УДК 512.563.6

# ПРОДУКЦИОННО-ЛОГИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ НА БУЛЕВЫХ РЕШЁТКАХ

**И. Ю. Иванов**

*Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 04.04.2013 г.

**Аннотация**: вводится понятие продукционно-логического уравнения на булевой решётке. Оно опирается на общую теорию продукционно-логических отношений на решётках. Для случая конечной решётки рассматриваются некоторые свойства таких уравнений и доказывается единственность решения. Решение произвольного продукционно-логического уравнения на конечной булевой решётке сводится к решению множества уравнений с элементарными правыми частями. С целью упрощения изучения логических связей вводится понятие канонического отношения на дистрибутивной решётке. Доказывается существование логически эквивалентного канонического отношения для произвольного отношения в случае конечной дистрибутивной решётки.

**Ключевые слова**: решётка, продукционно-логическое отношение, каноническое отношение, продукционно-логическое уравнение.

**Abstract**: the concept of production-logical equation on boolean lattice is introduced which is based on general production-logical relations theory. Some properties of such equations are considered in case of finite lattice. The solution process of an arbitrary production-logical equation on a finite boolean lattice is reduced to solving a set of equations with elementary right-hand members. The concept of canonical relation on distributive lattice is introduced in order to simplify the study of logical connections. An existance of logically equivalent canonical relation for an arbitrary relation is proved in case of finite distributive lattice.

**Keywords**: lattice, production-logical relation, canonical relation, production-logical equation.

## ВВЕДЕНИЕ

Один из подходов к построению и исследованию формальных логических систем состоит в «алгебраизации логики». В качестве примера можно привести теорию Линденбаума-Тарского [1]. Она рассматривает формализованный пропозициональный язык как универсальную алгебру, операции которой соответствуют логическим связкам данного языка. Однако общая алгебраическая логика, расширяя возможности исследования самих логических теорий («метаматематика»), существенно не облегчает их практического применения. В силу своей универсальности она не решает ряда важных частных проблем, связанных с широко распространенными на практике *логическими системами продукционного типа.* Такие системы основываются на правилах (продукциях) вида «$A$ порождает $B$», где предпосылка $A$ и заключение $B$ являются элементами некоторой иерархии. Семантика продукций обычно импликативна: «если справедливо $A$, то справедливо $B$», однако в информатике возможны и другие интерпретации подобных правил [2].

В монографии [3] построена математическая основа продукционно-логических систем, которая, не выходя за рамки имеющейся модели (соответственно, не снижая её применимости), позволяет проводить формальные исследования таких систем. Как известно [4], естественным и эффективным средством представления знаний служат математические решётки. С учетом этого были предложены алгебраические структуры, рассматривающие задачи формализации знаний с точки зрения теории решёток и отношений. Решётка вместе с заданным на ней дополнительным отношением названа LP-структурой (Lattice-Production Structure). В [3] был также введён и исследован класс продукционно-логических уравнений, позволяющий оптимизировать обратный продукционно-логический вывод. Однако семантика таких уравнений существенно ограничена. Она содержит операции, соответствующие всего лишь двум логическим связкам – импликации и конъюнкции. Именно такой минимум операций свойственен набору правил типичной продукционной системы.

Одно из возможных направлений развития теории LP-структур состоит в расширении её логики. Это позволит решать более сложные и актуальные практические задачи. В частности, некоторые продукционные системы в качестве предпосылок и следствий своих правил могут содержать не только конъюнкции термов, но также дизъюнкции и отрицания [5]. В настоящей работе вводится и исследуется класс уравнений в LP-структуре, логика которой расширена до полного набора логических связок пропозиционального языка. Изучены следующие основные вопросы: каноническое представление LP-структуры, сведение уравнения к простейшему виду, единственность решения.

## 1. РЕШЁТКИ И БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

Напомним некоторые основные понятия из теории решёток [6] и отношений на решётках, необходимые в дальнейшем.

Множество $\mathbb{F}$ с частичным порядком $\leqslant$ («не больше») называется решёткой, если для любой пары элементов $a, b \in \mathbb{F}$ существуют в $\mathbb{F}$ их точные нижняя и верхняя грани. При этом $\inf\{a, b\}$ называется пересечением элементов $a, b$ и обозначается $a \wedge b$, $\sup\{a, b\}$ называется объединением элементов $a, b$ и обозначается $a \vee b$.

