}, \quad 1 \leqslant j \leqslant N-1$ *равностепенно непрерывны на каждом промежутке* $(t_k, t_{k+1}), \quad k = 0, \ldots, m$ *и множества* $D(t) = \left\{z(t) : z \in D\right\}, \ D^{(j)}(t) = \left\{z^j(t) : z \in D\right\}, \quad 1 \leqslant j \leqslant N-1$ *относительно компактны в* E *для* $t \in [0,T] \setminus \{t_1, \ldots, t_m\}$.

Наконец, будем полагать, что искомая функция и ее производные удовлетворяют в моменты $t_1, \ldots, t_m$ условиям импульсных воздействий:

$$\begin{gathered} u^{(j)}(t_k^+) = u^{(j)}(t_k) + \mathcal{I}_k^j(u^{(j)}(t_k)), \\ 0 \leqslant j \leqslant N-1, \quad k = 1, \ldots, m \end{gathered} \tag{4}$$

где $\mathcal{I}_k^j : E \to E$ - непрерывные импульсные функции.

3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

3.1. Дробные первообразная и производная

Определение 3.1. (см. например [19], [21]). *Дробной первообразной* порядка $\alpha \in (0,1)$ от функции $g \in L^1([0,T];E)$, называется функция $I_0^\alpha g$ следующего вида:

$$I_0^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s)\, ds,$$

где Γ — гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Определение 3.2. *Дробной производной Капуто* порядка $\alpha \in (N-1, N]$ от функции $g \in \mathcal{C}^N([0,T];E)$, называется функция $D_0^\alpha g$ следующего вида:

$$D_0^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(N-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{N-\alpha-1} g^{(N)}(s)\, ds.$$

Для определенных выше дробной первообразной и дробной производной имеют место следующие соотношения:

$$D_a^\alpha I_a^\alpha u(t) = u(t),$$

$$I_a^\alpha D_a^\alpha u(t) = u(t) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{u^{(n)}(a)}{n!} (t-a)^n.$$

3.2. Многозначные отображения

Пусть $\mathcal{E}$ - банахово пространство. Введем следующие обозначения:

$P(\mathcal{E}) = \{A \subseteq \mathcal{E} : A \neq \varnothing\}$ - множество всех непустых подмножеств $\mathcal{E}$.

$Pv(\mathcal{E}) = \{A \in P(\mathcal{E}) : A \text{ выпукло}\}$;
$K(\mathcal{E}) = \{A \in P(\mathcal{E}) : A \text{ компактно}\}$;
$Kv(\mathcal{E}) = \{Pv(\mathcal{E}) \cap K(\mathcal{E})\}$ - множество всех непустых компактных и выпуклых подмножеств $\mathcal{E}$.

Определение 3.3 (см. например [1], [11]). Пусть $(\mathcal{A}, \geqslant)$ — некоторое частично упорядоченное множество. Функция $\beta : \mathrm{P}(\mathcal{E}) \to \mathcal{A}$ называется *мерой некомпактности*(МНК) в $\mathcal{E}$, если для любого $\Omega \in \mathrm{P}(\mathcal{E})$ выполняется:

$$\beta(\overline{\mathrm{co}}\,\Omega) = \beta(\Omega),$$

где $\overline{\mathrm{co}}\,\Omega$ обозначает замыкание выпуклой оболочки Ω.

Мера некомпактности β называется:

1) *Монотонной*, если для любых $\Omega_0, \Omega_1 \in \mathrm{P}(\mathcal{E})$, из $\Omega_0 \subseteq \Omega_1$ следует, что $\beta(\Omega_0) \leqslant \beta(\Omega_1)$.

2) *Несингулярной*, если для любого $a \in E$ и любого $\Omega \in \mathrm{P}(\mathcal{E})$ выполнено $\beta(\{a\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$.

3) *Инвариантной относительно добавления компактного множества*, если для любого компактного множества $K \subset \mathcal{E}$ и любого $\Omega \in \mathrm{P}(\mathcal{E})$, $\beta(\{K\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$.

Если $\mathcal{A}$ — конус в банаховом пространстве, то β называется:

4) *Алгебраически полуаддитивной*, если для любых $\Omega_0, \Omega_1 \in \mathrm{P}(\mathcal{E}), \beta(\Omega_0 + \Omega_1) \leqslant \beta(\Omega_0) + \beta(\Omega_1)$.

5) *Правильной*, если для любого относительно компактного множества $\Omega \in \mathrm{P}(\mathcal{E}), \beta(\Omega) = 0$.

6) *Вещественной*, если $\mathcal{A}$ — множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ с естественным упорядочением.

Примером вещественной меры некомпактности, обладающей всеми выше перечисленными свойствами, является мера некомпактности Хаусдорфа $\chi(\Omega)$:

$$\chi(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0, \text{при которых } \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon\text{-сеть в } \mathcal{E}\ \}.$$

Отметим, что мера некомпактности Хаусдорфа удовлетворяет условию полуоднородности, т. е.:

$$\chi(\lambda\Omega) = |\lambda|\chi(\Omega),$$

для любого $\lambda \in \mathbb{R}$, и любого $\Omega \in \mathrm{P}(\mathcal{E})$.

Определение 3.4 (см. например [2], [11]). Пусть X - метрическое пространство. Многозначное отображение (мультиотображение) $\mathcal{F} : X \to P(\mathcal{E})$ называется:

(i) *полунепрерывным сверху*(п.н.с.), если $\mathcal{F}^{-1}(V) = \{x \in X : \mathcal{F}(x) \subset V\}$ - открытое подмножество X для любого открытого множества $V \subset \mathcal{E}$,

(ii) *замкнутым*, если график $\Gamma_{\mathcal{F}} = \{(x, y) : y \in \mathcal{F}(x)\}$ - замкнутое подмножество $X \times \mathcal{E}$,

(iii) *компактным*, если $\mathcal{F}(X)$ - относительно компактно в $\mathcal{E}$,

(iv) *квазикомпактным*, если сужение на любое компактное подмножество $A \subset X$ компактно.

Нам понадобятся в дальнейшем следующие утверждения (см. [11]).

Лемма 3.1. *Если $\mathcal{F} : X \to K(E)$ - замкнутое квазикомпактное мультиотображение, то оно п.н.с.*

Лемма 3.2. *Пусть X и Y — метрические пространства и $\mathcal{F} : X \to K(Y)$ — замкнутое квазикомпактное мультиотображение, тогда $\mathcal{F}$ - п.н.с.*

Определение 3.5 (см. [1], [11]). Мультиотображение $\mathcal{F} : X \subseteq \mathcal{E} \to K(\mathcal{E})$ называется *уплотняющим относительно МНК β* (β — уплотняющим), если для любого ограниченного множества $\Omega \subseteq X$ не являющегося относительно компактным выполнено:

$$\beta(F(\Omega)) \ngeqslant \beta(\Omega).$$

Пусть $D \subset \mathcal{E}$ — непустое замкнутое выпуклое подмножество $\mathcal{E}$, а $\mathcal{U}_D$ — непустое открытое подмножество D. Обозначим через $\overline{\mathcal{U}_D}$ и $\partial\mathcal{U}_D$ замыкание и границу $\mathcal{U}_D$ соответственно. Из теории топологической степени для уплотняющих мультиотображений вытекает следующая теорема (см. [11]).

