УДК 519.633.6

СХОДИМОСТЬ ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С СИММЕТРИЧНЫМ ОПЕРАТОРОМ И ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ НА РЕШЕНИЕ

Нгуен Тьюнг Хуен

College of Natural Science – Vietnam National University, Hanoi

Поступила в редакцию 31.08.2012 г.

Аннотация: в гильбертовом пространстве абстрактное линейное параболическое уравнение с симметричным оператором и нелокальным интегральным условием на решение решается приближенно проекционно-разностным методом с использованием по времени неявной схемы Эйлера. Аппроксимация задачи по пространственным переменным ориентирована на метод конечных элементов. Установлены оценки погрешностей приближенных решений, сходимость приближенных решений к точному решению и порядки скорости сходимости.

Ключевые слова: гильбертово пространство, параболическое уравнение, интегральное условие, проекционно-разностный метод, неявный метод Эйлера.

Abstract: in the Hilbert space the abstract linear parabolic equation with symmetric operator and nonlocal integral condition for the solution is resolved approximate by the projection difference method with using implicit Euler scheme to time. Approximation to the spatial variables is oriented on the finite element method. The established error estimations of approximate solutions, the convergence of approximate solution to exact solution and the orders of speed of convergence.

Keywords: Hilbert space, parabolic equation, integral conditions, projection difference method, implicit Euler scheme.

ОПИСАНИЕ ТОЧНОЙ И ПРИБЛИЖЕННОЙ ЗАДАЧ

Предполагается, что задана тройка гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$, где пространство V' – двойственное к V, а пространство H отождествляется со своим двойственным H'. Оба вложения плотные и непрерывные. На $u, v \in V$ определена полуторалинейная форма $a(u, v)$. Пусть для всех $u, v \in V$ выполнены оценки

$$|a(u, v)| \leqslant M\|u\|_V\|v\|_V, \mathrm{Re} \quad a(u, u) \geqslant \alpha\|u\|_V^2, \tag{1}$$

где $\alpha > 0$. Очевидно, что форма $a(u, v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A : V \to V'$ такой, что для $u, v \in V$ выполняется $a(u, v) = (Au, v)$. Отсюда следует оценка $\|A\|_{V\to V'} \leqslant M$. Здесь под выражением типа (z, v) понимается значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Для $z \in H$ выражение (z, v), в силу отождествления $H \equiv H'$, совпадает со скалярным произведением в H [1].

В пространстве V' на $[0, T]$ рассмотрим параболическую задачу:

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \qquad \int\limits_0^T u(t)dt = \overline{u}. \tag{2}$$

В (2) заданы функция $t \to f(t) \in V'$ и элемент $\overline{u}$. Производные функции здесь и далее понимаются в обобщенном смысле.

В [2] установлена теорема о существовании слабого решения задачи (2). При предложении компактности вложения $V \subset H$, условия $\overline{u} \in D(A)$, где $D(A) = \{v \in V \,|\, Av \in H\}$, и $f \in L_1(0,T;H) \bigcap L_2(0,T;V')$ в [2] показано, что задача (2) имеет единственное решение $u(t)$, называемое слабым, такое что $u \in L_2(0,T;V) \bigcap C(0,T;H)$, а $u' \in L_2(0,T;V')$. При этом в (2) удовлетворяется почти всюду на $[0,T]$ уравнение и выполняется интегральное условие.

В [3] задача (2) решается приближенно проекционно-разностным методом. При этом по времени используется неявная схема Эйлера. В итоге процесс нахождения приближенного решения задачи (2) сводится к нахождению решений конечных линейных систем алгебраических уравнений.

Опишем некоторые факты, связанные с проекционными подпространствами. Через V_h, где h — положительный параметр, обозначим конечномерное подпространство пространства V. Определим пространство V_h', задав на $u_h \in V_h$ двойственную норму $\|u_h\|_{V_h'} = \sup |(u_h, v_h)|$, где точная верхняя граница берется по $v_h \in V_h$ и $\|v_h\|_V = 1$. Нетрудно видеть, что $\|u_h\|_{V_h'} \leqslant \|u_h\|_{V'}$. Обозначим через P_h ортопроектор в пространстве H на V_h. В [4] замечено, что оператор P_h допускает расширение по непрерывности до оператора $\overline{P}_h : V' \to V_h'$ и для $u \in V'$ справедлива оценка $\|\overline{P}_h u\|_{V_h'} \leqslant \|u\|_{V'}$. Отметим также для $u_h \in V_h$ оценку $\|u_h\|_{V'} \leqslant \|P_h\|_{V \to V} \|u_h\|_{V_h'}$ и для $u \in V'$ оценку $\|\overline{P}_h u\|_{V'} \leqslant \|P_h\|_{V \to V} \|u\|_{V'}$. Кроме того, для $u \in V'$ и $v \in H$ справедливо важное соотношение $(\overline{P}_h u, v) = (u, P_h v)$ [5].

Рассмотрим в V_h приближенную задачу:

$$(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1} + A_h u_h^k = f_k^h \ (k = \overline{1,N}), \quad \sum_{k=1}^{N} u_k^h \tau = \overline{u}_h. \tag{3}$$

В (3) оператор $A_h = \overline{P}_h A : V_h \to V_h$, N - натуральное число, $\tau = T/N$ и элементы $f_k^h, \overline{u}_h \in V_h$ определим позже.

Далее в работе всюду предполагается, что форма $a(u,v)$ является симметричной, то есть $a(u,v) = \overline{a(v,u)}$, где черта над комплексным числом означает переход к сопряженному числу.