Как обычно, для частично упорядоченных множеств будем различать понятия максимального элемента (для него нет большего элемента) и наибольшего элемента (он больше всех).

Элемент $a$ решётки $\mathbb{F}$ называется неразложимым (конеразложимым), если из того, что $a = b \vee c$ $(a = b \wedge c)$, $b, c \in \mathbb{F}$, следует $a = b$ или $a = c$.

Представление $x = x_1 \vee ... \vee x_n$ $(x = x_1 \wedge ... \wedge x_n)$ на решётке называется сократимым, если

$$x = x_1 \vee ... \vee x_{i-1} \vee x_{i+1} \vee ... \vee x_n$$

$$(x = x_1 \wedge ... \wedge x_{i-1} \wedge x_{i+1} \wedge ... \wedge x_n)$$

для некоторого $1 \leqslant i \leqslant n$; в противном случае оно называется несократимым.

Непустое подмножество $\mathbb{H}$ решётки $\mathbb{F}$ называется подрешёткой, если оно замкнуто относительно операций $\wedge, \vee$.

**Замечание 1.1.** Пересечение подрешёток решётки $\mathbb{F}$ является подрешёткой решётки $\mathbb{F}$ и одновременно подрешёткой каждого из операндов, входящих в пересечение. В самом деле, пусть $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ – подрешётки решётки $\mathbb{F}$ и $\mathbb{Z} = \mathbb{X} \cap \mathbb{Y}$. Если $a, b \in \mathbb{Z}$, то $a, b \in \mathbb{X}$ и $a, b \in \mathbb{Y}$. Так как $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ – подрешётки, то $a \wedge b \in \mathbb{X}$ и $a \wedge b \in \mathbb{Y}$. Следовательно $a \wedge b \in \mathbb{Z}$. Рассуждая аналогично, можно получить, что $a \vee b \in \mathbb{Z}$. Таким образом, множество $\mathbb{Z}$ замкнуто относительно операций пересечения и объединения и, следовательно, является подрешёткой решётки $\mathbb{F}$. Если же подрешётки $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ рассматривать как самостоятельные решётки, то в силу $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{X}, \mathbb{Y}$ получаем, что $\mathbb{Z}$ – подрешётка каждой из решёток $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$.

Непустое подмножество $H$ решётки $\mathbb{F}$ называется порождающим множеством подрешётки $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{F}$, если $\mathbb{H}$ является наименьшей подрешёткой, содержащей $H$. При этом сама подрешётка $\mathbb{H}$ называется подрешёткой $\mathbb{F}$, порождённой множеством $H$.

Решётка $\mathbb{F}$ называется дистрибутивной, если для любых $a, b, c \in \mathbb{F}$ выполняются равенства:

- $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
- $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

**Замечание 1.2.** Если $\mathbb{F}$ – конечная дистрибутивная решётка, то любой $x \in \mathbb{F}$ имеет:

a) единственное несократимое представление в виде объединения неразложимых элементов:

$$x = x_1 \vee ... \vee x_m$$

([6]: глава II, §1, следствие 13);

b) единственное несократимое предстaвдение в виде пересечения конеразложимых элементов:

$$x = y_1 \wedge ... \wedge y_n$$

(утверждение, двойственное к a)).

**Замечание 1.3.** Пусть $H$ – множество дважды неразложимых элементов конечной дистрибутивной решётки $\mathbb{F}$. Тогда если $x$ – некоторое выражение над элементами из $H$, то $x \in \mathbb{F}$ в силу замкнутости $\mathbb{F}$ относительно операций $\wedge, \vee$. Обратно, пусть $x \in \mathbb{F}$. Произведём разложение для $x$, описанное в части a) замечания 1.2, а затем для каждого элемента полученного разложения произведём разложение, описанное в части b) того же замечания. Элементы полученного выражения принадлежат $H$. Таким образом, в силу леммы 3 из [6]: глава I, §4, получаем, что $H$ – порождающее множество решётки $\mathbb{F}$.