Теорема 3.1. *Пусть $\mathcal{U}_D$ — открытая окрестность точки $a \in D$ и $\mathcal{F} : \overline{\mathcal{U}_D} \to Kv(D)$ — п.н.с. β — уплотняющее мультиотображение, удовлетворяющее граничному условию:*

$$x - a \notin \lambda(\mathcal{F}(x) - a)$$

для всех $x \in \partial\mathcal{U}_D$ и $0 < \lambda \leqslant 1$. Тогда множество неподвижных точек $\mathcal{F}$: $\mathrm{Fix}\,\mathcal{F} := \{x : x \in \mathcal{F}(x)\}$ — непустое компактное множество.

3.3. Измеримые мультифункции

Напомним некоторые понятия (см., например, [2], [11]). Пусть E — банахово пространство.

Определение 3.6. Мультифункция $G : [0,T] \to K(E)$, для $p \geqslant 1$, называется:

• L^p — *интегрируемой*, если она допускает L^p — интегрируемое сечение по Бохнеру, т.е. существует функция $g \in L^p([0,T]; E)$, такая, что $g(t) \in G(t)$ для п. в. $t \in [0,T]$;

• L^p — *интегрально ограниченной*, если существует функция $\xi \in L^p([0,T])$ такая, что:

$$\|G(t)\| := sup\,\{\|g\|_E : g \in G(t)\} \leqslant \xi(t)$$

для п. в. $t \in [0,T]$.

Множество всех L^p — интегрируемых сечений мультифункции $G : [0,T] \to K(E)$ обозначается $\mathcal{S}^p_G$.

Мультифункция G называется измеримой, если $G^{-1}(V)$ измеримо (относительно меры Лебега на отрезке $[0,T]$) для любого открытого подмножества $V \subset E$. Мультифункция G называется сильно измеримой, если существует последовательность ступенчатых мультифункций $G_n : [0,T] \to K(E)$ такая, что:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}(G_n(t), G(t)) = 0,$$

для п. в. $t \in [0,T]$, где $\mathcal{H}$ - хаусдорфова метрика в $K(E)$.

Отметим, что в случае сепарабельного пространства E, понятия измеримой и сильно измеримой мультифункции совпадают. Если G сильно измерима и L^p — интегрально ограничена, то она L^p — интегрируема. Для L^p-интегрируемой мультифункции G определен многозначный интеграл

$$\int\limits_0^t G(s)ds := \left\{ \int\limits_0^t g(s)ds : g \in \mathcal{S}^p_G \right\},$$

для любого $t \in [0,T]$.

Лемма 3.3. (см. [11], Теорема 4.2.3) *Пусть E — сепарабельное банахово пространство. Пусть $G : [0,T] \to P(E)$ L^p — интегрируемая и L^p — интегрально ограниченная мультифункция такая, что*

$$\chi(G(t)) \leqslant q(t),$$

для п. в. $t \in [0,T]$, где $q \in L^p_+([0,T])$. Тогда

$$\chi(\int\limits_0^t G(s)ds) \leqslant \int\limits_0^t q(s)ds,$$

для всех $t \in [0,T]$. В частности, если мультифункция $G : [0,T] \to K(E)$ измерима и L^p - интегрально ограничена, то функция $\chi(G(\cdot))$ интегрируема, причем:

$$\chi(\int\limits_0^t G(s)ds) \leqslant \int\limits_0^t \chi(G(s))ds,$$

для всех $t \in [0, T]$.

3.4. Фазовое пространство

Мы будем использовать слегка модифицированное понятие фазового пространства $\mathcal{B}$, введенное Хейлом и Като (см. [8], [10]). Полагаем, что $\mathcal{B}$ — линейное пространство с полунормой $|\cdot|_{\mathcal{B}}$, состоящее из функций, отображающих $(-\infty; 0]$ в E и удовлетворяющих нижеследующим аксиомам.

Если функция $v : (-\infty; T] \to E$ такова, что $v|_{[0,T]} \in \mathcal{PC}([0, T]; E)$ и $v_0 \in \mathcal{B}$, то

($\mathcal{B}_1$) $v_t \in \mathcal{B}$ для всех $t \in [0, T]$,

($\mathcal{B}_2$) функция $t \mapsto v_t$ непрерывна на $[0, T] \setminus \{t_1, \ldots, t_m\}$,

($\mathcal{B}_3$) $|v_t|_{\mathcal{B}} \leqslant K(t) sup \{\|v(s)\|_E : 0 \leqslant s \leqslant t\} + M(t) |v_0|_{\mathcal{B}}$, где $M, K : [0, T] \to [0, \infty)$, $K(\cdot)$ — непрерывно, $M(\cdot)$ — ограничено и эти функции не зависят от v.

Мы можем рассмотреть следующие примеры фазовых пространств удовлетворяющих всем вышеперечисленным свойствам.

Для $r > 0$ обозначим через $\mathcal{C}([-r, 0]; E)$ пространство всех кусочно-непрерывных функций $\psi : [-r, 0] \to E$ с конечным набором точек разрыва $\{t_*\}$ на интервале $[-r, 0]$, таких что все значения $\psi(t_*^-)$ и $\psi(t_*^+)$ конечны. Рассматривая $\mathcal{C}([-r, 0]; E)$ как подпространство пространства всех измеримых функций, мы можем рассматривать его как нормированное пространство с нормой:

$$\|\psi\|_{\mathcal{C}([-r,0];E)} = \int_{-r}^{0} \|\psi(\tau)\| \, d\tau.$$

Пример 1. Для некоторого $\nu > 0$, пусть $\mathcal{B} = PC_\nu$ — пространство функций $\psi : (-\infty, 0] \to E$, таких, что:

(i) $\psi|_{[-r,0]} \in \mathcal{C}([-r, 0]; E)$ для всех $r > 0$;

(ii) интеграл $\int_{-\infty}^{0} e^{\nu\theta} \|\psi(\theta)\| \, d\theta$ конечен.

Тогда мы можем положить:

$$|\psi|_{\mathcal{B}} = \int_{-\infty}^{0} e^{\nu\theta} \|\psi(\theta)\| \, d\theta.$$

Пример 2. (Пространство с "затухающей памятью") Пусть $\mathcal{B} = PC_\rho$ — пространство функций $\psi : (-\infty, 0] \to E$, таких, что:

(a) $\psi \in \mathcal{C}([-r, 0]; E)$ для некоторого $r > 0$;

(b) ψ интегрируема по Лебегу на $(-r, 0]$ и существует положительная измеримая по Лебегу функция $\rho : (-\infty, -r) \to \mathbb{R}_+$, такая, что $\rho\psi$ интегрируема по Лебегу на $(-\infty, -r)$; более того, существует локально ограниченная функция $P : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}_+$, такая, что для всех $\xi \leqslant 0$, $\quad \rho(\xi + \theta) \leqslant P(\xi)\rho(\theta)$ для п. в. $\theta \in (-\infty, -r)$. Тогда определим

$$|\psi|_{\mathcal{B}} = \int_{-\infty}^{-r} \rho(\theta) \|\psi(\theta)\| \, d\theta + \int_{-r}^{0} \|\psi(\tau)\| \, d\tau.$$

Простой пример такого пространства задается функциями $\rho = e^{\mu\theta}, \quad \mu \in \mathbb{R}$.

4. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ

Пусть E — банахово пространство. Обозначим $I = [0,T] \setminus \{t_1, \ldots, t_m\}$. Рассмотрим мультиоператор $F : I \times \mathcal{B} \times E^N \to Kv(E)$, удовлетворяющий следующим условиям.

$(F1)$ Мультифункция $F(\cdot, \vartheta, u) : [0,T] \to Kv(E)$ допускает сильно измеримое сечение для всех $(\vartheta, u) \in \mathcal{B} \times E^N$;

$(F2)$ Мультиотображение $F(t, \cdot, \cdot) : \mathcal{B} \times E^N \to Kv(E)$ - п.н.с. для п. в. $t \in I$;

$(F3)$ Существует функция $w \in L^p([0,T])$, $\quad p > \frac{1}{\alpha - N + 1}$, такая, что:

$$\|F(t, \vartheta, u)\| := sup\{\|f\|_E : f \in F(t, \vartheta, u)\} \leqslant w(t)(1 + |\vartheta|_{\mathcal{B}} + \|u\|_{E^N}), \text{п. в.} \quad t \in I,$$

для всех $(\vartheta, u) \in \mathcal{B} \times E^N$.

Пусть $\mathcal{C}_E(-\infty; T]$ - линейное пространство функций $u : (-\infty; T] \to E$, таких, что $u_0 \in \mathcal{B}$ и $\overline{u} = u|_{[0,T]} \in \mathcal{PC}^{N-1}([0,T]; E)$, с полунормой:

$$\|u\|_{\mathcal{C}_E(-\infty;T]} = |u_0|_{\mathcal{B}} + \|\overline{u}\|_{\mathcal{PC}}.$$

Для $u \in \mathcal{C}_E(-\infty; T]$ рассмотрим мультифункцию:

$$\Phi_F : [0,T] \to Kv(E),\ \Phi_F(t) = F(t, u_t, \nabla^N u(t)).$$

Ясно, что функции $t \in [0,T] \to u_t \in \mathcal{B}$ и $\nabla^N u : [0,T] \to E^N$ кусочно-непрерывны. Тогда (см., например, [2], Теорема 1.5.22) мультифункция Φ_F, является L^p-интегрируемой.

Пусть $\mathcal{P}_F : \mathcal{C}_E(-\infty; T] \multimap L^p([0,T]; E)$ — *суперпозиционный мультиоператор,* заданный следующим образом:

$$\mathcal{P}_F(u) = \mathcal{S}^p_{\Phi_F}.$$

Следуя [2], Теорема 1.5.30 и Замечание 1.5.32, можно установить следующее свойство замкнутости суперпозиционного мультиоператора.

Лемма 4.1. *Пусть $\{u_n\}$ — последовательность в $\mathcal{C}_E(-\infty; T]$, сходящаяся к $u^* \in \mathcal{C}_E(-\infty; T]$. Предположим, что существует последовательность $\{\varphi_n\} \subset L^p([0,T]; E)$, $\quad \varphi_n \in \mathcal{P}_F(u_n)$ слабо сходящаяся к функции φ^*, тогда $\varphi^* \in \mathcal{P}_F(u^*)$.*

Наложим на мультифункцию F следующее условие регулярности, выраженное в терминах мер некомпактности:

$(F4)$ Существует функция $\mu \in L^p([0,T])$ такая, что для любых ограниченых множеств $\Omega \subset \mathcal{B}$ и $Q_j \subset E$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$, мы имеем:

$$\chi(F(t, \Omega, \prod_{j=0}^{N-1} Q_j)) \leqslant \mu(t)(\psi(\Omega) + \sum_{j=0}^{N-1} \chi(Q_j)), \text{п. в.} \quad t \in I,$$

где χ - мера некомпактности Хаусдорфа в E, $\psi(\Omega) = \sup_{\theta \leqslant 0} \chi(\Omega(\theta))$; $\quad \Omega(\theta) = \{q(\theta), q \in \Omega\}$.

Нетрудно видеть, что в случае когда пространство E конечномерно, условие $(F4)$ вытекает из $(F3)$.

Если $\dim(E) = +\infty$, то частным случаем выполнения условия $(F4)$ является ситуация, когда мультиотображение $F(t, \cdot, \cdot) : \mathcal{B} \times E^N \to Kv(E)$ — вполне полунепрерывно сверху для п. в. $t \in [0,T]$, т.е. оно п.н.с. и преобразует каждое ограниченное множество в относительно компактное.

На импульсные функции $\mathcal{I}_k^j$ мы наложим следующие условия:

$(\mathcal{I}1)$ функции $\mathcal{I}_k^j : E \to E$, $1 \leqslant k \leqslant m$, $\quad 0 \leqslant j \leqslant N-1$, являются вполне непрерывными.

($\mathcal{I}2$) функции $\mathcal{I}_k^j$, $1 \leqslant k \leqslant m$, $0 \leqslant j \leqslant N-1$, являются глобально ограниченными, т. е. существует такое $\mathcal{N} > 0$, что $\left\|\mathcal{I}_k^j x\right\| \leqslant \mathcal{N}$ для всех $x \in E$.

Определение 4.1. *Интегральным решением* на $(-\infty, T]$ задачи (1)-(4), называется функция $u \in \mathcal{C}_E(-\infty, T]$ вида:

$$u(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in (-\infty, 0]; \\ \sum\limits_{j=0}^{N-1} \frac{t^j}{j!}\left(\widetilde{u^{(j)}} + \sum_{t_k<t} \mathcal{I}_k^j(u^{(j)}(t_k))\right) & \\ +\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}\varphi(s)ds,\ t \in [0,T], & \end{cases}$$

где $\varphi \in \mathcal{P}_F(u)$.

Для нахождения интегральных решений задачи (1)–(4), рассмотрим отображение

$$S : L^p([0,T];E) \to C^{N-1}([0,T];E),$$

$$S(\varphi)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}\varphi(s)ds.$$

Рассмотрим мультиоператор $\mathcal{G} : \mathcal{C}_E(-\infty, T] \multimap \mathcal{C}_E(-\infty, T]$, заданный следующим образом:

$$\mathcal{G}(u) = g(u) + S \circ \mathcal{P}_F(u),$$

где

$$g(u)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in (-\infty, 0]; \\ \sum\limits_{j=0}^{N-1} \frac{t^j}{j!}\left(\widetilde{u^{(j)}} + \sum\limits_{t_k<t} \mathcal{I}_k^j(u^{(j)}(t_k))\right), & t \in [0,T]. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что функция $u \in \mathcal{C}_E(-\infty; T]$ — интегральное решение задачи (1)–(4) на интервале $(-\infty; T]$, тогда и только тогда, когда она является неподвижной точкой мультиоператора $\mathcal{G}$. Нашей задачей является показать, что $\mathcal{G}$ имеет неподвижную точку.

