УДК 517.518

О СЖАТИЯХ ПСЕВДОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ*

М. Б. Зверева, С. А. Шабров

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 12.03.2013 г.

Аннотация: работа посвящена изучению операторов обобщенного сжатия в псевдометрических пространствах, т.е. в пространствах с метрикой, значения которой берутся из множества положительных элементов (в смысле конуса) линейного полуупорядоченного банахова пространства. Такие операторы часто используются в исследованиях уравнений с почти периодическими и периодическими решениями. С помощью методов, развитых М.А. Красносельским, были получены условия, когда оператор обобщенного сжатия является обычным сжимающим оператором в некоторой метрике, принимающей числовые значения. В частности, такими условием является возможность введения эквивалентной нормы, являющейся монотонной на конусе. Это условие выполнено, если конус является нормальным.
Ключевые слова: обобщенное метрическое пространство, конус, положительный оператор, сжимающее отображение.

Abstract: the work is devoted to the study of the operators of the generalized compression in pseudo metric spaces, i.e., in spaces with metrics, whose values are taken from the set positive elements (in the sense of a cone) of linear semi-ordered Banach space. These operators are often used in studies of equations with almost periodic and periodic solutions. With the help of methods, developed M.A. Krasnoselskii, were obtained conditions, when the operator of generalized compression is the usual contraction operator in some the metric, the host of numeric values. In particular, such a condition is the possibility of introducing the equivalent norm, which is monotone on the cone. This condition is fulfilled if the cone is the normal.
Keywords: generalized metric space, a cone, a positive operator, contracting mapping.

Пусть E — банахово пространство с конусом K (в смысле М. Г. Крейна, М. А. Красносельского [1], [2]). Следуя Курепе, Коллатцу, А. И. Перову [3] множество M будем называть обобщенным метрическим пространством (псевдометрическим), если каждой паре точек x и y из этого множества поставлен в соответствие элемент $\rho(x,y)$ из конуса K так, что выполнены следующие условия:

1. $\rho(x,y) \geqslant 0, \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;
3. $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$.

При выполнении этих требований векторную функцию $\rho : M \times M \to K$ называют обобщенной метрикой.

Мы будем придерживаться терминологии из [1], [2]. Линейный оператор A называется положительным, если он преобразует конус K в себя, т.е. из $x \geqslant 0 \Rightarrow Ax \geqslant 0$.

Пусть M — обобщенное метрическое пространство с обобщенной метрикой $\rho(x,y)$, и A есть некоторое отображение M в себя, т.е. $A : M \to M$. Отображение A называется обобщенным сжимающим отображением, если выполнено условие

$$\rho(Ax, Ay) \leqslant Q\rho(x,y)$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 12-01-00392

для всех x, y из M, где $Q : E \to E$ — положительный непрерывный линейный оператор, спектральный радиус которого меньше единицы. Выясним, при каких условиях оператор обобщенного сжатия является обычным сжимающим оператором в некоторой метрике.

Будем называть пространство E структурно K-нормируемым, если в E существует такая норма $\|\cdot\|$, которая эквивалентна исходной в E и монотонна на K, т.е.

$$0 \leqslant u \leqslant v \Rightarrow \|u\| \leqslant \|v\|.$$

В случае, когда $E = R^n$, либо $E = C[a,b]$, $E = L^p$, а K — конус неотрицательных векторов или соответственно неотрицательных функций, то исходная норма уже является монотонной. То есть эти пространства структурно K-нормируемы.

Теорема 1. *Если пространство E структурно K — нормируемо, то оператор обобщенного сжатия является обычным сжимающим оператором в некоторой (обычной) метрике $\mu(x,y)$, т.е. для любых $x \in M, y \in M$ верно*

$$\mu(Ax, Ay) \leqslant \gamma\mu(x,y),$$

где число $\gamma < 1$.