Решётка $\mathbb{F}$ называется ограниченной, если существуют такие $O, I \in \mathbb{F}$, что $O \leqslant a \leqslant I$ для любого $a \in \mathbb{F}$. Ограниченная решётка $\mathbb{F}$ называется решёткой с дополнениями, если для любого $a \in \mathbb{F}$ существует $a' \in \mathbb{F}$, называемый дополнением $a$, такой, что $a \wedge a' = O, a \vee a' = I$.

Булевой решёткой называется дистрибутивная решётка с дополнениями.

В дальнейшем, если речь идёт об отношении на решётке, всюду подразумевается бинарное отношение.

Отношение $R$ на решётке $\mathbb{F}$ называется дистрибутивным [3], если выполнены условия:

- для любых пар вида $(a, b_1), (a, b_2) \in R$ справедливо $(a, b_1 \wedge b_2) \in R$;
- для любых пар вида $(a_1, b), (a_2, b) \in R$ справедливо $(a_1 \vee a_2, b) \in R$.

Отношение $R$ на решётке с дополнениями $\mathbb{F}$ называется контрапозиционным [3], если из $(a, b) \in \mathbb{F}$ следует $(b', a') \in \mathbb{F}$.

Отношение на булевой решётке называется продукционно-логическим (далее просто логическим), если оно содержит $\leqslant$, а также является контрапозиционным, дистрибутивным и транзитивным [7]. Логическим замыканием произвольного отношения $R$ называется наименьшее логическое отношение, содержащее $R$.

Два отношения $R_1$, $R_2$, имеющие общее логическое замыкание, называются логически эквивалентными (далее просто эквивалентными; обозначение $R_1 \sim R_2$).

Пусть $R$ – отношение на булевой решётке $\mathbb{F}$. Важным является понятие логической связи, введённое в монографии [3].

**Определение 1.1.** Пара $(a, b) \in \mathbb{F} \times \mathbb{F}$ называется логически связанной отношением $R$ (этот факт обозначается $a \xrightarrow{R} b$), если выполнено одно из условий:

1) $(a, b) \in R$;

2) $a \leqslant b$;

3) $b' \xrightarrow{R} a'$;

4) существуют такие $b_1, b_2 \in \mathbb{F}$, что $b_1 \wedge b_2 = b$, причём $a \xrightarrow{R} b_1$, $a \xrightarrow{R} b_2$;

5) существуют такие $a_1, a_2 \in \mathbb{F}$, что $a_1 \vee a_2 = a$, причём $a_1 \xrightarrow{R} b$, $a_2 \xrightarrow{R} b$;

6) существует элемент $c \in \mathbb{F}$ такой, что $a \xrightarrow{R} c$ и $c \xrightarrow{R} b$.

В [3] доказано, что для произвольного отношения $R$ на булевой решётке $\mathbb{F}$ логическое замыкание существует и совпадает с множеством $\xrightarrow{R}$ всех упорядоченных пар, логически связанных отношением $R$.

**Замечание 1.4.** Для того, чтобы доказать логическую эквивалентность двух отношений $R_1, R_2$, достаточно показать два вложения:

- $R_1 \subseteq \xrightarrow{R_2}$
- $R_2 \subseteq \xrightarrow{R_1}$

Это следует из леммы 2.2.1 в [3].

**Замечание 1.5.** Аналогично вводится понятие продукционно-логического отношения на дистрибутивной решётке, если исключить в определениях свойство контрапозиционности.

## 2. КАНОНИЧЕСКИЕ ОТНОШЕНИЯ

Исследование логических связей, порождаемых на решётке отношением $R$, не может на практике основываться на изучении всего отношения $\xrightarrow{R}$, так как построение логического замыкания представляет собой ресурсоёмкую задачу, в общем случае имеющую экспоненциальную сложность. Поэтому целесообразно разрабатывать методы, основывающиеся на свойствах самого отношения $R$. С этой целью введём понятие канонического отношения на дистрибутивной решётке. В таком отношении исходные логические связи имеют простейший вид.

**Определене 2.1.** Отношение $R$ на дистрибутивной решётке $\mathbb{F}$ называется каноническим, если левые части всех его пар являются неразложимыми элементами, а правые части – конеразложимыми элементами.

Рассмотрим далее вопрос преобразования произвольного отношения к каноническому виду.