С этой целью рассмотрим сужение оператора $\mathcal{G}$ на выпуклое замкнутое подмножество $\mathcal{D} \subset \mathcal{PC}^{N-1}([0,T];E)$, определенное как

$$\mathcal{D} = \left\{v \in \mathcal{PC}^{N-1}([0,T];E),\ \nabla^N u(0) = U_0\right\},$$

полагая $\mathcal{G}(v) = \mathcal{G}(v[\varphi])$, где

$$v[\varphi](t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in (-\infty, 0]; \\ v(t), & t \in (0,T]. \end{cases}$$

Для исследования свойств мультиоператора $\mathcal{G}$ изучим совокупность операторов S^j : $L^p([0,T];E) \to C([0,T];E)$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$, полагая $S^0 = S$ и

$$S^j(\varphi)(t) = \frac{d^j}{dt^j}S(\varphi)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - j)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-j-1}\varphi(s)ds$$

для $1 \leqslant j \leqslant N-1$.

Лемма 4.2. *Операторы S^j, $j = 0, 1, \ldots, N-1$ обладают следующими свойствами:*

(S_1) *существуют константы* C_j, $j = 0, 1, \ldots, N-1$ *такие, что:*

$$\left\| S^j(\xi)(t) - S^j(\eta)(t) \right\|_E^p \leqslant C_j^p \int\limits_0^t \|\xi(s) - \eta(s)\|_E^p \, ds, \quad \xi, \eta \in L^p([0,T]).$$

(S_2) *для каждого компактного множества* $K \subset E$ *и последовательности* $\{\xi_n\} \subset L^p([0,T];E)$ *такой, что* $\{\xi_n(t)\} \subset K$ *для п. в.* $t \in [0,T]$, *слабая сходимость* $\xi_n \rightharpoonup \xi_0$, *влечет сходимость* $S^j(\xi_n) \to S^j(\xi_0)$ *в* $C([0,T];E)$.

Доказательство. (S_1) Используя неравенство Гельдера, мы имеем:

$$\left\| S^j(\xi)(t) - S^j(\eta)(t) \right\|_E \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha - j)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha - j - 1} \|\xi(s) - \eta(s)\|_E \, ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha - j)} \left[\int\limits_0^t (t-s)^{(\alpha - j - 1)p/p-1} ds \right]^{\frac{p-1}{p}} \left[\int\limits_0^t \|\xi(s) - \eta(s)\|_E^p \, ds \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда

$$\left\| S^j(\xi)(t) - S^j(\eta)(t) \right\|_E^p \leqslant C_j^p \int\limits_0^t \|\xi(s) - \eta(s)\|_E^p \, ds,$$

где

$$C_j = \left[\frac{p-1}{(\alpha - j)p - 1} \right]^{\frac{p-1}{p}} \frac{T^{\alpha - j - \frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha - j)}.$$

Отметим, что $(\alpha - j)p - 1 > 0, \quad j = 0, \ldots, N-1$, поскольку $p > \frac{1}{\alpha - N + 1}$.

(S_2) Заметим, что без ограничения общности можно считать $\{\xi_n(t)\} \subset E'$ для всех $t \in [0,T]$, где $E' = \overline{spK}$ - сепарабельное банахово пространство, являющееся замыканием линейной оболочки компактного множества K. Более того, ясно, что $\left\{ S^j(\xi_n)(t) \right\} \subset E'$ для всех $t \in [0,T]$ и $j = 0, \ldots, N-1$. Тогда, применяя Лемму 3.3, мы получим:

$$\chi\left(\left\{ S^j(\xi_n)(t) \right\} \right) \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha - j)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha - j - 1} \chi\left(\{\xi_n(s)\} \right) ds = 0.$$

Это означает, что последовательность $\left\{ S^j(\xi_n)(t) \right\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ относительно компактна для каждого $t \in [0,T]$.

С другой стороны, мы имеем для любых $0 \leqslant t' < t'' \leqslant T$:

$$\left\| S^j(\xi_n)(t'') - S^j(\xi_n)(t') \right\|_E = \frac{1}{\Gamma(\alpha - j)} \left\| \int\limits_0^{t''} (t'' - s)^{\alpha - j - 1} \xi_n(s) ds - \int\limits_0^{t'} (t' - s)^{\alpha - j - 1} \xi_n(s) ds \right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha - j)} \left\| \int\limits_{t'}^{t''} (t'' - s)^{\alpha - j - 1} \xi_n(s) ds \right\|_E + \frac{1}{\Gamma(\alpha - j)} \left\| \int\limits_0^{t'} \left[(t'' - s)^{\alpha - j - 1} - (t' - s)^{\alpha - j - 1} \right] \xi_n(s) ds \right\|_E.$$

Поскольку $\{\xi_n(s)\} \subset K$ для п. в. $s \in [0,T]$, правая часть последнего неравенства стремится к 0 при $t'' \to t'$ равномерно относительно n. Поэтому последовательность $\left\{S^j(\xi_n)\right\}$ равностепенно непрерывна. Из теоремы Арцела-Асколи мы получаем, что последовательность $\left\{S^j(\xi_n)\right\} \subset C([0,T];E)$ относительно компактна.

Из свойства (S_1) вытекает, что каждое $S^j : L^p([0,T];E) \to C([0,T];E)$ — ограниченный линейный оператор. Тогда эти операторы непрерывны относительно топологии слабой секвенциальной сходимости, то есть слабая сходимость $\xi_n \rightharpoonup \xi_0$ влечет $S^j(\xi_n) \rightharpoonup S^j(\xi_0)$. Поскольку последовательность $\left\{S^j(\xi_n)\right\}$ относительно компактна, мы приходим к заключению, что $S^j(\xi_n) \to S^j(\xi_0)$ в $C([0,T];E)$. Лемма доказана.

Нам понадобится следующий технический результат, доказательство которого может быть проведено по схеме Теоремы 4.2.1, Следствия 4.2.1 и Замечаний 4.2.1 и 4.2.2 из [11].

Лемма 4.3. *Пусть последовательность функций* $\{\xi_n\} \subset L^p([0,T];E)$ *является* L^p *- интегрально ограниченной, т.е.*

$$\|\xi_n(t)\|_E \leqslant \nu(t) \text{ для всех } n = 1,2,\ldots \text{ и п.в. } t \in [0,T],$$

где $\nu \in L^p([0,T])$. *Предположим, что*

$$\chi(\{\xi_n(t)\}) \leqslant q(t)$$

для п. в. $t \in [0,T]$, *где* $q \in L^p([0,T])$. *Тогда для любого* $\delta > 0$ *существует компактное множество* $K_\delta \subset E$ *и множество* $m_\delta \subset [0,T]$, *с Лебеговой мерой* $(m_\delta) < \delta$, *а также последовательность функций* $G_\delta \subset L^p([0,T];E)$ *со значениями в* K_δ, *такие, что для каждого* $n \geqslant 1$ *существует функция* $b_n \in G_\delta$, *для которой*

$$\|\xi_n(t) - b_n(t)\|_E \leqslant 2q(t) + \delta, \quad t \in [0,T] \setminus m_\delta.$$

Более того, последовательность $\{b_n\}$ *может быть выбрана так, что* $b_n \equiv 0$ *на* m_δ *и эта последовательность слабо компактна.*

Используя этот результат, докажем следующее утверждение.