СРЕДНЕКВАДРАТИЧНАЯ СХОДИМОСТЬ ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА

Из симметричности формы $a(u,v)$, оценки $a(u,u) \geqslant \alpha\|u\|_V^2$ и соотношения $(A_h u_h, v_h) = a(u_h, v_h)$, где $u_h, v_h \in V_h$, следует самосопряженность и положительная определенность оператора $A_h : V_h \to V_h$, и тогда существует самосопряженный положительно определенный оператор $A_h^{1/2} : V_h \to V_h$. В таком случае существуют также операторы A_h^{-1} и $A_h^{-1/2}$ из V_h в V_h. Приведем необходимое далее утверждение из [5].

Лемма 1. *Для любых $u_h \in V_h$ выполняются оценки:*

$$\alpha\|u_h\|_V^2 \leqslant \|A_h^{1/2} u_h\|_H^2 \leqslant M\|u_h\|_V^2, \tag{4}$$

$$\alpha\|A_h^{-1/2} u_h\|_H^2 \leqslant \|u_h\|_{V_h'}^2 \leqslant M\|A_h^{-1/2} u_h\|_H^2. \tag{5}$$

Определим необходимый в дальнейшем проектор Ритца. Из теоремы Лакса-Мильграмма [6] для любого элемента $u \in V$ следует существование единственного $u_h \in V_h$ такого, что для любых $v_h \in V_h$ выполняется равенство $a(u_h, v_h) = a(u, v_h)$. Таким образом, определен оператор $R_h : V \to V_h$, называемый проектором Ритца, что $R_h u = u_h$, и для всех $u \in V$ и $v_h \in V_h$

$$a(R_h u, v_h) = a(u, v_h). \tag{6}$$

Заметим, что из (6) для любого $u \in V$ следует равенство $\overline{P}_h A R_h u = \overline{P_h} A u$, Отметим некоторые свойства оператора R_h, приведенные в [7]. Оператор R_h в пространстве V является линейным и ограниченным, причем выполняется оценка $\|R_h u\|_V \leqslant M\alpha^{-1}\|u\|_V$. Кроме того, для любого элемента $u \in V$ справедлива оценка

$$\|(I - R_h)u\|_V \leqslant M\alpha^{-1}\|(I - Q_h)u\|_V, \tag{7}$$

где Q_h – ортопроектор в пространстве V на V_h.

Лемма 2. *Пусть $u(t)$ – решение задачи (2), а $u_k^h (k = \overline{1,N})$ – решения задачи (3), где $f_k^h = \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \overline{P}_h f(t)dt$. Обозначаем через $z_k^h = u_k^h - P_h u(t_k)$. Тогда справедлива оценка*

$$\max_{1\leqslant m\leqslant N} \|z_m^h\|_{V_h'}^2 + \sum_{k=1}^{N}\Big(\|z_k^h - z_{k-1}^h\|_{V_h'}^2 + \|z_k^h\|_H^2 \tau\Big) \leqslant$$

$$\leqslant C\Big\{\|z_0^h\|_{V_h'}^2 + \int_0^T \|(R_h - I)u(t)\|_H^2 dt + \sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t) - u(t_k)\|_H^2 dt\Big\}. \tag{8}$$

Доказательство. Применяя оператор P_h к уравнению (2) проинтегрируем полученное уравнение от t_{k-1} по t_k, и делим на τ. Учитывая далее (3), получим тождество

$$\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau} + \overline{P}_h A z_k^h = \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \overline{P}_h A[u(t) - \overline{P}_h u(t_k)]dt. \tag{9}$$

Умножим (9) на $\tau A_h^{-1} z_k^h$ скалярно в H.

$$(z_k^h - z_{k-1}^h, A_h^{-1} z_k^h) + \tau\|z_k^h\|_H^2 = \Big(\int_{t_{k-1}}^{t_k} [P_h A u(t) - A_h P_h u(t_k)]dt, A_h^{-1} z_k^h\Big). \tag{10}$$

Заметим, что

$$2\mathrm{Re}(z_k^h - z_{k-1}^h, A_h^{-1} z_k^h) = \|A_h^{-1/2} z_k^h\|_H^2 - \|A_h^{-1/2} z_{k-1}^h\|_H^2 + \|A_h^{-1/2}(z_k^h - z_{k-1}^h)\|_H^2.$$

Возьмем теперь от (10) удвоенную вещественную часть, получим

$$\|A_h^{-1/2} z_k^h\|_H^2 - \|A_h^{-1/2} z_{k-1}^h\|_H^2 + \|A_h^{-1/2}(z_k^h - z_{k-1}^h)\|_H^2 + 2\tau\|z_k^h\|_H^2 =$$

$$2\mathrm{Re}\Big(\int_{t_{k-1}}^{t_k} [P_h A u(t) - A_h P_h u(t_k)]dt, A_h^{-1} z_k^h\Big). \tag{11}$$

Рассмотрим правую часть (11).

$$2\mathrm{Re}\Big(\int_{t_{k-1}}^{t_k} [P_h A u(t) - A_h P_h u(t_k)]dt, A_h^{-1} z_k^h\Big) =$$

$$= 2\mathrm{Re}\Big\{\int_{t_{k-1}}^{t_k} (A_h R_h u(t), A_h^{-1} z_k^h)dt - \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\overline{P_h} u(t_k), z_k^h)dt\Big\} =$$

$$= 2\mathrm{Re}\left\{\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(R_h u(t), z_k^h)dt - \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(u(t_k), z_k^h)dt\right\} = 2\mathrm{Re}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(R_h u(t) - u(t_k), z_k^h)dt =$$

$$= 2\mathrm{Re}(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(R_h - I)u(t)dt, z_k^h)dt + 2\mathrm{Re}(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}[u(t) - u(t_k)]dt, z_k^h) = I_1 + I_2. \tag{12}$$

В (12) оценим I_1.

