УДК 517.927.4

О НЕЛИНЕЙНЫХ ТЕОРЕМАХ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ РАДОНА-НИКОДИМА

М. Б. Давыдова, С. А. Шабров

Воронежский Государственный Университет

Поступила в редакцию 19.01.2013 г.

Аннотация: в работе изучается нелинейная краевая задача второго порядка с производными по мере. Получены достаточные условия существования и единственности нетривиального неотрицательного решения изучаемой краевой задачи.

Ключевые слова: нелинейная задача, краевая задача, производная по мере.

Abstract: we study the nonlinear boundary value problem of second-order derivatives to measure. Sufficient conditions for existence and uniqueness of nontrivial nonnegative solutions studied boundary value problem..

Keywords: nonlinear problem, boundary value problem, the derivative on the measure.

В последнее время возрос интерес к задаче Штурма–Лиувилля с производными по мере:

$$\begin{cases} -(pu'_x)'_\sigma + Q'_\sigma u = \lambda M'_\sigma u, & (1)\\ u(0) = u(\ell) = 0. & (2)\end{cases}$$

Обусловлено это тем, что уравнение (1) определено поточечно, т. е. является обыкновенным. Последнее, в отличии от теории обобщенных функций, когда (1) рассматривается как равенство функционалов, позволяет применять к анализу решений уравнения качественные методы. Так, в работах [1], [2] и [3], следуя концепции, предложенной Ю. В. Покорным и изложенной в [4], удалось построить точную параллель классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений вплоть до осцилляционных теорем, в то же время изучению нелинейных краевых задач уделяется недостаточно внимания.

Уравнение (1) задано почти всюду (в смысле меры σ) на множестве $\overline{[0;\ell]}_S$, которое строится следующим образом. Строго возрастающая на $[0;\ell]$ функция $\sigma(x)$, непрерывная в точках $x = 0$ и $x = \ell$, определяет неполное метрическое пространство $J_S = [0;\ell] \setminus S(\sigma)$, где $S(\sigma)$ — множество точек разрыва функции $\sigma(x)$ с метрикой

$$\varrho(x, y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|.$$

Стандартное пополнение, при котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменяется на упорядоченную пару $\{\xi - 0, \xi + 0\}$, обозначим через $\overline{[0;\ell]}_{S(\sigma)}$. Объединение $\overline{[0;\ell]}_{S(\sigma)}$ и $S(\sigma)$ нам даёт $\overline{[0;\ell]}_S$. На множестве $\overline{[0;\ell]}_S$ определим функцию сегмента $\sigma\left(\overline{[\alpha;\beta]}_S\right)$ для множества $\overline{[\alpha;\beta]}_S \subset \overline{[0;\ell]}_S$ следующим равенством

$$\sigma\left(\overline{[\alpha;\beta]}_S\right) = \sigma(\beta + 0) - \sigma(\alpha - 0).$$

Через σ обозначим аддитивную меру, полученную из функции $\sigma\left(\overline{[\alpha;\beta]}_S\right)$ стандартным распространением (см., например, [5]).

Используемому здесь и ниже понятию σ-производной можно придать следующий вид: σ-суммируемая функция $f(x)$ называется σ-производной $F(x)$, если множество полной σ-меры

$$F(x) - F(0) \equiv \int\limits_0^x f(s)\,(d\sigma)(s).$$

Последняя формула позволяет определять значения $f(x) = \frac{dF}{d\sigma}(x)$ в точке ξ либо как предел отношения

$$\frac{F(\xi+\varepsilon) - F(x)}{\sigma(\xi+\varepsilon) - \sigma(x)} \quad (\text{при } \varepsilon \to 0),$$

либо пару односторонних пределов (левая и правая производная), если они различны, либо тройку чисел, которая получается добавлением промежуточного (между левым и правым) значения производной, равной отношению скачков

$$\frac{F(\xi+0) - F(\xi-0)}{\sigma(\xi+0) - \sigma(\xi-0)}.$$

В точках $\xi \in S(\sigma)$ уравнение (1) принимает вид

$$-\Delta\left(pu'_x\right)(\xi) + \Delta Q(\xi)\cdot u(\xi) = \lambda \Delta M(\xi)\cdot u(\xi),$$

где $\Delta z(\xi)$ — полный скачок функции $z(x)$ в точке ξ: $\Delta z(\xi) = z(\xi+0) - z(\xi-0)$.