Лемма 4.4. *Пусть последовательность функций* $\{\xi_n\} \subset L^p([0,T];E)$ *удовлетворяет условиям Леммы 4.3. Тогда мы имеем:*

$$\chi\left(\left\{S^j(\xi_n)(t)\right\}\right) \leqslant 2C_j \left(\int\limits_0^t |q(s)|^p\, ds\right)^{\frac{1}{p}}, \quad j = 0,1,\ldots,N-1,$$

для всех $t \in [0,T]$.

Доказательство. Мы проведем доказательство следуя Теореме 4.2.2 из [11]. Для $\varepsilon > 0$ подберем $\delta \in (0,\varepsilon)$, такое, что для всех $m \subset [0,T]$, с мерой $(m) < \delta$, мы имеем:

$$\int\limits_m |\nu(s)|^p < \varepsilon.$$

Беря m_δ и b_n соответствующие $\{\xi_n\}$ из Леммы 4.3, мы используя Лемму 4.2 получаем, что последовательность $\left\{S^j(b_n)\right\}$, $j = 0,\ldots,N-1$ — относительно компактна в $C([0,T];E)$. Более того

$$\left\|S^j(\xi_n)(t) - S^j(b_n)(t)\right\|_E^p \leqslant C_j^p \int\limits_0^t \|\xi_n(s) - b_n(s)\|_E^p\, ds \leqslant$$

$$\leqslant C_j^p \int\limits_{[0,t]\setminus m_\delta} \|\xi_n(s)-b_n(s)\|_E^p\,ds + C_j^p \int\limits_{[0,t]\cap m_\delta} \|\xi_n(s)\|_E^p\,ds \leqslant$$

$$\leqslant C_j^p \int\limits_{[0,t]\setminus m_\delta} [2q(s)-\delta]^p\,ds + C_j^p \int\limits_{m_\delta} |\nu(s)|^p\,ds \leqslant C_j^p \left(\int\limits_0^t |2q(s)+\varepsilon|^p\,ds + \varepsilon \right).$$

Поэтому относительно компактное множество $S^jG_\delta(t)$ является $C_j\left(\int\limits_0^t |2q(s)+\varepsilon|^p\,ds+\varepsilon\right)^{1/p}$ - сетью для множества $\left\{S^j(\xi_n)(t)\right\}$. Это и доказывает лемму, в силу произвольности $\varepsilon > 0$. Лемма доказана.

Определение 4.2.(см. [11]) Последовательность функций $\{\xi_n\} \subset L^p([0,T];E)$ называется *полукомпактной*, если она L^p - интегрально ограничена и множество $\{\xi_n(t)\}$ относительно компактно в E для п. в. $t \in [0,T]$.

Лемма 4.5. *Пусть $\{\xi_n\}$ — полукомпактная последовательность в $L^p([0,T];E)$. Тогда $\{\xi_n\}$ слабо компактна в $L^p([0,T];E)$ и для каждого $0 \leqslant j \leqslant N-1$, множество $\left\{S^j(\xi_n)\right\}$ — относительно компактно в $C([0,T];E)$. Более того, если $\xi_n \rightharpoonup \xi_0$, то $S^j(\xi_n) \to S^j(\xi_0)$.*

Доказательство. Слабая компактность $\{\xi_n\}$ в $L^p([0,T];E)$ является следствием результата [6] (Следствие 3.4). Поскольку $\{\xi_n(t)\}$ относительно компактно в E для п. в. $t \in [0,T]$, то из Леммы 4.4 следует, что для каждого $j = 0,\ldots,N-1$, последовательность $\left\{S^j(\xi_n)(t)\right\}$ — относительно компактна в E для п. в. $t \in [0,T]$.

С другой стороны, из Определения 4.2 следует, что существует функция $\nu \in L^p(0,T)$, такая, что:

$$\|\xi_n(t)\| \leqslant \nu(t),$$

для всех $n = 1,2,\ldots$ и $t \in [0,T]$.

Благодаря неравенству Гельдера, мы имеем для любых $0 \leqslant t' < t'' \leqslant T$:

$$\left\|S^j(\xi_n)(t'') - S^j(\xi_n)(t')\right\|_E = \frac{1}{\Gamma(\alpha-j)} \left\| \int\limits_0^{t''} (t''-s)^{\alpha-j-1}\xi_n(s)ds - \int\limits_0^{t'} (t'-s)^{\alpha-j-1}\xi_n(s)ds \right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha-j)} \left\| \int\limits_{t'}^{t''} (t''-s)^{\alpha-j-1}\xi_n(s)ds \right\|_E + \frac{1}{\Gamma(\alpha-j)} \left\| \int\limits_0^{t'} \left[(t''-s)^{\alpha-j-1} - (t'-s)^{\alpha-j-1}\right]\xi_n(s)ds \right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha-j)} \left(\int\limits_{t'}^{t''} (t''-s)^{(\alpha-j-1)p'}ds \right)^{1/p'} \left(\int\limits_{t'}^{t''} |\nu(s)|^p\,ds \right)^{1/p} +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha-j)} \left(\int\limits_0^{t'} \left[(t''-s)^{\alpha-j-1} - (t'-s)^{\alpha-j-1}\right]^{p'} ds \right)^{1/p'} \left(\int\limits_0^{t'} |\nu(s)|^p\,ds \right)^{1/p},$$

где p' сопряжено p. Последнее неравенство влечет равностепенную непрерывность $\left\{S^j(\xi_n)\right\}$ в $C([0,T];E)$, и следовательно относительную компактность в $C([0,T];E)$. Окончательное заключение справедливости леммы получается так же как и в доказательстве Леммы 4.2. Лемма доказана.

Лемма 4.6. *При выполнении условий* $(F1)-(F4)$ *и* $(\mathcal{I}1)-(\mathcal{I}2)$, *мультиоператор*

$$\mathcal{G}=g+S\circ\mathcal{P}_F$$

замкнутый, с компактными значениями.

Доказательство. В силу того, что оператор g, очевидно, вполне непрерывен, утверждение теоремы достаточно доказать для мультиоператора $S\circ\mathcal{P}_F$. Пусть $\{v_n\}$ — последовательность в $\mathcal{D}$ такая, что $v_n\to v^*\in\mathcal{D}$. Будем считать, что $\xi_n\in\mathcal{P}_F(v_n[\varphi])$ и $z_n=S(\xi_n)\in S(\mathcal{P}_F(v_n[\varphi]))$, $\quad z_n\to z^*$ в $\mathcal{PC}^{N-1}([0,T];E)$. Докажем, что $z^*\in S(\mathcal{P}_F(v^*[\varphi]))$.

