УДК 517.986.6

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВЫРОЖДЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ*

Б. Д. Гельман[1], А. В. Завьялова[2]

[1] *Воронежский государственный университет*
[2] *Воронежский государственный педагогический университет*

Поступила в редакцию 17.05.2012 г.

Аннотация: настоящая работа посвящена доказательству существования и изучению свойств множества локальных решений нового класса вырожденных дифференциальных включений вида $A(x') \in F(t,x)$, где A — замкнутый линейный сюръективный оператор, F - многозначное компактное отображение. В первой части статьи изучается разрешимость и свойства множества решений включений вида $A(x) \in F(x)$, где A — замкнутый линейный оператор, F — многозначное отображение. В последнем разделе статьи полученные теоремы применяются к изучению свойств множества локальных решений вырожденных дифференциальных включений.

Ключевые слова: замкнутый линейный оператор, топологическая размерность, неподвижные точки, топологическая степень, дифференциальные включения.

Abstract: this paper is devoted to the proof of existence and to investigation of properties of the set of local solutions for a new class of degenerate differential inclusions of the form $A(x') \in F(t,x)$, where A is a closed linear surjective operator and F is a compact multivalued mapping. In the first part of article we investigate the solvability and properties of solution set for inclusions $A(x) \in F(x)$, where A is a closed linear operator and F is a multivalued mapping. In the last section of article the theorems obtained above, are applied to studying the properties of the set of local solutions of degenerate differential inclusions.

Keywords: closed linear operator, topological dimension, fixed points, topological degree, differential inclusions.

ВВЕДЕНИЕ

Вырожденные (сингулярные) дифференциальные уравнения имеют много конкретных интерпретаций (см., например, [1] и библиографию в ней). В настоящий момент имеется много монографий и статей, посвященным таким уравнениям. В последнее время появились работы, в которых изучается задача Коши для вырожденных дифференциальных включений (см., например, [2], [3]).

В работе [4] были изучены вопросы существования и свойства множества локальных решений для вырожденных дифференциальных включений вида $(Ax)' \in F(t,x)$, где A — замкнутый линейный сюръективный оператор, F — многозначное компактное отображение. Настоящая работа продолжает исследования в этом направлении. В ней изучаются вопросы существования и свойства множества локальных решений нового класса вырожденных дифференциальных включений вида $A(x') \in F(t,x)$, где A — замкнутый линейный сюръективный оператор, F — многозначное компактное отображение. Изучение этого класса включений потребовало развития нового подхода к изучению разрешимости и свойств множества решений операторных включений вида

* Это исследование поддержено РФФИ: грант N^0 11-01-00382-а

$A(x) \in F(x)$, где A — замкнутый линейный оператор, F — многозначное отображение. Доказанные теоремы обобщают результаты, полученные ранее в [4], [5] и [6].

Некоторые результаты этой статьи были анонсированы в работах [7] и [8].

1. ВКЛЮЧЕНИЯ С СЮРЪЕКТИВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Пусть E_1, E_2 - два банаховых пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ – замкнутый линейный сюръективный оператор. Рассмотрим многозначный обратный оператор $A^{-1} : E_2 \to Cv(E_1)$, где $A^{-1}(y) = \{x \in E_1 | A(x) = y\}$.

Определение 1. *Число*

$$||A^{-1}|| = \sup_{y \in E_2} (\frac{\inf\{||x|| \ \mid \ x \in E_1, A(x) = y\}}{||y||})$$

называется нормой многозначного отображения A^{-1}.

Известно (см., например, [9]), что при сделанных предположениях $||A^{-1}|| < \infty$.

Если подпространство $Ker(A)$ не является дополняемым в пространстве E_1, то не существует линейного непрерывного оператора правого обратного к оператору A, однако имеет место следующее утверждение (см. [6]).