Здесь изучается нелинейное уравнение

$$\left(pu'_x\right)'_\sigma = f(x,u)u, \tag{3}$$

которое в точках ξ, принадлежащих множеству $S(\sigma)$, понимается как равенство

$$\Delta\left(pu'_x\right)(\xi) = f(\xi, u(\xi))\cdot u(\xi).$$

Будем предполагать, что функция $p(x)$ σ-абсолютно непрерывна на $\overline{[0;\ell]}_{S(\sigma)}$, $\min\limits_{x\in\overline{[0;\ell]}_{S(\sigma)}} p(x) > 0$ и $f(x,u)u$ удовлетворяет условиям Каратеодори:

1) $f(x,u)$ при почти всех x (относительно σ-меры) определена и непрерывна по u;

2) функция $f(x,u)$ измерима по x при каждом u;

3) $|f(x,u)| \leqslant m(x)$, где $m(x)$ σ-суммируемая функция на $\overline{[0;\ell]}_S$.

Решение уравнения (3) (и (1)) будем искать в классе E абсолютно непрерывных на $[0;\ell]$ функций, первая производная которых σ-абсолютно непрерывна на $\overline{[0;\ell]}_{S(\sigma)}$.

Условия, которые мы наложили на функции $p(x)$ и $f(x,u)\cdot u$ разрешимость уравнения (3), как в форме задачи Коши, так и краевой задачи [6], [7].

Теорема 1. *Пусть $f(x,u)$ убывает по u при $u \geqslant 0$ и каждом $x \in \overline{[0;\ell]}_S$; $u(x)$ некоторое решение уравнения (3), $(\alpha;\beta)$ — интервал, в котором решение $u(x)$ положительно; $u(\alpha) = u(\beta) = 0$; $v(x)$ — решение, линейно независимое с $u(x)$, кроме того, $u(x)$ и $v(x)$ не пересекаются в интервале $(\alpha;\beta)$. Тогда $v(x)$ не может иметь положительных на $(\alpha;\beta)$ значений.*

Доказательство. Предположим противное: найдется точка $x_0 \in (\alpha;\beta)$, в которой $v(x_0) > 0$. По условию $u(x) - v(x) \neq 0$ для всех $x \in (\alpha;\beta)$. Поэтому возможны два случая:

1) $u(x) - v(x) < 0$,

2) $u(x) - v(x) > 0$,

для всех $x \in (\alpha;\beta)$.

Рассмотрим первый случай. Имеем $0 < u(x) < v(x)$ для всех x из интервала $(\alpha;\beta) \subset \overline{[0;\ell]}_S$. Подставляя в уравнение (3) последовательно функции $u(x)$ и $v(x)$, первое полученное тождество умножим на $v(x)$, второе — на $u(x)$, и вычитая почленно одно из другого, будем иметь тождество

$$\left(pu'_x\right)'_\sigma(x)v(x) - \left(pv'_x\right)'_\sigma(x)u(x) \equiv \left[f(x,u(x)) - f(x,v(x))\right]u(x)v(x), \tag{4}$$

справедливое на отрезке $[\alpha;\beta]$. Проинтегрируем (4) по мере σ по интервалу $(\alpha;\beta)$:

$$\int\limits_{\alpha+0}^{\beta-0}\Big[\left(pu'_x\right)'_\sigma(x)v(x) - \left(pv'_x\right)'_\sigma(x)u(x)\Big]\,d\sigma(x) = \int\limits_{\alpha+0}^{\beta-0}\left[f(x,u(x)) - f(x,v(x))\right]u(x)v(x)\,d\sigma(x). \tag{5}$$