Так как

$$\{\xi_n(t)\}\subset F(t,(v_n[\varphi])_t,\nabla^N v_n(t)),\text{для п.в. } t\in[0,T],$$

то согласно условию $(F3)$, последовательность $\{\xi_n\}$ — интегрально ограничена и из $(F4)$ следует, что:

$$\chi\left(\{\xi_n(t)\}\right)\leqslant\mu(t)\left(\psi(\{(v_n[\varphi])_t\})+\sum_{j=0}^{N-1}\chi(\left\{v_n^{(j)}(t)\right\})\right)\text{ для п.в. } t\in[0,T].$$

Для каждого $j=0,1,\ldots,N-1$, последовательность $\left\{v_n^{(j)}\right\}$ сходится в $\mathcal{PC}^{N-1}([0,T];E)$, поэтому $\chi(\left\{v_n^{(j)}(t)\right\})=0$ для $t\in[0,T]$.

С другой стороны

$$\psi(\{(v_n[\varphi])_t\})=\sup_{\theta\leqslant 0}\chi(\{(v_n[\varphi](t+\theta))\})\leqslant\sup_{s\in[0,T]}\chi(\{(v_n(s))\})=0.$$

Следовательно $\chi(\{\xi_n(t)\})=0$ для п. в. $t\in[0,T]$, и последовательность $\{\xi_n\}$ — полукомпактная. Из Леммы 4.5 следует, что мы можем предположить, без ограничения общности, существование $\xi^*\in L^p([0,T];E)$ такого, что $\xi_n\rightharpoonup\xi^*$ и $z_n=S(\xi_n)\to S(\xi^*)=z^*$.

По Лемме 4.1, мы получаем, что $\xi^*\in\mathcal{P}_F(v^*[\varphi])$ и поэтому $z^*=S(\xi^*)\in S(\mathcal{P}_F(v^*[\varphi]))$.

Нам остается показать, что для $v\in\mathcal{D}$ и $\{\xi_n\}$ выбраного в $\mathcal{P}_F(v[\varphi])$, последовательность $\{S(\xi_n)\}$ относительно компактна в $C^{N-1}([0,T];E)$. Свойства $(F3)-(F4)$ влекут полукомпактность $\{\xi_n\}$. По Лемме 4.5, мы имеем, что последовательности $S^j(\xi_n)$, $j=0,1,\ldots,N-1$, — относительно компактны в $C([0,T];E)$. Значит последовательности $S^j(\xi_n)$, $j=0,1,\ldots,N-1$ — относительно компактны в $C^{N-1}([0,T];E)$. Лемма доказана.

Лемма 4.7. *Мультиоператор* $\mathcal{G}$ *— п.н.с.*

Доказательство. Используя Лемму 3.2 и Лемму 4.6, достаточно доказать, что $\mathcal{G}$ — квазикомпактное мультиотображение. Снова используя полную непрерывность g, сведем проверку к мультиоператору $S\circ\mathcal{P}_F$. Пусть $A\subset\mathcal{D}$ — компактное множество, докажем, что $S\circ\mathcal{P}_F(A)$ — относительно компактное подмножество $C^{N-1}([0,T];E)$. Предположим, что $\{z_n\}\subset S\circ\mathcal{P}_F(A)$, тогда $z_n=S(\xi_n)$, где $\xi_n\in\mathcal{P}_F(v_n[\varphi])$ для некоторой последовательности $v_n\subset A$. Согласно свойствам $(F3),(F4)$ последовательность ξ_n полукомпактна и, следовательно, слабо компактна в $L^p([0,T];E)$.

Согласно Лемме 4.5, последовательность z_n относительно компактна в $C^{N-1}([0,T];E)$. Лемма доказана.

Для доказательства уплотняемости мультиоператора $\mathcal{G}$, мы воспользуемся следующими мерами некомпактности в пространстве $C^{N-1}([0,T];E)$. Модифицированный модуль послойной некомпактности:

$$\gamma:P(C^{N-1}([0,T];E))\to\mathbb{R}_+,\quad\gamma(\Omega)=\sup_{t\in[0,T]}e^{-Lt}\sum_{j=0}^{N-1}\chi(\frac{d^j}{dt^j}\Omega(t)),$$

где $\frac{d^j}{dt^j}\Omega(t) := \left\{\frac{d^j}{dt^j}v(t); v \in \Omega\right\}$, а константа L выбрана так, что:

$$l := 4\sum_{j=0}^{N-1} C_j \sup_{t\in[0,T]} \left(\int_0^t e^{-Lp(t-s)}\mu^p(s)ds\right)^{1/p} < 1,$$

где $\mu(\cdot)$ - функция из условия $(F4)$.

Модуль равностепенной непрерывности:

$$mod_C : P(C^{N-1}([0,T];E)) \to \mathbb{R}_+,$$

$$mod_C(\Omega) = \lim_{\delta\to 0}\sup_{v\in\Omega}\max_{0\leqslant j\leqslant N-1}\max_{|t_1-t_2|<\delta}\left\|v^{(j)}(t_1) - v^{(j)}(t_2)\right\|.$$

Теперь введем векторную меру некомпактности $\nu(\Omega)$:

$$\nu : P(C^{N-1}([0,T];E)) \to \mathbb{R}^2_+,$$

со значениями в конусе $\mathbb{R}^2_+$, заданную как

$$\nu(\Omega) = \max_{D\in\Delta(\Omega)}(\gamma(D), mod_C(D)),$$

где $\Delta(\Omega)$ — совокупность всех счетных подмножеств Ω и максимум берется в смысле частичного порядка в $\mathbb{R}^2_+$.

Лемма 4.8. *Мультиоператор $\mathcal{G} : \mathcal{D} \to K(\mathcal{D})$ является ν - уплотняющим.*

Доказательство. Из полной непрерывности оператора g и свойств монотонности, алгебраической полуаддитивности и правильности меры некомпактности ν следует, что нам достаточно проверить свойство уплотняемости лишь для мультиоператора $S \circ \mathcal{P}_F$. Пусть $\Omega \subset \mathcal{D}$ такое, что:

$$\nu(S \circ \mathcal{P}_F(\Omega)) \geqslant \nu(\Omega) \tag{3.1}$$

Докажем, что Ω - относительно компактно. Пусть $\nu(S \circ \mathcal{P}_F(\Omega))$ достигается на последовательности $\{z_n\} \subset S \circ \mathcal{P}_F(\Omega)$, то есть:

$$\nu(S \circ \mathcal{P}_F(\Omega)) = (\gamma(\{z_n\}), mod_C(\{z_n\})),$$

где $z_n = S(\xi_n), \quad \xi_n \in \mathcal{P}_F(v_n[\varphi]), \quad \{v_n\} \subset \Omega.$

Из (3.1) следует, что

$$\gamma(\{z_n\}) \geqslant \gamma(\{v_n\}). \tag{3.2}$$

Согласно $(F4)$,

$$\chi(\{\xi_n(s)\}) \leqslant \mu(s)\left(\psi(\{(v_n[\varphi])_s\}) + \sum_{j=0}^{N-1}\chi(\left\{v_n^{(j)}(s)\right\})\right),$$

для всех $s \in [0,T]$.