Лемма 1. *(i) Пусть y_0 — произвольная точка пространства E_2, x_0 – произвольная точка из множества $A^{-1}(y_0)$, тогда для любого числа k, $||A^{-1}|| < k$, существует непрерывное отображение $q : E_2 \to E_1$, такое, что выполнены следующие условия:*
1) $A(q(y)) = y$ для любого $y \in E_2$;
2) $||x_0 - q(y)|| \leqslant k||y_0 - y||$ для любого $y \in E_2$.

(ii) Для любого числа k, $||A^{-1}|| < k$, существует непрерывное отображение $\widetilde{q} : E_2 \to E_1$, такое, что выполнены следующие условия:
1) $A(\widetilde{q}(y)) = y$ для любого $y \in E_2$;
2) $||\widetilde{q}|| \leqslant k||y||$ для любого $y \in E_2$.

Пусть Y — подмножество банахова пространства E_2, обозначим:
$P(Y)$ — множество всех непустых подмножеств в Y;
$Kv(Y)$ — множество всех непустых компактных выпуклых подмножеств в Y.

Необходимые сведения из теории многозначных отображений содержатся, например, в [9].

Пусть X — подмножество в пространстве E_1, $F : X \to Kv(E_2)$ — многозначное отображение. Рассмотрим следующее включение:

$$A(x) \in F(x). \tag{1}$$

Обозначим $N(A, F)$ множество решений включения (1).

Нам будут необходимы следующие леммы.

Пусть q — отображение, правое обратное к отображению A. Рассмотрим многозначное отображение $F_1 : E_2 \times Ker(A) \to Cv(E_2)$ определенное условием:

$$F_1(x, u) = co(q(F(x))) + u.$$

Тогда можно рассмотреть включение:

$$F_1(x, u) \ni x. \tag{2}$$

Лемма 2. *Включения (1) и (2) эквивалентны.*

Доказательство. Покажем, что каждому решению включения (1) однозначно сопоставляется решение включения (2), и наоборот, каждому решению включения (2) однозначно сопоставляется решение включения (1). Действительно, пусть x_0 — решение включения (1), т.е. $A(x_0) \in F(x_0)$. Тогда $u_0 = x_0 - q(A(x_0)) \in Ker(A)$. Следовательно,

$$F_1(x_0, u_0) = co(q(F(x_0))) + u_0 \supset q(F(x_0)) + u_0 \ni q(A(x_0)) + u_0 = x_0,$$

т.е. пара (x_0, u_0) является решением включения (2).

Обратно, пусть теперь пара (x_0, u_0) является решением включения (2), тогда существуют точки $\{y_i\}_{i=1}^k \subset F(x_0)$, и числа $\{\lambda_i\}_{i=1}^k \subset [0,1]$ такие, что $\sum\limits_{i=1}^k \lambda_i q(y_i) + u_0 = x_0$, причем $\sum\limits_{i=1}^k \lambda_i = 1$. Тогда

$$A(x_0) = A(\sum_{i=1}^k \lambda_i q(y_i) + u_0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i y_i \in F(x_0).$$

Таким образом точка x_0 является решением включения (1).

Изучим разрешимость уравнения (1) на шаре в пространстве E_1.

Пусть $x_0 \in D(A) \subset E_1$ некоторая точка, $B_R[x_0]$ замкнутый шар радиуса R с центром в x_0, $F : B_R[x_0] \to Kv(E_2)$ — вполне непрерывное многозначное отображение.

Теорема 1. *Если существует такое число $k > ||A^{-1}||$, что для любой точки $x \in B_R[x_0]$ справедливо неравенство*

$$\min_{u \in F(x)} ||A(x_0) - u|| \leqslant \frac{R}{k},$$

то множество $N(A, F) \neq \varnothing$.

Доказательство. Пусть $y_0 = A(x_0)$. Пусть $q : E_2 \to E_1$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям:
1) $A(q(y)) = y$ для любого $y \in E_2$;
2) $||x_0 - q(y)|| \leqslant k||y_0 - y||$ для любого $y \in E_2$.
Такое отображение всегда существует в силу леммы 1. Рассмотрим многозначное отображение $F_1(x) = co(q(F(x)))$, $F_1 : B_R[x_0] \to Kv(E_2)$. Очевидно, что многозначное отображение F_1 является вполне непрерывным.