$$I_1 \leqslant \frac{1}{\tau\varepsilon_1}\|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(R_h - I)u(t)dt\|_H^2 + \varepsilon_1\|z_k^h\|_H^2\tau \leqslant \frac{1}{\varepsilon_1}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|(R_h - I)u(t)\|_H^2 dt + \varepsilon_1\|z_k^h\|_H^2\tau. \tag{13}$$

Перейдем к слагаемому I_2.

$$I_2 \leqslant \frac{1}{\varepsilon_2}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t) - u(t_k)\|_H^2 dt + \varepsilon_2\|z_k^h\|_H^2\tau. \tag{14}$$

В (13) и (14) полагая $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1/2$, получим оценку

$$2\mathrm{Re}\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}[P_h A u(t) - A_h P_h u(t_k)]dt, A_h^{-1}z_k^h\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|(R_h - I)u(t)\|_H^2 dt + 2\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t) - u(t_k)\|_H^2 dt + \|z_k^h\|_H^2\tau. \tag{15}$$

Из (11) и (15) имеем

$$\|A_h^{-1/2}z_k^h\|_H^2 - \|A_h^{-1/2}z_{k-1}^h\|_H^2 + \|A_h^{-1/2}(z_k^h - z_{k-1}^h)\|_H^2 + \tau\|z_k^h\|_H^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|(R_h - I)u(t)\|_H^2 dt + 2\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t) - u(t_k)\|_H^2 dt. \tag{16}$$

Суммируем оценки (16) по k от 1 до $m \leqslant N$.

$$\|A_h^{-1/2}z_m^h\|_H^2 - \|A_h^{-1/2}z_0^h\|_H^2 + \sum_{k=1}^m\|A_h^{-1/2}(z_k^h - z_{k-1}^h)\|_H^2 + \sum_{k=1}^m\tau\|z_k^h\|_H^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{k=1}^m\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|(R_h - I)u(t)\|_H^2 dt + 2\sum_{k=1}^m\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t) - u(t_k)\|_H^2 dt. \tag{17}$$

Заметим, что в силу (5), в оценке (17):

$$\|A_h^{-1/2}z_m^h\|_H^2 \geqslant M^{-1}\|z_m^h\|_{V_h'}^2, \quad \|A_h^{-1/2}z_0^h\|_H^2 \leqslant \alpha^{-1}\|z_0^h\|_{V_h'}^2,$$

$$\|A_h^{-1/2}(z_k^h - z_{k-1}^h)\|_H^2 \geqslant M^{-1}\|z_k^h - z_{k-1}^h\|_{V_h'}^2.$$

В результате (17) преобразуется к виду

$$\|z_m^h\|_{V_h'}^2 + \sum_{k=1}^{m}\Big(\|z_k^h - z_{k-1}^h\|_{V_h'}^2 + \|z_k^h\|_H^2\tau\Big) \leqslant$$

$$\leqslant C\Big\{\|z_0^h\|_{V_h'}^2 + \sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|(R_h - I)u(t)\|_H^2 dt + \sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t) - u(t_k)\|_H^2 dt\Big\}. \tag{18}$$

Из (18) выделяем суммарное неравенство для $\|z_m^h\|_{V_h'}^2$, переходим к $\max_{1\leqslant m\leqslant N}\|z_m^h\|_{V_h'}^2$, получим оценку (8). □

Лемма 3. *Пусть $u(t)$ – решение задачи (2), а $u_k^h (k = \overline{1,N})$ – решения задачи (3), где $f_k^h = \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\overline{P}_h f(t)dt$ и $\overline{u}_h = R_h\overline{u}$. Обозначаем через $z_k^h = u_k^h - P_h u(t_k)$. Тогда справедлива оценка*

$$\max_{1\leqslant m\leqslant N}\|z_m^h\|_{V_h'}^2 + \sum_{k=1}^{N}\Big(\|z_k^h - z_{k-1}^h\|_{V_h'}^2 + \|z_k^h\|_H^2\tau\Big) \leqslant$$

$$\leqslant C\Big\{\int\limits_0^T\|(R_h - I)u(t)\|_H^2 dt + \sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t) - u(t_k)\|_H^2 dt\Big\}. \tag{19}$$

Доказательство. Приведем необходимый результат из [3], где показано, что оператор $I - (I + \tau\overline{P}_h A)^{-N}$ обратим из V_h в V_h и выполняется оценка

$$\|[I - (I + \tau\overline{P}_h A)^{-N}]^{-1}\|_{H\to H} \leqslant \frac{1}{1 - e^{-T\alpha\beta}}\,, \tag{20}$$

где константа $\beta > 0$ такая, что для всех $v \in V$ справедлива оценка $\beta^{1/2}\|v\|_h \leqslant \|v\|_V$. Кроме того в [3] было доказано, что решение (9) записывается в виде

$$z_m^h = (I + \tau\overline{P}_h A)^{-m} z_0^h + \sum_{k=1}^{m}(I + \tau\overline{P}_h A)^{-m+1-k}\psi_k^h\tau \tag{21}$$

и выполняется следующее тождество

$$z_0^h = [I - (I + \tau\overline{P}_h A)^{-N}]^{-1} \times \sum_{k=1}^{N}(I + \tau\overline{P}_h A)^{-N+1-k}\psi_k^h\tau\,, \tag{22}$$

где $\psi_k^h = \dfrac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\overline{P}_h A[u(t) - \overline{P}_h u(t_k)]dt$.