**Лемма 2.1.** *Пусть $R$ – отношение на булевой решётке $\mathbb{F}$. Пусть также $(a, b) \in R$, причём*

$$b = \bigwedge_{i=1}^{n} b_i, b_i \in \mathbb{F}$$

*Тогда отношение $R'$, полученное из $R$ путём замены пары $(a, b)$ совокупностью пар $\{(a, b_i) : i = 1, \ldots, n\}$, эквивалентно $R$.*

**Доказательство.** Обозначим $R_1 = \{(a, b)\}$, $R_2 = \{(a, b_i) : i = 1, \ldots, n\}$ и $D = R \setminus R_1$.

Покажем, что $R_1 \subseteq \xrightarrow{R_2}$. Так как $a \xrightarrow{R_2} b_i$, $i = 1, \ldots, n$, то по правилу 4) определения 1.1 имеем $a \xrightarrow{R_2} b$, то есть $(a, b) \in \xrightarrow{R_2}$.

Покажем теперь, что $R_2 \subseteq \xrightarrow{R_1}$. Поскольку $a \xrightarrow{R_1} b$ и $b \leqslant b_i$, $i = 1, \ldots, n$, то по правилам 2), 6) определения 1.1 $a \xrightarrow{R_1} b_i$, $i = 1, \ldots, n$, т.е. $(a, b_i) \in \xrightarrow{R_1}$, $i = 1, \ldots, n$.

Таким образом, из замечания 1.4 следует, что $R_1 \sim R_2$. Применяя к отношениям $R_1, R_2, D$ следствие 4.1.1.2 из [3], получаем $R_1 \cup D \sim R_2 \cup D$, то есть $R \sim R'$. $\square$

**Лемма 2.2.** *Пусть $R$ – отношение на булевой решётке $\mathbb{F}$. Пусть также $(a, b) \in R$, причём*

$$a = \bigvee_{i=1}^{n} a_i, a_i \in \mathbb{F}$$

*Тогда отношение $R'$, полученное из $R$ путём замены пары $(a, b)$ совокупностью пар $\{(a_i, b) : i = 1, \ldots, n\}$, эквивалентно $R$.*

**Доказательство.** Обозначим $R_1 = \{(a, b)\}$, $R_2 = \{(a_i, b) : i = 1, \ldots, n\}$ и $D = R \setminus R_1$.

Покажем, что $R_1 \subseteq \xrightarrow{R_2}$. Так как $a_i \xrightarrow{R_2} b$, $i = 1, \ldots, n$, то по правилу 5) определения 1.1 имеем $a \xrightarrow{R_2} b$, то есть $(a, b) \in \xrightarrow{R_2}$.

Покажем теперь, что $R_2 \subseteq \xrightarrow{R_1}$. Поскольку $a_i \leqslant a$, $i = 1, \ldots, n$ и $a \xrightarrow{R_1} b$, то по правилам 2), 6) определения 1.1 получаем $a_i \xrightarrow{R_1} b$, $i = 1, \ldots, n$, т.е. $(a_i, b) \in \xrightarrow{R_1}$, $i = 1, \ldots, n$.

Таким образом, из замечания 1.4 следует, что $R_1 \sim R_2$. Применяя к отношениям $R_1, R_2, D$ следствие 4.1.1.2 из [3], получаем $R_1 \cup D \sim R_2 \cup D$, то есть $R \sim R'$. $\square$

**Теорема 2.1.** *Пусть $R$ – отношение на булевой решётке $\mathbb{F}$. Пусть также $(a, b) \in R$, причём*

$$a = \bigvee_{i=1}^{m} a_i, a_i \in \mathbb{F}$$

$$b = \bigwedge_{j=1}^{n} b_j, b_j \in \mathbb{F}$$

*Тогда отношение $R'$, полученное из $R$ путём замены прары $(a, b)$ совокупностью пар $\{(a_i, b_j) : i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n\}$, эквивалентно $R$.*

**Доказательство.** Обозначим $R_1 = \{(a, b_j : j = 1, \ldots, n)\}$, $R_2 = \{(a_i, b_j) : i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n\}$, $D = R \setminus \{(a, b)\}$. Тогда $R' = R_2 \cup D$.