Оценим $\min\limits_{v \in F_1(x)} ||v - x_0||$ для произвольной точки $x \in B_R[x_0]$. Имеем:

$$\min_{v \in F_1(x)} ||v - x_0|| \leqslant \min_{v \in q(F(x)} ||v - x_0|| \leqslant \min_{u \in F(x)} ||q(u) - x_0|| \leqslant k \min_{u \in F(x)} ||u - y_0|| \leqslant R.$$

Тогда для любой точки $x \in B_R[x_0]$ пересечение $F_1(x) \bigcap B_R[x_0] \neq \varnothing$. Следовательно, в силу теоремы Какутани (см. [9]) отображение F_1 имеет неподвижную точку, которая и будет решением нашего включения.

Следствие 1. *Пусть вполне непрерывное многозначное отображение $F : E_1 \to Kv(E_2)$ удовлетворяет следующему условию:*
существуют неотрицательные числа c и d такие, что для любого $x \in E_1$ справедливо неравенство: $\min\limits_{u \in F(x)} ||u|| \leqslant c||x|| + d$.
Если $c < \frac{1}{||A^{-1}||}$, то множество $N(A, F) \neq \varnothing$.

Доказательство. Пусть k – произвольное число такое, что $||A^{-1}|| < k < \frac{1}{c}$. Применим для доказательства этого утверждения результаты теоремы 1. Пусть $B_R[0]$ – шар радиуса R с центром в нуле пространства E_1, где $R > \frac{dk}{1-kc}$. Тогда для любой точки $x \in B_R[0]$ справедливо неравенство,

$$\min_{u \in F(x)} ||u|| \leqslant c||x|| + d \leqslant cR + d = \frac{kcR + dk}{k} < \frac{R}{k},$$

т. е. отображение F на шаре $B_R[0]$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Следствие доказано.

Для доказательства второго следствия из теоремы 1 нам понадобится следующая лемма.

Пусть E — банахово пространство, E_0 равно $E \times R^1$. Норму в E_0 определим по правилу: $||(x,t)|| = ||x|| + |t|$. Пусть S_r — сфера радиуса r с центром в нуле банахова пространства E_0, а $F : S_r \to Kv(E)$ — вполне непрерывное многозначное отображение. Рассмотрим включение

$$F(x,t) \ni x. \tag{3}$$

Лемма 3. *Если* $\min\limits_{u \in F(x,t)} ||u|| \leqslant r$ *для любой точки* $(x,t) \in S_r$, *то включение (3) имеет решение на* S_r.

Доказательство. Пусть B — замкнутый шар радиуса r в пространстве E, $\widetilde{S}_r$ — граница этого шара. Рассмотрим многозначное отображение $G : B \to Kv(E)$ определенное условием: $G(x) = F(x, r - ||x||)$. Это отображение является вполне непрерывным, т.к. отображение F было вполне непрерывным и для любой точки $x \in B$ пересечение $G(x) \cap B \neq \varnothing$. Следовательно, по теореме Какутани (см. [9]) отображение G имеет неподвижную точку. Пусть точка x_0 является неподвижной точкой отображения G, тогда точка $(x_0, t_0) \in S_r$, где $t_0 = r - ||x_0||$, является решением включения (3). Лемма доказана.