Мы имеем:

$$\psi(\{(v_n[\varphi])_s\}) = \sup_{\theta\leqslant 0}\chi(\{v_n[\varphi](s+\theta)\}) = \sup_{y\in[0,s]}\chi(\{v_n(y)\}).$$

Тогда

$$\chi(\{\xi_n(s)\}) \leqslant \mu(s)e^{Ls}\left(\sup_{y\in[0,s]} e^{-Ly}\chi(\{v_n(y)\}) + e^{-Ls}\sum_{j=0}^{N-1}\chi(\left\{v_n^{(j)}(s)\right\})\right) \leqslant 2e^{Ls}\mu(s)\gamma(\{v_n\}).$$

Из Леммы 4.4 следует, что

$$\chi(\{S^j(\xi_n(t))\}) \leqslant 4C_j \left(\int\limits_0^t e^{pLs} \mu^p(s) ds \right)^{1/p} \gamma(\{v_n\}), \tag{3.3}$$

для всех $t \in [0,T]$ и $j = 0, 1, \ldots, N-1$.

Заметив, что:

$$S^j(\xi_n)(t) = \frac{d^j}{dt^j} S(\xi_n)(t) = \frac{d^j}{dt^j} z_n(t) = z_n^{(j)}(t), \quad t \in [0,T],$$

мы имеем, используя оценку (3.3),

$$e^{-Lt} \sum_{j=0}^{N-1} \chi(\left\{ z_n^{(j)}(t) \right\}) \leqslant e^{-Lt} \sum_{j=0}^{N-1} \chi(\{S^j(\xi_n)(t)\}) \leqslant 4 \sum_{j=0}^{N-1} C_j \left(\int\limits_0^t e^{-Lp(t-s)} \mu^p(s) ds \right)^{1/p} \gamma(\{v_n\}).$$

Учитывая (3.2), мы приходим к следующей оценке:

$$\gamma(\{v_n\}) \leqslant \gamma(\{z_n\}) = \sup_{t \in [0,T]} e^{-Lt} \sum_{j=0}^{N-1} \chi(\left\{ z_n^{(j)}(t) \right\}) \leqslant l \gamma(\{v_n\}),$$

откуда $\gamma(\{v_n\}) = 0$, и, следовательно, $\gamma(\{z_n\}) = 0$. Далее,

$$\chi(\left\{ v_n^{(j)}(t) \right\}) = 0, \; j = 0, 1, \ldots, N-1, \quad t \in [0,T].$$

Снова применяя условия $(F3), (F4)$, мы получаем, что $\{\xi_n\}$ — полукомпактная последовательность. Используя Лемму 4.5, мы получаем относительную компактность последовательности $\{S^j(\xi_n)\}$ для всех $j = 0, 1, \ldots, N-1$ в $C([0,T]; E)$. Таким образом последовательность $\{z_n\}$ - относительно компактна в $C^{N-1}([0,T]; E)$, откуда $mod_C(\{z_n\}) = 0$.

Окончательно имеем $\nu(\{z_n\}) = \nu(\Omega) = (0,0)$. Лемма доказана.

Нам понадобится следующая модифицированная версия неравенства Беллмана-Гронуолла (см. [20]).

Лемма 4.9. *Пусть* $h(t), \quad q(t)$ *и* $y(t)$ *— неотрицательные, интегрируемые на* $[a,b]$ *функции, удовлетворяющие неравенству:*

$$y(t) \leqslant q(t) + \int\limits_a^t h(s) y(s) ds, t \in [a,b],$$

тогда выполняется следующее неравенство:

$$y(t) \leqslant q(t) + \int\limits_a^t exp \left\{ \int\limits_a^t h(\theta) d\theta \right\} h(s) q(s) ds, t \in [a,b].$$

Мы можем сформулировать теперь основной результат этой работы.

Теорема 4.1. *При выполнении условий* $(F1) - (F4)$ *и* $(\mathcal{I}1) - (\mathcal{I}2)$, *множество решений задачи (1)-(4) на* $\mathcal{C}_E(-\infty; T)$ *— непусто и компактно.*

Доказательство. Обозначим $u^* \in \mathcal{D}$ функцию

$$u^*(t) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{t^j}{j!} \widetilde{u^{(j)}}.$$

Покажем, что множество решений $u \in \mathcal{D}$ семейства включений

$$u - u^* \in \lambda(\mathcal{G}(u) - u^*), \quad 0 < \lambda \leqslant 1,$$

априори ограничено.

Применяя условие $(F3)$, мы получаем оценку для каждого $j = 0, 1, \ldots, N-1:$

$$\left\| \frac{d^j}{dt^j} u(t) - \frac{d^j}{dt^j} u^*(t) \right\|_E \leqslant \lambda \left\| \sum_{l=0}^{N-j-1} \frac{t^l}{l!} \left(\sum_{t_k < t} \mathcal{I}_k^l(u^{(l)}(t_k)) \right) \right\|_E + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha - j)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-j-1} \left\| \psi(s) \right\|_E ds,$$

где $\psi \in \mathcal{P}_F(u[\varphi])$.

Применяя свойства $(\mathcal{I}2)$ и $(F3)$, получаем оценку

$$\left\| \frac{d^j}{dt^j} u(t) \right\|_E \leqslant (\|U_0\|_{E^N} + m\mathcal{N}) \sum_{l=0}^{N-1} \frac{T^l}{l!} +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha - j)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-j-1} w(s)(1 + |(u[\varphi])_s|_{\mathcal{B}} + \left\| \nabla^N u(s) \right\|_{E^N}) ds.$$

Из свойства $(\mathcal{B}_3)$ вытекает, что

$$|(u[\varphi])_s|_{\mathcal{B}} + \left\| \nabla^N u(s) \right\|_{E^N} \leqslant M \left| \varphi \right|_{\mathcal{B}} + (K+1) \left\| u \right\|_{\mathcal{PC}^{N-1}([0,s];E)},$$

где $M(t) \leqslant M, \quad K(t) \leqslant K, \quad t \in [0, T].$

Тогда получаем оценку

$$\left\| \frac{d^j}{dt^j} u(t) \right\|_E \leqslant (\|U_0\|_{E^N} + m\mathcal{N}) \sum_{l=0}^{N-1} \frac{T^l}{l!} + \frac{M \left| \varphi \right|_{\mathcal{B}} + 1}{\Gamma(\alpha - j)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-j-1} w(s) ds +$$

$$+ \frac{K+1}{\Gamma(\alpha - j)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-j-1} w(s) \left\| u \right\|_{\mathcal{PC}^{N-1}([0,s];E)} ds.$$