Воспользуемся оценкой (5).

$$\|z_0^h\|_{V_h'}^2 = \Big\|[I - (I + \tau\overline{P}_h A)^{-N}]^{-1}\Big\{\sum_{k=1}^{N}(I + \tau\overline{P}_h A)^{-N+1-k}\psi_k^h\tau\Big\}\Big\|_{V_h'}^2 \leqslant$$

$$\leqslant M\Big\|[I - (I + \tau\overline{P}_h A)^{-N}]^{-1}A_h^{-1/2}\Big\{\sum_{k=1}^{N}(I + \tau\overline{P}_h A)^{-N+1-k}\psi_k^h\tau\Big\}\Big\|_H^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{(1-e^{-T\alpha\beta})^2}\left\|A_h^{-1/2}\left\{\sum_{k=1}^{N}(I+\tau\overline{P}_hA)^{-N+1-k}\psi_k^h\tau\right\}\right\|_H^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta^{-1}M}{(1-e^{-T\alpha\beta})^2}\left\|\sum_{k=1}^{N}(I+\tau\overline{P}_hA)^{-N+1-k}\psi_k^h\tau\right\|_{V_h'}^2. \tag{23}$$

Заметим, что в (23) справа под знаком нормы записано решение задачи (9) с нулевым начальным условием $z_0^h=0$. Тогда, учитывая оценку (8), продолжим оценку(23)

$$\|z_0^h\|_{V_h'}^2 \leqslant \frac{\delta^{-1}M}{(1-e^{-T\alpha\beta})^2}\left\|\sum_{k=1}^{N}(I+\tau\overline{P}_hA)^{-N+1-k}\psi_k^h\tau\right\|_H^2 \leqslant$$

$$\leqslant C\left\{\int_0^T\|(R_h-I)u(t)\|_H^2dt+\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t)-u(t_k)\|_H^2dt\right\}. \tag{24}$$

Оценка (19) следует теперь из (18) и (24). $\square$

Приведем необходимую далее лемму из [5].

Лемма 4. *Пусть выполнены условия слабой разрешимости задачи (2). Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t)-u(t_k)\|_H^2dt \leqslant \tau C\left\{\int_0^T\|f(s)\|_{V'}^2dt+\int_0^T\|u(t)\|_V^2dt\right\}. \tag{25}$$

Теорема 1. *Пусть $u(t)$ – слабое решение задачи (2), а u_k^h, где $k=\overline{1,N}$, – решение задачи (3) такое, что $\overline{u}_h=R_h\overline{u}$. Пусть $\{V_h\}$ – предельно плотная в V последовательность конечномерных пространств, то есть $\|(I-Q_h)v\|_V\to 0$ при $h\to 0$ для любого $v\in V$. Тогда при $h\to 0$, $\tau\to 0$*

$$\sum_{k=1}^{N}\|u(t_k)-u_k^h\|_H^2\tau \to 0. \tag{26}$$

Доказательство. Сходимость к нулю второго слагаемого правой части (19) следует из (24), а сходимость к нулю первого слагаемого получается из (7), предельной плотности последовательности $\{V_h\}$ в пространстве V и непрерывного вложения $V\subset H$.

Стремление к нулю слагаемого $\sum_{k=1}^{N}\|u(t_k)-u_k^h\|_H^2\tau$ в (26) следует из предельной плотности V_h в H, (19) и тождества

$$u(t_k)-u_k^h=(I-P_h)u(t_k)-z_k^h\,. \qquad \square \tag{27}$$

Перейдем к получению скорости сходимости приближенных решений к точному. Напомним множество $D(A)=\{u\in V|Av\in H\}$. Пусть существует гильбертово пространство E такое, что $D(A)\subset E\subset V$ и выполняется типичная для эллиптических операторов оценка

$$\|v\|_E\leqslant d\|Av\|_H \quad (v\in V)\,, \tag{28}$$

где $d\geqslant 0$. Например, если параболическое уравнение в области Ω определено равномерно эллиптическим дифференциальным оператором второго порядка и краевым условием Дирихле, то рассматриваем пространства: $H=L_2(\Omega)$, $V=\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $V'=W_2^{-1}(\Omega)$, $E=W_2^2(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Если же на границе области Ω задается условия Неймана, то пространства следующие: $H=L_2(\Omega)$, $V=W_2^1(\Omega)$, $E=W_2^2(\Omega)$.

Пусть подпространства V_h обладают следующим аппроксимационным свойством

$$\|(I-Q_h)v\|_V \leqslant r_1 h\|v\|_E \quad (v\in E)\,, \tag{29}$$

типичным для подпространств типа конечных элементов [8]. В [9] показано, что из (29) при условии (28) следует оценка

$$\|(I-R_h)v\|_H \leqslant Mdr_1h\|(I-Q_h)v\|_V \quad (v\in V)\,. \tag{30}$$

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и условия (28) и (29). Тогда*

$$\sum_{k=1}^N \|u(t_k)-u_k^h\|_H^2\tau \leqslant K\left\{h^2\int\limits_0^T \|u(t)\|_V^2dt + \tau\left(\int\limits_0^T\|f(s)\|_{V'}^2dt + \int\limits_0^T\|u(t)\|_V^2dt\right)\right\}. \tag{31}$$

Если же решение задачи более гладкое, а именно $u\in L_2(0,T;E)$ и $u'\in L_2(0,T;H)$, то справедлива следующая оценка

$$\sum_{k=1}^N \|u(t_k)-u_k^h\|_H^2\tau \leqslant K\left\{h^4\int\limits_0^T\|u(t)\|_E^2\,dt + \tau^2\int\limits_0^T\|u'(s)\|_H^2\,ds\right\}. \tag{32}$$

Доказательство. Запишем оценку

$$\sum_{k=1}^N \|u(t_k)-u_k^h\|_H^2\tau \leqslant 2\sum_{k=1}^N\|(I-P_h)u(t_k)\|_H^2\tau + 2\sum_{k=1}^N\|z_k^h\|_H^2\tau\,. \tag{33}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (33).