Следствие 2. *Пусть вполне непрерывное многозначное отображение* $F : E_1 \to Kv(E_2)$ *удовлетворяет следующему условию:*
существуют неотрицательные числа c *и* d *такие, что для любого* $x \in E_1$ *справедливо неравенство:* $\max\limits_{u \in F(x)} ||u|| \leqslant c||x|| + d$.
Если $c < \frac{1}{||A^{-1}||}$ *и* $dim(Ker(A)) \geqslant 1$, *то множество* $N(A,F) \neq \varnothing$ *и неограничено.*

Доказательство. Непустота множества $N(A,F)$ вытекает из следствия 1. Докажем неограниченность этого множества. Предположим противное, тогда существует такое число $M > 0$, что для любого $x \in N(A,F)$ справедливо неравенство: $||x|| \leqslant M$. Так как $dim(Ker(A)) \geqslant 1$, то существует единичный вектор $e \in Ker(A)$. Пусть $E_0 = E_1 \times R^1$. Норму в E_0 определим по правилу $||(x,t)|| = ||x|| + |t|$. Пусть k – произвольное число такое, что $||A^{-1}|| < k < \frac{1}{c}$. Пусть $q : E_2 \to E_1$ – непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям:
1) $A(q(y)) = y$ для любого $y \in E_2$;
2) $||q(y)|| \leqslant k||y||$ для любого $y \in E_2$.
Рассмотрим многозначное отображение $\widehat{Q} : E_0 \to E_2$,

$$\widehat{Q}(x,t) = co(q(F(x)) + kcte.$$

Для любой точки $(x,t) \in E$ справедливо неравенство:

$$\min_{u \in \widehat{Q}(x,t)} ||u|| \leqslant \min_{v \in F(x)} ||q(v)|| + kc|t| \leqslant k(c||x|| + d) + kc|t| \leqslant kc(||x|| + |t|) + kd \leqslant kc||(x,t)|| + kd.$$

Следовательно, если $R > \frac{kd}{1-kc}$, то для любой точки $(x,t) \in E$ такой, что $||(x,t)|| = R$, справедливо неравенство $\min\limits_{u \in \widehat{Q}(x,t)} ||u|| < R$. Следовательно, на любой сфере $S_R \subset E_0$, где $R > \frac{kd}{1-kc}$, существует решение (x_R, t_R) включения $x \in \widehat{Q}(x,t)$, т.е. $x_R \in \widehat{Q}(x_R, t_R)$. Тогда

$$||x_R|| \geqslant \min_{u \in \widehat{Q}(x_R,t_R)} ||u|| \geqslant kc|t_R| - \max_{v \in F(x_R)} ||q(v)|| \geqslant kc|t_R| - k(c||x_R|| + d).$$

Тогда

$$|t_R| \leqslant \frac{(1+kc)||x_R|| + kd}{kc}.$$

Так как в силу леммы 1 любое $x_R \in N(A,F)$, то

$$|t_R| \leqslant \frac{(1+kc)M+kd}{kc} = \delta.$$

Тогда $||(x_R,t_R)|| \leqslant \sqrt{M^2+\delta^2}$ для любого R, а это противоречит тому что $||(x_R,t_R)|| = R$, где R сколь угодно большое число. Теорема доказана.

Следствие 3. *Пусть отображения A и F удовлетворяют условиям следствия 1, тогда многозначное отображение $\Psi = A + F$ является сюрьективным, т.е для любой точки $y \in E_2$ множество*

$$\Psi^{-1}(y) = \{x \in E_1 \mid \Psi(x) \ni y\} \neq \varnothing.$$

Доказательство. Рассмотрим включение

$$A(x) \in y - F(x),$$

где y — произвольный вектор из E_2. Очевидно, что отображение $F_1 = y - F$ удовлетворяет условиям следствия 1. Следовательно, множество $N(A,F_1) = \Psi^{-1}(y) \neq \varnothing$.

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Пусть E_1, E_2 — два банаховых пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ — линейный замкнутый сюрьективный оператор с областью определения $D(A)$.

Пусть $x_0 \in D(A)$, $B_R[x_0]$ – замкнутый шар радиуса R с центром в точке x_0. Пусть многозначное отображение $F : [0,T] \times B_R[x_0] \longrightarrow Kv(E_2)$ вполне непрерывно по совокупности переменных.