По лемме 2.1 получаем $R \sim R_1 \cup D$, по лемме 2.2, применённой к каждой паре $R_1$, получаем $R_1 \sim R_2$. Тогда $R_1 \cup D \sim R_2 \cup D$. Следовательно $R \sim R'$. $\square$

**Следствие 2.1.** *Для любого отношения на конечной дистрибутивной решётке существует эквивалентное ему каноническое отношение.*

**Доказательство.** Пусть $R$ – отношение на конечной дистрибутивной решётке $\mathbb{F}$. Представим все левые части отношения в виде разложения a) из замечания 1.2, правые части – в виде разложения b) из того же замечания. Далее для каждой пары произведём замену, описанную в теореме 2.1. Полученное отношение является каноническим, и по теореме 2.1 эквивалентно $R$. $\square$

## 3. ПРОДУКЦИОННО-ЛОГИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Понятие продукционно-логического уравнения, вводимое далее, тесно связано с процессом обратного логического вывода в моделируемой системе. Этот процесс заключается в следующем: по имеющемуся множеству фактов, истинность которых известна (начальное множество), путем применения правил из множества продукций подтверждается или опровергается истинность факта, не содержащегося в начальном множестве (гипотезы).

Пусть $R$ – отношение на булевой решётке $\mathbb{F}$.

**Определение 3.1.** Дважды неразложимый элемент $x \in \mathbb{F}$ называется начальным при отношении $R$, если

1) для любой пары $a \xrightarrow{R} b$ из $b = b_1 \wedge x$, $b_1 \in \mathbb{F}$ следует $a = a_1 \wedge x$, $a_1 \in \mathbb{F}$;

2) для любой пары $c \xrightarrow{R} d$ из $d = d_1 \vee x$, $d_1 \in \mathbb{F}$ следует $c = c_1 \vee x$, $c_1 \in \mathbb{F}$.

**Определение 3.2.** Подрешётка решётки $\mathbb{F}$, порождённая множеством дважды неразложимых начальных при отношении $R$ элементов $\mathbb{F}$, называется начальным множеством решётки $\mathbb{F}$ при отношении $R$ и обозначается $\mathbb{F}_0(R)$ (или просто $\mathbb{F}_0$, если ясно, о каком отношении идёт речь).

С точки зрения обратного логического вывода начальный элемент (т.е. элемент подрешётки $\mathbb{F}_0$) — это факт, истинность которого невозможно подтвердить на основании имеющегося множества продукций ни при каком множестве выполненных фактов, не содержащем сам этот факт.

Если для $a, b \in \mathbb{F}$ выполнено $a \xrightarrow{R} b$, то говорят (как это принято в теории отображений), что $b$ является образом $a$ при отношении $\xrightarrow{R}$, $a$ является прообразом $b$ при отношении $\xrightarrow{R}$, и при этом применяют обозначение $b = R^L(a)$ (под $R^L$ подразумевается отношение $\xrightarrow{R}$).

**Определение 3.3.** Продукционно-логическим (далее просто логическим) уравнением на булевой решётке $\mathbb{F}$ называется уравнение вида

$$R^L(x) = b \tag{1}$$

где $b \in \mathbb{F}$ – заданный элемент, $x$ – искомый в $\mathbb{F}$ элемент.

**Определение 3.4.** Решением уравнения (1) называется максимальный прообраз элемента $b$ из начального множества $\mathbb{F}_0$. Приближённым решением уравнения (1) называется любой прообраз $b$ из $\mathbb{F}_0$.

По определению решение является и приближённым решением.

**Теорема 3.1.** *Приближённые решения уравнения* (1) *образуют подрешётку в* $\mathbb{F}_0$.

**Доказательство.** Пусть $\mathbb{H}$ – множество прообразов элемента $b$ при отношении $\xrightarrow{R}$. Если $x_1, x_2 \in \mathbb{H}$, то из $x_1 \wedge x_2 \leqslant x_1$ имеем по правилу 6) определения 1.1 $x_1 \wedge x_2 \xrightarrow{R} b$, а по правилу 5) того же определения имеем $x_1 \vee x_2 \xrightarrow{R} b$. Поэтому $x_1 \wedge x_2, x_1 \vee x_2 \in \mathbb{H}$, т.е. множество $\mathbb{H}$ замкнуто относительно операций $\wedge, \vee$. Следовательно оно является подрешёткой решётки $\mathbb{F}$. Тогда множество $\mathbb{F}_0 \cap \mathbb{H}$, если оно не пусто, является подрешёткой решётки $\mathbb{F}_0$ как пересечение подрешёток (замечание 1.1). $\square$

Подрешётку приближённых решений уравнения (1) будем обозначать $\mathbb{X}$.