Проинтегрировав каждый из интегралов $\int\limits_{\alpha+0}^{\beta-0}\left(pu'_x\right)'_\sigma(x)v(x)\,d\sigma$ и $\int\limits_{\alpha+0}^{\beta-0}\left(pv'_x\right)'_\sigma(x)u(x)\,d\sigma$ по частям, равенство (5) перепишем следующим образом

$$pu'_xv\Big|_{\alpha+0}^{\beta-0} - pv'_xu\Big|_{\alpha+0}^{\beta-0} = \int\limits_{\alpha+0}^{\beta-0}\left[f(x,u(x)) - f(x,v(x))\right]u(x)v(x)\,d\sigma. \tag{6}$$

В силу непрерывности $u(x)$ и $v(x)$, убывания $f(x,u)$ по переменной u и равенств $u(\alpha) = u(\beta) = 0$, из (6) следует неравенство

$$pu'_x(\beta-0)v(\beta) - pu'_x(\alpha+0)v(\alpha) \geqslant 0. \tag{7}$$

С другой стороны, $pu'_x(\beta-0) < 0$, $pu'_x(\alpha+0) > 0$, $v(\beta) > 0$ и $v(\alpha) > 0$. Поэтому неравенство (7) приводит к противоречию:

$$0 > pu'_x(\beta-0)v(\beta) - pu'_x(\alpha+0)v(\alpha) \geqslant 0.$$

В этом случае теорема доказана.

Рассмотрим второй случай: $u(x) - v(x) > 0$. По условию $u(x)$ и $v(x)$ линейно независимы и не пересекаются на интервале $(\alpha;\beta)$. Поэтому существует интервал $(\alpha_1;\beta_1) \subset (\alpha;\beta)$ такой, что $v(x) > 0$ при всех $x \in (\alpha_1;\beta_1)$ и $v(\alpha_1) = v(\beta_1) = 0$. Проведя рассуждения, аналогичные проведенным в первом случае с заменой интервала $(\alpha;\beta)$ на интервал $(\alpha_1;\beta_1)$, мы придем к противоречивому неравенству

$$0 < -pv'_x(\beta_1-0)u(\beta_1) + pv'_x(\alpha_1+0)u(\alpha_1) \leqslant 0.$$

Таким образом теорема доказана. $\square$

Доказанная теорема является аналогом теоремы сравнения для нелинейных дифференциальных уравнений с производными по мере.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x,u)\cdot u$ возрастает по $u \geqslant 0$. Пусть $u(x)$ положительное на $(\alpha;\beta)$ решение уравнения* (3)*, причем $u(\alpha)=u(\beta)=0$; $v(x)$ линейно независимое с $u(x)$ решение* (3) *и пересекается в $(\alpha;\beta)$ с $u(x)$ в некоторой точке. Тогда такая точка единственна, и $v(x)$ не может не принимать отрицательных значений.*

Доказательство. Заметим, что количество точек пересечения $u(x)$ и $v(x)$ конечно, так как в противном случае $u(x)$ и $v(x)$ линейно зависимы. Пусть α_1 и β_1 — две соседние точки пересечения $u(x)$ и $v(x)$. Тогда, $u(x)$ и $v(x)$ два различных решения краевой задачи

$$\begin{cases} \left(pw_x'\right)_\sigma' = f(x,w)w, \\ w(\alpha_1) = u(\alpha_1), \\ w(\beta_1) = u(\beta_1), \end{cases}$$

что невозможно [6, Теорема 3].