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^N\|(I-P_h)u(t_k)\|_H^2\tau &= \sum_{k=1}^N\int\limits_{t_k}^{t_{k-1}}\|(I-P_h)u(t_k)\|_H^2dt \leqslant\\ &\leqslant \sum_{k=1}^N\int\limits_{t_k}^{t_{k-1}}\left\{2\|u(t_k)-u(t)\|_H^2 + 2\|(I-P_h)u(t)\|_H^2\right\}dt =\\ &= 2\sum_{k=1}^N\int\limits_{t_k}^{t_{k-1}}\|u(t_k)-u(t)\|_H^2dt + 2\int\limits_0^T\|(I-P_h)u(t)\|_H^2dt\,.\end{aligned} \tag{34}$$

Оценка (31) следует из (33), (34),(24), (26), (19) и (30).

Далее заметим, что

$$\|u(t_k)-u(t)\|_H^2 = \left\|\int\limits_t^{t_k}u'(s)ds\right\|_H^2 \leqslant \tau\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u'(s)\|_H^2ds\,.$$

Отсюда получим

$$\sum_{k=1}^N\int\limits_{t_k}^{t_{k-1}}\|u(t_k)-u(t)\|_H^2dt \leqslant \tau^2\int\limits_0^T\|u'(t)\|_H^2dt\,. \tag{35}$$

Оценка (32) следует из (33), (34),(35), (7), (19), (29) и (30). □

Обратим внимание, в [10] была доказана обобщенная разрешимость задачи (2). А именно, если в (2) элемент $\overline{u} \in V$ такой, что $A\overline{u} \in V$, функция $f \in L_1(0,T;V) \bigcap L_2(0,T;H)$, то задача (2) имеет единственное решение $u(t)$ такое, что функция $u \in C([0,T],V)$, а функции $u' \in L_2(0,T;H)$.

СИЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА

Пусть для задачи (2) выполнены указанные выше условия, которые гарантируют существование обобщенного решение этой задачи. Установим для решения задачи (3) новые априорные оценки.

Лемма 6. *Пусть $u(t)$ – обобщенное решение задачи (2), а u_k^h, где $k = \overline{1,N}$, – решение задачи (3) такое, что $\overline{u}_h = R_h\overline{u}$. Обозначим $r_k^h = R_h u(t_k) - u_k^h$. Тогда справедлива оценка*

$$\max_{1\leqslant m\leqslant N} \|r_m^h\|_V^2 + \sum_{k=1}^N \|(r_k^h - r_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_H^2\tau + \sum_{k=1}^N \|r_k^h - r_{k-1}^h\|_V^2 \leqslant$$

$$\leqslant C\Bigg\{\sum_{k=1}^N \tau^{-1}\|(R_h - I)[u(t_k) - u(t_{k-1})]\|_H^2 +$$

$$+\sum_{k=1}^N \|\tau^{-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}[u(t_k) - u(t)]dt\|_V^2 + \sum_{k=1}^N \|(R_h - P_h)[u(t_k) - u(t_{k-1})]\|_V^2\Bigg\}. \tag{36}$$

Доказательство. К равенству (2) применим оператор P_h

$$P_h u'(t) + P_h A u(t) = P_h f(t)\,. \tag{37}$$

Интегрируем (37) по t от t_{k-1} до t_k и результат делим на τ. Из полученного равенства вычтем (3). Учитывая свойство (6), для $r_k^h = R_h u(t_k) - u_k^h$ получим тождества

$$\frac{r_k^h - r_{k-1}^h}{\tau} + A_h r_k^h = (R_h - P_h)[u(t_k) - u(t_{k-1})]\tau^{-1} + P_h A\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}[u(t_k) - u(t)]dt\,. \tag{38}$$

Умножим (38) на $(r_k^h - r_{k-1}^h)\tau^{-1}$ скалярно в H.

$$\|(r_k^h - r_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_H^2 + a(r_k^h, r_k^h - r_{k-1}^h)\tau^{-1} = \Big((R_h - I)[u(t_k) - u(t_{k-1})]\tau^{-1}, (r_k^h - r_{k-1}^h)\tau^{-1}\Big) +$$

$$+a\Bigg(\tau^{-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}[u(t_k) - u(t)]dt, (r_k^h - r_{k-1}^h)\tau^{-1}\Bigg)\,. \tag{39}$$

Возьмем от (39) удвоенную вещественную часть. Заметим, что

$$2\,\mathrm{Re}\,a(r_k^h, r_k^h - r_{k-1}^h)\tau^{-1} = a(r_k^h, r_k^h)\tau^{-1} - a(r_{k-1}^h, r_{k-1}^h)\tau^{-1} + a(r_k^h - r_{k-1}^h, r_k^h - r_{k-1}^h)\tau^{-1}\,.$$

Из (39) получим

$$2\|(r_k^h - r_{k-1}^h)\tau\|_H^2 + a(r_k^h, r_k^h)\tau^{-1} - a(r_{k-1}^h, r_{k-1}^h)\tau^{-1} + a(r_k^h - r_{k-1}^h, r_k^h - r_{k-1}^h)\tau^{-1} =$$

$$= 2\mathrm{Re}\Big((R_h - I)[u(t_k) - u(t_{k-1})]\tau^{-1}, (r_k^h - r_{k-1}^h)\tau^{-1}\Big) +$$

$$+2\mathrm{Re}\, a\Big(\tau^{-1}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}[u(t_k) - u(t)]dt, (r_k^h - r_{k-1}^h)\tau^{-1}\Big). \qquad (40)$$

Оценим снизу слагаемое в левой части (40).