Рассмотрим следующую задачу:

$$A(x') \in F(t,x), \tag{4}$$

$$A(x(0)) = A(x_0). \tag{5}$$

Определение 2. *Решением задачи (4), (5) на промежутке $[0;h]$, где $0 < h \leqslant T$, называется абсолютно непрерывная функция $x(t)$ такая, что $A(x'(t)) \in F(t,x(t))$ для почти всех $t \in [0,h]$, и $A(x(0)) = A(x_0)$.*

Обозначим $\sum(x_0,[0,h])$ — множество решений задачи (4), (5) на промежутке $[0,h]$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *При сделанных предположениях найдется такое число $h_0 > 0$, что $\sum(x_0,[0,h_0]) \neq \varnothing$.*

Доказательство. Пусть непрерывное отображение $q : E_2 \to E_1$ удовлетворяет условиям леммы 1. И пусть выпуклая оболочка
$co(q(F(t,x))) = Q(t,x)$. Тогда отображение Q является вполне непрерывным и имеет выпуклые компактные образы. Рассмотрим произвольную непрерывную функцию $u(t) \in Ker(A)$ при любом $t \in [0,T]$.

Рассмотрим следующую задачу:

$$x' \in Q(t,x) + u(t), \tag{6}$$

$$x(0) = x_0. \tag{7}$$

В силу сделанных предположений существует число $h_0 \in (0,T]$ такое, что задача (6), (7) имеет решение на промежутке $[0,h_0]$. (даже для более общей задачи см., например, [10]). Пусть $x_* = x_*(t)$

— решение этой задачи, тогда на промежутке $[0, h_0]$ существует суммируемая функция y такая, что $y(s) \in Q(s, x_*(s))$ для почти всех $s \in [0, h_0]$ и выполняется равенство

$$x_*(t) = x_0 + \int\limits_0^t y(s)ds + \int\limits_0^t u(s)ds. \tag{8}$$

Покажем, что x_* является решением задачи (4), (5). Так как $Q(t, x) = co(q(F(t, x)))$, то для почти всех $t \in [0, h_0]$ справедливо представление

$$y(t) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i q(y_i),$$

где $\lambda_i \in [0, 1]$, $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, а точки $y_i \in F(t, x_*(t))$.

Продифференцировав равенство (8) в точке t, получим $x'_*(t) = y(t) + u(t)$ для почти всех $t \in [0, h_0]$. Применив к полученному равенству оператор A, имеем

$$A(x'_*(t)) = A(y(t) + u(t)) = A(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i q(y_i) + A(u(t)) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A(q(y_i)) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i$$

Так как $y_i \in F(t, x_*(t))$, а множество $F(t, x_*(t))$ выпукло, то

$$A(x'_*(t)) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i(t) \in F(t, x_*(t)).$$

Отсюда следует, что $A(x'(t)) \in F(t, x_*(t))$ для почти всех $t \in [0, h_0]$, то есть x_* — является решением включения (4).

Равенство (5) очевидно, так как $x_*(0) = x_0$ и $A(x_*(0)) = A(x_0)$, то $A(x(0)) = A(x_0)$. Теорема доказана.

3. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ РАЗМЕРНОСТЬ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ

Изучим топологическую размерность dim множества $\sum(x_0, [0, h])$. Основные свойства размерности dim содержатся в [11]. Нам понадобятся некоторые сведения о размерности множества решений операторных включений, доказанные в работах [4], [6] и [12].

Пусть банахово пространство E представляется в виде прямого произведения банаховых пространств E_1 и E_2, то есть $E = E_1 \times E_2$. Пусть

$$U = U_{R_1}(x_0) \times U_{R_2}(y_0)$$

прямое произведение открытого шара $U_{R_1}(x_0) \subset E_1$ с центром в точке x_0 и радиуса R_1 и открытого шара $U_{R_2}(y_0) \subset E_2$ с центром в точке y_0 и радиуса R_2. Тогда замыканием множества U будет