Остается показать, что $v(x)$ обязана принимать отрицательные значения. Если предположить, что $v(x) \geqslant 0$ на отрезке $[\alpha;\beta]$, то $u(x)$ и $v(x)$ обязаны пересекаться как минимум еще в одной точке $[\alpha;\beta]$. Но как показано выше, эта точка не может быть внутренней отрезка $[\alpha;\beta]$, следовательно, $u(x)$ и $v(x)$ пересекаются в точке α или в точке β. Тогда, $u(x)$ и $v(x)$, как нетрудно видеть, линейно зависимы. □

Изложенные методы позволяют изучить нелинейную спектральную задачу

$$\begin{cases} -\left(pu_x'\right)_\sigma' = \lambda F(x,u), \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{cases} \tag{8}$$

при $\lambda > 0$. Через Λ обозначим множество положительных значений λ, при каждом из которых задача (8) имеет хотя бы одно решение.

Теорема 3. *Пусть $F(x,u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, положительна и строго убывает по u при всех x, u. Тогда при каждом $\lambda \in \Lambda$ существует единственное решение $u(x,\lambda)$ задачи* (8)*. Это решение положительно в $(0;\ell)$, и $u(x,\lambda)$ не убывает по λ при каждом x.*

Доказательство. Если $\lambda \in \Lambda$, то единственность решения задачи (8) следует из теоремы 2.

Обозначим через $G(x,s)$ функцию Грина краевой задачи

$$\begin{cases} -\left(pu_x'\right)_\sigma'(x) = f(x), \\ u(0) = u(\ell) = 0. \end{cases}$$

Как нетрудно видеть, $G(x,s)$ имеет вид

$$G(x,s) = \left(\int\limits_0^\ell \frac{dt}{p(t)}\right)^{-1} \int\limits_0^{\min\{x,s\}} \frac{dt}{p(t)} \cdot \int\limits_{\max\{x,s\}}^{\ell} \frac{dt}{p(t)}. \tag{9}$$

Из (9) следует, что $G(x,s) > 0$ при всех $(x,s) \in (0;\ell)\times(0;\ell)$. Отсюда и положительности $F(x,u)$ вытекает положительность решение задачи (8).

Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ и $\lambda_1 < \lambda_2$. Предположим, что при некотором x_0 справедливо неравенство $u(x_0,\lambda_1) > u(x_0,\lambda_2)$. Тогда существует интервал $(\alpha;\beta)$ такой, что $u(x,\lambda_1) - u(x,\lambda_2) > 0$ при всех $x \in (\alpha;\beta)$, и $u(\alpha,\lambda_1) - u(\alpha,\lambda_2) = 0$, $u(\beta,\lambda_1) - u(\beta,\lambda_2) = 0$. Более того,

$$\lambda_1 F(x,u(x,\lambda_1)) < \lambda_2 F(x,u(x,\lambda_2))$$

для всех $x \in (\alpha;\beta)$. Отсюда, в силу положительности функции Грина $G_{\alpha\beta}(x,s)$ краевой задачи

$$\begin{cases} -\left(pu'_x\right)'_\sigma(x) = f(x), \\ u(\alpha) = u(\beta) = 0, \end{cases}$$

вытекает неравенство

$$u(x,\lambda_1) = \lambda_1 \int\limits_{\alpha+0}^{\beta-0} G_{\alpha\beta}(x,s)F(s,u(s,\lambda_1))\,d\sigma(s) <$$

$$< \lambda_2 \int\limits_{\alpha+0}^{\beta-0} G_{\alpha\beta}(x,s)F(s,u(s,\lambda_2))\,d\sigma(s) = u(x,\lambda_2) \ (x \in (\alpha;\beta)). \quad (10)$$

Но неравенство (10) противоречит неравенству $u(x,\lambda_1) > u(x,\lambda_2)$, справедливого в интервале $(\alpha;\beta)$. Теорема доказана. $\square$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда в задаче (8) функция $F(x,u)$ возрастает по u и $F(x,0) \equiv 0$. В этом случае, задача (8) имеет тривиальное решение при любом λ. Будем считать действительное число собственным значением задачи (8), если при этом λ (8) имеет нетривиальное решение.