$$a((r_k^h - r_{k-1}^h), r_k^h - r_{k-1}^h)\tau^{-1} \geqslant \alpha\|r_k^h - r_{k-1}^h\|_V^2\tau^{-1}.$$

Переходим к оценкам слагаемых в правой части (40).

$$2\mathrm{Re}\Big((R_h - I)[u(t_k) - u(t_{k-1})]\tau^{-1}, (r_k^h - r_{k-1}^h)\tau^{-1}\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \|(R_h - I)[u(t_k) - u(t_{k-1})]\tau^{-1}\|_H^2 + \|(r_k^h - r_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_H^2 .$$

Для второго слагаемого в правой части (40) получим

$$2\mathrm{Re}\, a\Big(\tau^{-1}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}[u(t_k) - u(t)]dt, (r_k^h - r_{k-1}^h)\tau^{-1}\Big) \leqslant 2\,M\|\tau^{-1}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(u(t_k) - u(t))dt\|_V\|(r_k^h - r_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_V \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M^2}{\varepsilon}\|\tau^{-1}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}[u(t_k) - u(t)]dt\|_V^2\tau^{-1} + \varepsilon\|r_k^h - r_{k-1}^h\|_V^2\tau^{-1}.$$

Полагая $\varepsilon = \alpha/2$, приходим к оценке

$$\|(r_k^h - r_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_H^2 + \frac{\alpha}{2}\|r_k^h - r_{k-1}^h\|_V^2\tau^{-1} + a(r_k^h, r_k^h)\tau^{-1} - a(r_{k-1}^h, r_{k-1}^h)\tau^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \|(R_h - P_h)[u(t_k) - u(t_{k-1})]\tau^{-1}\|_H^2 + \frac{2\,M^2}{\alpha}\|\tau^{-1}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}[u(t_k) - u(t)]dt\|_V^2\tau^{-1}. \qquad (41)$$

Умножим (41) на τ и суммируем по k от 1 до $m \leqslant N$.

$$\sum_{k=1}^{m}\|(r_k^h - r_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_H^2\tau + \frac{\alpha}{2}\sum_{k=1}^{m}\|r_k^h - r_{k-1}^h\|_V^2 + a(r_m^h, r_m^h) \leqslant$$

$$\leqslant a(r_0^h, r_0^h) + \sum_{k=1}^{m}\tau\|(R_h - P_h)[u(t_k) - u(t_{k-1})]\tau^{-1}\|_H^2 + \frac{2\,M^2}{\alpha}\sum_{k=1}^{m}\|\tau^{-1}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}[u(t_k) - u(t)]dt\|_V^2 .$$

Из (1) следует $a(r_m^h, r_m^h) \geqslant \alpha\|r_m^h\|_V^2$ и $a(r_0^h, r_0^h) \leqslant M\|r_0^h\|_V^2$. Тогда

$$\max_{1\leqslant m\leqslant N}\|r_m^h\|_V^2 + \sum_{k=1}^{N}\|(r_k^h - r_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_H^2\tau + \sum_{k=1}^{N}\|r_k^h - r_{k-1}^h\|_V^2 \leqslant$$

$$\leqslant C\Big\{\|r_0^h\|_V^2 + \sum_{k=1}^{N}\tau^{-1}\|(R_h - I)[u(t_k) - u(t_{k-1})]\|_H^2 + \sum_{k=1}^{N}\|\tau^{-1}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}[u(t_k) - u(t)]dt\|_V^2\Big\}. \qquad (42)$$

Оценим $\|r_0^h\|_V^2$. В (38) обозначим

$$\varphi_k^h = (R_h - P_h)[u(t_k) - u(t_{k-1})] + P_h A \frac{1}{\tau} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} [u(t_k) - u(t)]dt.$$

Подобно (20) имеем выражения для r_k^h в задаче (38).

$$r_m^h = (I + \tau \overline{P}_h A)^{-m} r_0^h + \sum_{k=1}^{m} (I + \tau \overline{P}_h A)^{-m+1-k} \varphi_k^h \tau \,. \tag{43}$$

Суммируем (38) по k от 0 до N и умножим полученное соотношение на τ.

$$r_N^h - r_0^h + A_h \sum_{k=1}^{N} r_k^h \tau = \sum_{k=1}^{N} (R_h - P_h)[u(t_k) - u(t_{k-1})] + \sum_{k=1}^{N} P_h A \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} [u(t_k) - u(t)]dt \,. \tag{44}$$

Заметим здесь, что в силу условий (6) и (2)

$$A_h \sum_{k=1}^{N} r_k^h \tau = A_h \sum_{k=1}^{N} (R_h u(t_k) - u_k^h)\tau = \sum_{k=1}^{N} P_h A R_h u(t_k)\tau - P_h A R_h \overline{u} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} P_h A \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u(t_k)\, dt - P_h A \overline{u} = \sum_{k=1}^{N} P_h A \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} [u(t_k) - u(t)]dt \,.$$

Поэтому из (44) получим

$$r_N^h - r_0^h = \sum_{k=1}^{N} (R_h - P_h)[u(t_k) - u(t_{k-1})] \,. \tag{45}$$

Поставим (43) в (45). Учитывая (21) и (22), получим

$$r_0^h = [I - (I + \tau A_h)^{-N}]^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^{N} (I + \tau A_h)^{-N+1-k} \varphi_k^h \tau - \sum_{k=1}^{N} (R_h - P_h)(u(t_k) - u(t_{k-1})) \right\}.$$

Теперь воспользуемся оценками леммы 1.