Доказательство. Так как E структурно K — нормируемо, то на E можно ввести норму $\|\cdot\|_0$, монотонную на K и эквивалентную исходной $\|\cdot\|$. Обозначим через p_0 спектральный радиус оператора Q ($p_0 = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|Q^n\|}$ [4]). Заметим, что спектральный радиус не меняется при переходе к эквивалентной норме [5]. Введем [1] норму $\|\cdot\|_1$, эквивалентную $\|\cdot\|_0$, как

$$\|x\|_1 = \|x\|_0 + \frac{\|Qx\|_0}{(p_0+\varepsilon_0)} + \ldots + \frac{\|Q^{n_0-1}x\|_0}{(p_0+\varepsilon_0)^{n_0-1}}.$$

Здесь $\varepsilon_0 = \dfrac{1-p_0}{2} > 0$, число n_0 не зависит от x и выбирается так, чтобы для всех x $\|Q^{n_0}x\|_0 < (p_0+\varepsilon_0)^{n_0}\|x\|_0$. Тогда из равенства

$$\|Qx\|_1 = (p_0+\varepsilon_0)\|x\|_1 + \frac{\|Q^{n_0}x\|_0}{(p_0+\varepsilon_0)^{n_0-1}} - (p_0+\varepsilon_0)\|x\|_0$$

следует, что

$$\|Q\|_1 \leqslant (p_0+\varepsilon_0).$$

Так как $\|\cdot\|_0$ была монотонна относительно K, то из положительности Q следует монотонность $\|\cdot\|_1$ относительно K.

Введем на M метрику, полагая для всех x и y из M

$$\mu(x,y) = \|\rho(x,y)\|_1.$$

Обозначим $u = \rho(Ax, Ay)$, $v = Q\rho(x,y)$, где x, y — произвольные элементы из M. Заметим, что $0 \leqslant u \leqslant v$. Значит, $\|u\|_1 \leqslant \|v\|_1$. Тогда

$$\mu(Ax,Ay) = \|\rho(Ax,Ay)\|_1 \leqslant \|Q\rho(x,y)\|_1 \leqslant \|Q\|_1\|\rho(x,y)\|_1 \leqslant (p_0+\varepsilon_0)\mu(x,y) = \gamma\mu(x,y),$$

где $\gamma = p_0 + \dfrac{1-p_0}{2} = \dfrac{1+p_0}{2} < 1$. Теорема доказана.

Пусть E — произвольное банахово пространство с конусом K. Предположим, что конус K является нормальным, т.е. существует такое число $\delta > 0$, что для любых элементов e_1, e_2 из конуса, таких, что $\|e_1\| = \|e_2\| = 1$ следует, что $\|e_1 + e_2\| \geqslant \delta$. При произвольном конусе K

$$\|x\|_0 = \max\{\inf_{u\leqslant x}\|u\|, \inf_{v\geqslant x}\|v\|\}$$

определяет на всем E монотонную норму [2]. Причем, эта норма при условии нормальности конуса, будет эквивалентна исходной. Следовательно, банахово пространство E будет структурно K-нормируемым, если конус K нормален. Таким образом, при условии нормальности конуса оператор обобщенного сжатия будет являться обычным сжимающим оператором.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений / М.А. Красносельский. — М: Наука, 1962. — 394 с.

[2] Красносельский М. А. Позитивные линейные системы / М.А. Красносельский, Е.А. Лифшиц, А.В. Соболев. — М: Наука, 1985. — 254 с.

[3] Перов А.И. Принцип сжимающих отображений в теории нелинейных колебаний / А.И. Перов. — Изд-во ВГУ, 2005. — 63 с.

[4] Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин — М: Физматлит (7е изд.), 2004. — 570 с.

[5] Треногин В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. — М: Наука, 1980. — 495 с.

Зверева М. Б., к.ф.-м.н., доцент, каф. математического анализа ВГУ
E-mail: margz@rambler.ru
Тел.: (473) 2-20-86-90

Zvereva M. B., Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University
E-mail: margz@rambler.ru
Tel.: (473) 2-20-86-90

Шабров С. А., к.ф.-м.н., доцент, каф. математического анализа ВГУ
E-mail: shaspoteha@mail.ru
Тел.: (473) 2-20-86-90

Shabrov S. A., Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University
E-mail: shaspoteha@mail.ru
Tel.: (473) 2-20-86-90