Теорема 4. *Пусть $F(x,u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори и $F(x,0) \equiv 0$; $F(x,u)$ строго возрастает по u при положительных u и каждом x, $F(x,u)$ допускает представление $F(x,u) = f(x,u)\cdot u$, где $f(x,u)$ не возрастает по u при $u > 0$ и каждом x. Тогда множество Λ собственных значений задачи* (8)*, отвечающих неотрицательным на $[0;\ell]$ собственным функциям, обладает следующими свойствами:*

1) Λ *связно;*

2) *при каждом $\lambda \in \Lambda$ задача* (8) *имеет единственное положительное в $(0;\ell)$ решение $u(x,\lambda)$;*

3) *$u(x,\lambda)$ строго возрастает по λ; при каждом $\lambda^* \in \Lambda$ соответствующее решение $u(x,\lambda^*$ задачи* (8) *является равномерным пределом последовательности $u_n(x)$, определяемой итерационными равенствами:*

$$\begin{cases} (pu'_x)'_\sigma(x) + \lambda^* F(x,u_k(x)) = 0, \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{cases}$$

$(k = 1,2,\dots)$ *при любой начальной непрерывной неотрицательной функции $u_0(x)$.*

В условиях теоремы монотонный интегральный (вполне непрерывный при действии из $L_{1,\sigma[0;l]}$ в $C[0;l]$, см. напр., [8]) оператор, ядром которого является функция Грина $G(x,s)$, обладает свойством u-положительности [9].

Поэтому и в силу свойств функции $F(x,u)$ интегральный оператор

$$(Au)(x) = \int\limits_0^\ell G(x,s)F(s,u(s))\,d\sigma(s)$$

является u_0-вогнутым. Утверждение теоремы теперь становится очевидным после привлечения теории вогнутых операторов [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. — М.: Физматлит, 2004. — 272с.

[2] Yu.V. Pokornyi, S.A. Shabrov Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients // Journal of Mathematical Sciences. — Vol. 119, No. 6. — 2004. — P. 769–787.

[3] Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Шабров С.А. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, вып. 1 (379). — С. 98–141.

[4] Покорный Ю.В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях // ДАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

[5] Дьяченко М. И. Мера и интеграл : [Учебное пособие] / М.И. Дьяченко, П.Л. Ульянов. — М.: Факториал, 1998. — 158 с.

[6] Шабров С.А. О разрешимости нелинейных краевых задач второго порядка с производными по мере // Труды математического факультета — 2008, № 3. — С. 57-69.

[7] Шабров С.А. О краевых задачах с импульсными коэффициентами. — Дисс.. . . канд. физ.-мат. наук. — Воронеж, 2000. — 74 с.

[8] Турыгина Е.А., Шабров С.А. О вполне непрерывности интегрального оператора, обращающего краевую задачу с производными по мере, в специальных пространствах // Труды математического факультета. — 2007. — вып. 11. — Воронеж. – С. 203–214.

[9] Давыдова М.Б., Шабров С.А. О числе решений нелинейной краевой задачи с интегралом Стилтьеса // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2011. — Т. 11, № 4. — С. 13–17.

[10] Красносельский М.А. Положительные решения оперратоных уравнений. — М.: Физматлиз, 1962. — 395 с.

Давыдова М. Б., кафедра математического анализа Воронежского Государственного Университета, доцент
E-mail: mbd@vsu.ru
Тел.: 8(473)220-86-90

Davydova M. B., Department of Mathematical Analysis, Voronezh State University, Associate Professor
E-mail: mbd@vsu.ru
Tel.: 8(473)220-86-90

Шабров С. А., кафедра математического анализа Воронежского Государственного Университета, доцент
E-mail: shaspoteha@mail.ru
Тел.: 8 (473) 220-86-90

Shabrov S. A., Department of Mathematical Analysis, Voronezh State University, Associate Professor
E-mail: shaspoteha@mail.ru
Tel.: 8 (473) 220-86-90