$$\|r_0^h\|_V^2 \leqslant \frac{1}{\alpha} \|A_h^{1/2} r_0^h\|_H^2 \ \leqslant C \, \|[I - (I + \tau A_h)^{-N}]^{-1} A_h^{1/2} \sum_{k=1}^{N} (I + \tau A_h)^{-N+1-k} \varphi_k^h \tau\|_H^2 +$$

$$+ C \, \|[I - (I + \tau A_h)^{-N}]^{-1} A_h^{1/2} \sum_{k=1}^{N} (R_h - P_h)[u(t_k) - u(t_{k-1})]\|_H^2 \leqslant$$

$$\leqslant C \left\{ \|A_h^{1/2} \sum_{k=1}^{N} (I + \tau A_h)^{-N+1-k} \varphi_k^h \tau\|_H^2 + \|A_h^{1/2} \sum_{k=1}^{N} (R_h - P_h)[u(t_k) - u(t_{k-1})]\|_H^2 \right\} \leqslant$$

$$\leqslant C \left\{ \| \sum_{k=1}^{N} (I + \tau A_h)^{-N+1-k} \varphi_k^h \tau\|_V^2 + \sum_{k=1}^{N} \|(R_h - P_h)[u(t_k) - u(t_{k-1})]\|_V^2 \right\}. \tag{46}$$

Оценим слагаемое $\| \sum\limits_{k=1}^{N}(I+\tau A_h)^{-N+1-k}\varphi_k^h\tau\|_V^2$ в (46). Под знаком нормы этого слагаемого записано решение задачи (38) с нулевым начальным условием $r_0^h=0$. Тогда, учитывая оценку (42),

$$\| \sum_{k=1}^{N}(I+\tau A_h)^{-N+1-k}\varphi_k^h\tau\|_V^2 \leqslant C\left\{\sum_{k=1}^{N}\tau^{-1}\|(R_h-I)[u(t_k)-u(t_{k-1})]\|_H^2+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{N}\|\tau^{-1}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}[u(t_k)-u(t)]dt\|_V^2\right\}. \tag{47}$$

Поставляя (47) в (46), получим

$$\|r_0^h\|_V^2\leqslant C\left\{\sum_{k=1}^{N}\tau^{-1}\|(R_h-I)[u(t_k)-u(t_{k-1})]\|_H^2+\sum_{k=1}^{N}\|\tau^{-1}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}[u(t_k)-u(t)]dt\|_V^2+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{N}\|(R_h-P_h)[u(t_k)-u(t_{k-1})]\|_V^2\right\}. \tag{48}$$

Из (48) и (42) следует (36). $\square$

Теорема 2. *Пусть* $\{V_h\}$ *– последовательность конечномерных подпространств такая, что* $\|P_h\|_{V\to V}$ *равномерно по* h *ограничены. Пусть u(t)– обобщенное решение задачи (2) с дополнительным условием* $u'\in L_2(0,T;V)$. *Тогда в условиях теоремы 1 справедливы оценки:*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|u(t_k)-u_k^h\|_V^2\leqslant C\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|(I-R_h)u(t)\|_V^2+\int\limits_0^T\|(R_h-I)u'(t)\|_H^2dt+\tau\int\limits_0^T\|u'(t)\|_V^2dt\right\}, \tag{49}$$

$$\sum_{k=1}^{N}\left\|\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)\,dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau\leqslant C\left\{\int\limits_0^T\|(R_h-I)u'(t)\|_H^2dt+\tau\int\limits_0^T\|u'(t)\|_V^2dt\right\}. \tag{50}$$

Доказательство. Рассмотрим слагаемые в правой части (36).

$$\tau^{-1}\|(R_h-I)[u(t_k)-u(t_{k-1})]\|_H^2=\tau^{-1}\|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(R_h-I)u'(t)dt\|_H^2\leqslant\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|(R_h-I)u'(t)\|_H^2dt\,.$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{N}\tau^{-1}\|(R_h-I)[u(t_k)-u(t_{k-1})]\|_H^2\leqslant\int\limits_0^T\|(R_h-I)u'(t)\|_H^2dt\,. \tag{51}$$

Имеем также при $t\in[t_{k-1},t_k]$

$$\left\|\tau^{-1}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}[u(t_k)-u(t)]dt\right\|_V^2=\tau^{-2}\left\|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\int\limits_t^{t_k}u'(s)ds\right)dt\right\|_V^2\leqslant\tau\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u'(s)\|_V^2ds.$$

В результате получим

$$\sum_{k=1}^{N} \|\tau^{-1} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (u(t_k) - u(t))dt\|_V^2 \leqslant \tau \int\limits_0^T \|u'(t)\|_V^2 dt\,. \tag{52}$$

Оценим оставшееся слагаемое в правой части (36). В силу равномерной ограниченности $\|P_h\|_{V\to V}$ и (26)

$$\sum_{k=1}^{N} \|(R_h - P_h)[u(t_k) - u(t_{k-1})]\|_V^2 \leqslant \|P_h\|_{V\to V}\, M^2\alpha^{-2} \sum_{k=1}^{N} \|(Q_h - I)[u(t_k) - u(t_{k-1})]\|_V^2 \leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{k=1}^{N} \Big\| \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)dt \Big\|_V^2 \leqslant C\tau \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|u'(t)\|_V^2 dt = C\tau \int\limits_0^T \|u'(t)\|_V^2 dt. \tag{53}$$

Оценка (51) теперь следует из (36), (51), (52), (53) и тождества

$$u(t_k) - u_k^h = (I - R_h)u(t_k) + R_h u(t_k) - u_k^h\,. \tag{56}$$

Заметим теперь, что

$$\frac{1}{\tau} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\,dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} = (I - R_h)\,\frac{1}{\tau} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)dt + \frac{r_k^h - r_{k-1}^h}{\tau}\,. \tag{55}$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{N} \Big\| \frac{1}{\tau} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\,dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \Big\|_H^2 \tau \leqslant 2\sum_{k=1}^{N} \Big\| (I - R_h)\,\frac{1}{\tau} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)dt \Big\|_H^2 \tau + 2\sum_{k=1}^{N} \Big\| \frac{r_k^h - r_{k-1}^h}{\tau} \Big\|_H^2 \tau\,. \tag{56}$$