$$\overline{U} = B_{R_1}[x_0] \times B_{R_2}[y_0].$$

Пусть $F_1 : \overline{U} \to Kv(E_1),\ F_2 : \overline{U} \to Kv(E_2)$ - многозначные отображения. Рассмотрим

$$F = F_1 \times F_2 : \overline{U} \to Kv(E_1 \times E_2).$$

Пусть $\Phi = i - F$ - многозначное векторное поле, порожденное отображением F. Обозначим $N(\Phi, \overline{U})$ множество неподвижных точек F, то есть

$$N(\Phi, \overline{U}) = \{x \in \overline{U} \,|\, x \in F(x)\} = \{x \in \overline{U} \mid 0 \in \Phi(x)\}$$

Имеет место следующая теорема (см. [4], [6]).

Теорема 3. *Если:*
(a) многозначное отображение F_1 *— вполне непрерывно;*
(b) многозначное отображение F_2 *— непрерывно, компактно и для любой точки* $(x, y) \in U$ *выполнено неравенство*

$$dim(F_2(x, y)) \geqslant n;$$

(c) топологическая степень $\gamma(\Phi, \overline{U}) \neq 0$.
Тогда топологическая размерность

$$dim(N(\Phi, \overline{U})) \geqslant n.$$

Рассмотрим следствие из этой теоремы.

Пусть $F_1 : \overline{U} \to Kv(E_1)$ вполне непрерывное многозначное отображение. Рассмотрим включение

$$x \in F_1(x, y).$$

Решением этого включения назовем пару (x_*, y_*) такую, что $x_* \in F_1(x_*, y_*)$. Обозначим множество решений этого уравнения $Fix(F_1, \overline{U})$.

Следствие 4. *Пусть* $dim(E_2) \geqslant n$. *Если* $F_1(x, y) \subset U_{R_1}[x_0]$ *для любых* $x \in B_{R_1}[x_0]$, $y \in B_{R_2}[y_0]$, *то* $dim(Fix(F_1, \overline{U})) \geqslant n$.

Доказательство. Пусть E^n — n-мерное подпространство пространства E_2. Обозначим $B \subset E^n$ замкнутый шар с центром в нуле радиуса $\frac{R_2}{2}$. Рассмотрим многозначное отображение

$$F_2 : \overline{U} \to Kv(E_2), \quad F_2(x, y) = y_0 + B$$

для любой точки $(x, y) \in \overline{U}$. Очевидно, что это отображение является непрерывным, компактным и для любой точки $(x, y) \in U$ выполнено неравенство $dim(F_2(x, y)) \geqslant n$.

Пусть $F = F_1 \times F_2 : \overline{U} \to Kv(E_1 \times E_2)$. В силу сделанных предположений многозначное отображение $F(x, y) \in U_{R_1}(x_0) \times U_{R_2}(y_0)$ для любой точки $(x, y) \in B_{R_1}(x_0) \times B_{R_2}(y_0)$. Следовательно, оно не имеет неподвижных точек на границе. Так как множество $\overline{U}$ - выпукло и ограничено, то $\gamma(\Phi, \partial U) = 1$ (см. [9]). Тогда выполнены условия теоремы 3, следовательно, топологическая размерность $dim(N(\Phi, \overline{U})) \geqslant n$. Очевидно, что множество $N(\Phi, \overline{U}) \subset Fix(F_1, \overline{U})$, тогда из монотонности размерности получаем утверждение следствия.

Применим следствие 4 к изучению $dim(\sum(x_0, [0, h]))$. Пусть как и раньше $x_0 \in D(A)$, $B_R[x_0]$ – замкнутый шар радиуса R с центром в точке x_0, многозначное отображение $F : [0, T] \times B_R[x_0] \longrightarrow Kv(E_2)$ вполне непрерывно по совокупности переменных.