Используя неравенство Гельдера, имеем

$$\left\| \frac{d^j}{dt^j} u(t) \right\|_E \leqslant (\|U_0\|_{E^N} + m\mathcal{N}) \sum_{l=0}^{N-1} \frac{T^l}{l!} +$$

$$+ \frac{M \left| \varphi \right|_{\mathcal{B}} + 1}{\Gamma(\alpha - j)} \left[\frac{1}{(\alpha - j - 1)p' + 1} \right]^{1/p'} T^{\alpha - j - \frac{1}{p}} \left(\int\limits_0^T \left| w(s) \right|^p ds \right)^{1/p} +$$

$$+\frac{K+1}{\Gamma(\alpha-j)}\left[\frac{1}{(\alpha-j-1)p'+1}\right]^{1/p'}T^{\alpha-j-\frac{1}{p}}\left(\int\limits_0^T |w(s)|^p\,\|u\|^p_{\mathcal{PC}^{N-1}([0,s];E)}\,ds\right)^{1/p}.$$

Введем следующие обозначения:

$$B_j=\frac{1}{\Gamma(\alpha-j)}\left[\frac{1}{(\alpha-j-1)p'+1}\right]^{1/p'}T^{\alpha-j-\frac{1}{p}},$$

$$B=max\left\{B_j,\quad j=0,1,\ldots,N-1\right\},$$

$$q_0=N\left(\|U_0\|_{E^N}+m\mathcal{N}\right)\sum_{l=0}^{N-1}\frac{T^l}{l!}+NB(M\,|\varphi|_{\mathcal{B}}+1)\left(\int\limits_0^T|w(s)|^p\,ds\right)^{1/p},$$

$$h(s)=\left[NB(K+1)\right]^{1/p}w(s),\quad s\in[0,T].$$

Тогда получаем:

$$\|u\|_{\mathcal{PC}^{N-1}([0,t];E)}\leqslant q_0+\left(\int\limits_0^t|h(s)|^p\,\|u\|^p_{\mathcal{PC}^{N-1}([0,s];E)}\,ds\right)^{1/p}.$$

Пусть $y(t)=\|u\|^p_{\mathcal{PC}^{N-1}([0,t];E)}$, тогда из последнего неравенства получаем следующую оценку:

$$y(t)\leqslant 2^pq_0^p+2^p\int\limits_0^t|h(s)|^p\,y(s)ds,$$

для всех $t\in[0,T]$. Теперь применяя Лемму 4.9 к последнему неравенству получаем:

$$y(t)=\|u\|^p_{\mathcal{PC}^{N-1}([0,t];E)}\leqslant 2^pq_0^p\left(1+\int\limits_0^T exp\left\{2^p\int\limits_s^T|h(\theta)|^p\,d\theta\right\}|h(s)|^p\,ds\right),$$

для всех $t\in[0,T]$. Пусть

$$R_0=2q_0\sqrt[p]{1+\int\limits_0^T exp\left\{2^p\int\limits_s^T|h(\theta)|^p\,d\theta\right\}|h(s)|^p\,ds},$$

тогда мы получаем окончательную оценку:

$$\|u\|_{\mathcal{PC}^{N-1}([0,T];E)}\leqslant R_0.$$

Применим теперь Теорему 3.1, полагая $a=u^*,\quad \mathcal{F}=\mathcal{G}$ и

$$\overline{\mathcal{U}_{\mathcal{D}}}=\left\{v\in\mathcal{D},\quad\|v\|_{\mathcal{PC}^{N-1}([0,T];E)}<R\right\},$$

где $R>R_0$.

Мы получаем, что множество неподвижных точек $Fix\mathcal{G}$ непусто и компактно. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Р. Р. Ахмеров, М. И. Каменский, А. С. Потапов, А. Е. Родкина, Б. Н. Садовский, Меры некомпактности и уплотняющие операторы. — Новосибирск, Наука. — 1986.

[2] Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, Введение в теорию многозначных оторбажений и дифференциальных включений. Издание 2-е, испр. и доп. — М.: Книжный дом «Либроком», 2011.

[3] S. Abbas, M. Benchohra and G. M. N'Guerekata, Topics in Fractional Differential Equations. Developments in Mathematics, Springer, New York, 2012.

[4] D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, J. J. Trujillo, Fractional Calculus. Models and Numerical Methods, World Scientific Publishing, New York, 2012.

[5] M. Benchohra, J. Henderson, S. Ntouyas, Impulsive Differential Equations and Inclusions, Contemporary Mathematics and Its Applications, 2, Hindawi Publishing Corporation, New York, 2006.

[6] J. Diestel, W. M. Ruess, W. Schachermayer, Weak Compactness in $L^1(\mu, X)$, Proc. Amer. Math. Soc. 118 (1993), 447–453.

[7] K. Diethelm, The Analysis of Fractional Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[8] J. K. Hale, J. Kato, Phase Space for Retarded Equations with Infinite Delay. Funkcial. Ekvac. 21 (1978), no. 1, 11–41.

[9] R. Hilfer, Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, Singapore, 2000.

[10] Y. Hino, S. Murakami, T. Naito, Functional Differential Equations with Infinite Delay, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1473, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1991.

[11] M. Kamenskii, V. Obukhovskii and P. Zecca, Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces, de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 7, Walter de Gruyter, Berlin — New-York, 2001.

[12] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North-Holland Mathematics Studies, 204, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[13] V. Lakshmikantham, Theory of Fractional Functional Differential Equations, Nonlinear Anal. 69 (2008), no. 10, 3337–3343.

[14] V. Lakshmikantham, D. D. Bainov, P. S. Simeonov, Theory of Impulsive Differential Equations, Series in Modern Applied Mathematics, 6, World Scientific Publishing Co., Inc., Teaneck, NJ, 1989.

[15] V. Lakshmikantham, A. S. Vatsala, Basic Theory of Fractional Differential Equations, Nonlinear Anal. 69 (2008), no. 8, 2677–2682.

[16] K. S. Miller, B. Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley, Inc., New York, 1993.

[17] V. Obukhovskii and J.-C. Yao, Some Existence Results for Fractional Functional Differential Equations, Fixed Point Theory, 11(2010), No. 1. 85–96.

[18] N.A. Perestyuk, V.A. Plotnikov, A.M. Samoilenko, N.A. Skripnik, Differential Equations With Impulse Effects. Multivalued Right-Hand Sides With Discontinuities. de Gruyter Studies in Mathematics, 40. Walter de Gruyter Co., Berlin, 2011.

[19] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, 1999.

[20] Y. Qin, Nonlinear Parabolic-Hyperbolic Coupled Systems and Their Attractors. Operator Theory: Advances and Applications, 184. Advances in Partial Differential Equations (Basel). Birkhauser Verlag, Basel, 2008.

[21] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications, Gordon and Breach Sci. Publishers, Yverdon, 1993.

[22] V. E. Tarasov, Fractional dynamics. Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media, Nonlinear Physical Science, Springer, Heidelberg; Higher Education Press, Beijing,

2010.

Обуховский В. В., Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики
E-mail: valerio-ob2000@mail.ru
Тел.: +7-(473)-255-36-63

Obukhovskii V., Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia, Faculty of Physics and Mathematics
E-mail: valerio-ob2000@mail.ru
Tel.: +7-(473)-255-36-63

Петросян Г. Г., Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж, Российская Федерация, ассистент кафедры высшей математики
E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru
Тел.: +7-(950)-761-93-66.

Petrosyan G., Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia, Faculty of Physics and Mathematics
E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru
Tel.: +7-(950)-761-93-66.