Оценим

$$\sum_{k=1}^{N} \Big\| (I - R_h)\,\frac{1}{\tau} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)dt \Big\|_H^2 \tau \leqslant \int\limits_0^T \|(I - R_h)u'(t)\|_H^2 dt\,. \tag{57}$$

Оценка (50) получается из (56), (36), (51), (52), (53) и (57). □

Следствие 3. *Пусть выполнены условия теоремы 3 и $\{V_h\}$ – предельно плотная в пространстве V при $h \to 0$ последовательность конечномерных подпространств такая, что $\|P_h\|_{V\to V}$ равномерно по h ограничены. Тогда при $h \to 0$ и $\tau \to 0$*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N} \|u(t_k) - u_k^h\|_V^2 + \sum_{k=1}^{N} \Big\| \frac{1}{\tau} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\,dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \Big\|_H^2 \tau \to 0\,. \tag{58}$$

Доказательство следует из (51), (52), (26), плотного непрерывного вложения $V \subset H$ и предельной плотности $\{V_h\}$ в пространстве V. □

Из теоремы 2 можно получить и скорость сходимости по пространству. Пусть выполнены (28), (29) и следующее условие

$$\|v_h\|_V \leqslant r_2 h^{-1} \|v_h\|_H \qquad (v_h \in V_h). \tag{59}$$

В методе конечных элементов условие (59) означает [11] равномерное разбиение на конечные элементы области пространственных переменных. Тогда из (29) и (59) следует оценка $\|P_h\|_{V\to V} \leqslant r_1 r_2 + 1$ [12].

Следствие 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3 и условия (28), (29), (59), тогда из оценок (49) и (50) получим*

$$\sum_{k=1}^{N}\left\|\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\,dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2 \tau \leqslant C(\tau + h^2)\int\limits_0^T \|u'(t)\|_V^2 dt\,. \tag{60}$$

Предположим также, что $u \in C([0,T];E)$, *тогда мы получим еще оценку*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|u(t_k) - u_k^h\|_V^2 \leqslant C\left\{h^2\left(\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_E^2 + \int\limits_0^T \|u'(t)\|_V^2 dt\right) + \tau\int\limits_0^T \|u'(t)\|_V^2 dt\right\}. \tag{61}$$

Доказательство. Оценка (60) следует из (50) и (30).

Рассмотрим слагаемые в правой части оценки (49). При условиях (26) и (29) имеем

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|(I-R_h)u(t)\|_V^2 \leqslant M^2\alpha^{-2}\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|(I-Q_h)u(t)\|_V^2 \leqslant M^2\alpha^{-2}r_1^2h^2\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|u(t)\|_E^2\,. \tag{62}$$

Оценка (61) следует из (49), (30) и (62). □

Автор благодарен В. В. Смагину за постановку задачи и обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Обэн Ж.-П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач. — М.: Мир, 1977. — 384 с.

[2] *Критская Е.А., Смагин В.В.* О слабой разрешимости вариационной задачи параболического типа с интегральным условием // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: физика, математика. — 2008. — № 1. — С. 222–225.

[3] *Нгуен Тьонг Хуен.* Сходимость проекционно-разностного метода приближенного решения параболического уравнения с интегральным условием на решение // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: физика, математика. — 2011. — № 1. — С. 202–208.

[4] *Вайникко Г.М., Оя П.Э.* О сходимости и быстроте сходимости метода Галеркина для абстрактных эволюционных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1975. — Т. 11, № 7. — С. 1269–1277.

[5] *Смагин В.В.* Оценки скорости сходимости проекционного и проекционно-разностного методов для слабо разрешимых параболических уравнений // Математ. сборник. — 1997. — Т. 188, № 3. — С. 143–160.

[6] *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. — М.: Мир, 1980. — 512 с.

[7] *Васильева Т.Е., Смагин В.В.* Сходимость проекционного метода для уравнений с несимметричной главной частью // Сборник трудов молодых ученых математ. ф-та ВГУ. — Воронеж, 2001. — С. 38–42.

[8] *Марчук Г.И., Агошков В.И.* Введение в проекционно-сеточные методы. — М.: Наука, 1981 — 416 с.

[9] *Смагин В.В.* Среднеквадратичные оценки погрешности проекционно-разностного мелтода для параболических уравнений // Журн. вычислит. математ. и математ. физики. — 2000. — Т. 40, № 6. – С. 908–919.

[10] *Нгуен Тыонг Хуен, Смагин В.В.* Сходимость метода Галеркина приближенного решения параболического уравнения с симметричным оператором и интегральным условием на решение // International Scientific Journal. Spectral and Evolution problems. — Simferopol, 2011. — V. 21, № 2. — P. 65–74.

[11] *Оганесян Л.А., Руховец Л.А.* Вариационно-разностные методы решения элиптических уравнений. — Ереван, 1979. — 236 с.

[12] *Смагин В.В.* Коэрцитивные оценки погрешностей проекционного и проекционно-разностного методов для параболических уравнений // Математ. сборник. — 1994. — Т. 185, № 11. — С. 79–94.

Нгуен Тыонг Хуен, Факультет математики, механики и компьютерных наук – Институт натуральных наук – Вьетнамский государственный университет, Ханой
E-mail: chie1092004@yahoo.com

Nguyen Thuong Huyen, Department of Mathematics, Mechanics, Informatics - College of Natural Science - Vietnam National University, Hanoi
E-mail: chie1092004@yahoo.com