**Следствие 3.1.** *Решение уравнения* (1), *если оно существует, является наибольшим элементом подрешётки* $\mathbb{X}$.

**Доказательство.** Пусть $m$ – решение уравнения (1), то есть $m$ – максимальный элемент $\mathbb{X}$ как частично упорядоченного множества. Покажем, что в $\mathbb{X}$ не существует элементов, несравнимых с $m$.

Предположим противное: $x_0 \in \mathbb{X}$ несравним с $m$. Тогда $m < x_0 \vee m$. Но $x_0 \vee m \in \mathbb{X}$ (так как $\mathbb{X}$ – подрешётка). Получаем противоречие с тем, что $m$ – максимальный элемент множества $\mathbb{X}$.

Итак, в $\mathbb{X}$ не существует элементов, несравнимых с $m$. Поэтому для любого $x \in \mathbb{X}$ имеем $x \leqslant m$, то есть $m$ – наибольший элемент множества $\mathbb{X}$. $\square$

**Следствие 3.2.** *Если уравнение* (1) *имеет решение, то оно единственно.*

**Доказательство.** Вытекает из единственности наибольшего элемента решётки, в частности, подрешётки $\mathbb{X}$. $\square$

Таким образом, по следствию 3.1 максимальный прообраз в определении решения уравнения (1) (определение 3.4) можно заменить наибольшим прообразом.

**Лемма 3.1.** *Пусть* $\mathbb{F}$ *– конечная булева решётка. Тогда если уравнение* (1) *имеет приближённое решение, то оно имеет решение.*

**Доказательство.** Пусть уравнение (1) имеет приближённое решение. Тогда подрешётка $\mathbb{X}$ непуста. В силу того, что она конечна, она ограничена, а следовательно, имеет наибольший элемент, который и является решенеим уравнения (1). $\square$

Далее будем рассматривать только конечные решётки.

Пусть имеется уравнение

$$R^L(x) = b_1 \wedge b_2 \tag{2}$$

и уравнения

$$R^L(x) = b_1 \tag{3}$$

$$R^L(x) = b_2 \tag{4}$$

на конечной булевой решётке $\mathbb{F}$.

**Теорема 3.2.** *Если* $x_1$ *– решение уравнения* (3)*,* $x_2$ *– решение уравнения* (4)*, то* $x_1 \wedge x_2$ *– решение уравнения* (2).

**Доказательство.** Ясно, что $x_1 \wedge x_2$ – приближённое решение уравнения (2). Тогда по лемме 3.1 уравнение (2) имеет решение. Пусть $x_0$ есть это решение. Покажем, что $x_0 = x_1 \wedge x_2$.

Предположим противное: $x_0 \neq x_1 \wedge x_2$. Так как $x_0$ – наибольший прообраз $b_1 \wedge b_2$ при отношении $\xrightarrow{R}$ из $\mathbb{F}_0$, то $x_1 \wedge x_2 < x_0$. Из $x_0 \xrightarrow{R} b_1 \wedge b_2$, $b_1 \wedge b_2 \leqslant b_1$, $b_1 \wedge b_2 \leqslant b_2$ имеем $x_0 \xrightarrow{R} b_1$, $x_0 \xrightarrow{R} b_2$. Так как $x_1, x_2$ – наибольшие прообразы $b_1, b_2$ соответственно при отношении $\xrightarrow{R}$ из $\mathbb{F}_0$, то $x_0 \leqslant x_1$, $x_0 \leqslant x_2$, откуда $x_0 \leqslant x_1 \wedge x_2$, что противоречит сделанному выше предположению. □

**Следствие 3.3.** Уравнение (2) имеет решение тогда и только тогда, когда каждое из уравнений (3), (4) имеет решение.

**Доказательство.** *Необходимость.* Пусть $x$ – решение уравнения (2). В силу $x \xrightarrow{R} b_1 \wedge b_2$, $b_1 \wedge b_2 \leqslant b_1$, $b_1 \wedge b_2 \leqslant b_2$ имеем $x \xrightarrow{R} b_1$, $x \xrightarrow{R} b_2$. Тогда по лемме 3.1 уравнения (3), (4) имеют решения.

*Достаточность.* Следует из теоремы 3.2. □

**Замечание 3.1.** Если рассматривать уравнение

$$R^L(x) = a_1 \vee a_2 \tag{5}$$

и соответствующие ему элементарные уравнения

$$R^L(x) = a_1 \tag{6}$$

$$R^L(x) = a_2 \tag{7}$$

то получить утверждение, двойственное теореме 3.2, невозможно. Покажем это на примере. Пусть подбрасывается игральная кость, грани которой перенумерованы числами от одного до шести. Рассмотрим некоторые из возможных высказываний о результатах подбрасывания:

$\alpha_1 =$ «выпала двойка»,

$\alpha_2 =$ «выпала четвёрка»,

$\alpha_3 =$ «выпала шестёрка»,

$\beta =$ «выпало чётное число».

Тогда гипотеза $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3$ подтверждается естественным правилом $\beta \to \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3$, при условии, что высказывание $\beta$ является истинным. В то же время каждая из гипотез $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ по отдельности не порождается истинностью высказывания $\beta$, то есть $\beta$ в данном случае не может являться решением уравнения с правыми частями $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Рассмотрим правую часть уравнения (1), предполагая, что решётка $\mathbb{F}$ конечна. Представим её в виде несократимого пересечения конеразложимых элементов (это возможно по пункту b) замечания 1.2):

$$b = b_1 \wedge b_2 \wedge ... \wedge b_n$$

По теореме 3.2 решение уравнения (1) может быть получено как пересечение решений уравнений

$$R^L(x) = b_i, i = 1, ..., n \tag{8}$$

При этом по следствию 3.3 получаем, что уравнение (1) имеет решение тогда и только тогда, когда каждое из уравнений (8) имеет решение, и не имеет решения, если хотя бы одно из них не имеет решения.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрена алгебраическая структура, моделирующая продукционные системы с расширенной логикой. В качестве основы используется булева решетка с дополнительным бинарным отношением. Получен ряд результатов, позволяющих обосновать и автоматизировать процессы управления знаниями в интеллектуальных системах с расширенной логикой. Понятие продукционно-логического уравнения и результаты о его разрешимости открывают возможности для формализации обратного логического вывода и его оптимизации.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Расёва Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики: пер. с англ. / Е. Расёва, Р. Сикорский. — М.: Наука, 1972. — 591 с.

[2] *Чечкин А. В.* Математическая информатика / А. В. Чечкин. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. — 360 с.

[3] *Махортов С. Д.* Математические основы искусственного интеллекта: теория LP-структур для построения и исследования моделей знаний продукционного типа / Под ред. В. А. Васенина. — М.: МЦНМО, 2009. — 304 с.

[4] *Тейз А., Грибомон П.* Логический подход к искусственному интеллекту: от классической логики к логическому программированию: пер. с франц. / А. Тейз, П. Грибомон и др. — М.: Мир, 1990. — 432 с.

[5] *Davis R., King J.* An overview of production systems / R. Davis, J. King // Machine Intelligence. — Chichester: Ellis Horwood Limited. — 1977. — Vol. 8. — P. 330–332.

[6] *Гретцер Г.* Общая теория решёток: пер. с англ. / Под редакцией Д. М. Смирнова. — М.: Мир, 1981. — 456 с.

[7] *Aho A. V.* The transitive reduction of a directed graph. SIAM J. Computing 1 : 2 / A. V. Aho, M. R. Garey, J. D. Ulman, 1972. — P. 131–137.

*Иванов И. Ю., магистрант кафедры математического обеспечения электронных вычислительных машин Воронежского госуниверситета*
*E-mail: hour1scorp@gmail.com*
*Тел.: +7–910–288–56–34*

*Ivanov I. Y., magistrant, Applied and System Software Department, Voronezh State University*
*E-mail: hour1scorp@gmail.com*
*Tel.: +7–910–288–56–34*