Рассмотрим задачу (4), (5):

$$A(x') \in F(t, x), \tag{4}$$

$$A(x(0)) = A(x_0). \tag{5}$$

Будем предполагать дополнительно, что подпространство $KerA$ является дополняемым в пространстве E_1, т.е. существует замкнутое подпространство $E' \subset E_1$ такое, что $KerA \bigcap E' = 0$ и $KerA + E' = E_1$. Очевидно, что сужение оператора A на подпространство E',

$$\widehat{A} : (D(A) \bigcap E') \subset E' \to E_2, \quad \widehat{A}(x) = A(x),$$

является замкнутым сюръективным оператором с нулевым ядром. Следовательно, существует линейный непрерывный оператор $C : E_2 \to E' \subset E_1$ обратный к оператору $\widehat{A}$, т.е. правый обратный к оператору A.

Замечание. *Легко видеть, что*

$$KerA \bigcap C(E_2) = KerA \bigcap E' = 0.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть подпространство $KerA$ является дополняемым в пространстве E_1. Если $dim(KerA) \geqslant 1$ то, существует такое число $h_0 > 0$, что $\sum(x_0, [0, h_0]) \neq \varnothing$ и $dim(\sum(x_0, [0, h_0])) = \infty$.*

Доказательство. Очевидно, что множество $\sum(x_0, [0, h]) \neq \varnothing$ при малых h, это следует из теоремы 3. Докажем, что существует $h_0 > 0$ такое, что $dim(\sum(x_0, [0, h_0])) = \infty$.

Если $dim(KerA) \geqslant 1$, то пространство $C_{([0,h],KerA)}$ (пространство непрерывных функций, определенных на промежутке $[0, h]$ со значениями в $KerA$) является бесконечномерным пространством.

Пусть n - произвольное натуральное число, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейно независимые функции из пространства $C_{([0,h],KerA)}$ и $||e_1|| = \ldots = ||e_n|| = 1$. Пусть $E^n = L(e_1, e_2, \ldots, e_n) \subset C_{([0,h],KerA)}$ – линейная оболочка векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Рассмотрим множество $T \subset C_{[0,h]}$, где

$$T = \{x \in C_{[0,h]} \mid ||x_0 - x(t)|| \leqslant R \text{ для любого } t \in [0, h]\}.$$

Это множество является замкнутым шаром $B_R[\bar{x}_0]$ радиуса R с центром в точке $\bar{x}_0$, где $\bar{x}_0(t) = x_0$ для любого $t \in [0, h]$. Рассмотрим $U_R[\bar{x}_0]$ открытый шар радиуса R с центром в точке $\bar{x}_0$, то есть

$$U_R[\bar{x}_0] = \{x \in C_{[0,h]} \mid ||x_0 - x(t)|| < R, \ \forall t \in [0, h]\}.$$

В силу того, что ядро $KerA$ является дополняемым в пространстве E_1, то существует линейный непрерывный оператор $C : E_2 \to E_1$, правый обратный к оператору A, т.е. $A(C(y)) = y$ для любого $y \in E_2$.

Пусть $B_1[0]$ — единичный шар в пространстве E^n. Рассмотрим интегральный оператор $K : T \times B_1[0] \longrightarrow Kv(C_{[0,h]})$,

$$K(x, u)(t) = \{y(t) = x_0 + \int_0^t z(s)ds + \int_0^t u(s)ds \mid z(s) \in C(F(s, x(s))) \text{ для почти всех } s \in [0, h]\}.$$

Легко проверить, что отображение K является вполне непрерывным и имеет выпуклые компактные образы. Рассмотрим $N > 0$ такое, что $||F(t, x)|| \leqslant N$ для любых $t \in [0, T]$, и $x \in B_R[x_0]$. Проверим, что для малого $h > 0$, многозначное отображение $K : T \times B_1[0] \longrightarrow Kv(U_R[\bar{x}_0])$. Действительно,

$$||x_0 - y(t)|| \leqslant \int_0^t ||z(s)||ds + \int_0^t ||u(s)||ds \leqslant ||C||\, Nt + t = (||C||\, N + 1)t \leqslant (||C||\, N + 1)h.$$

Если

$$0 < h_0 < \frac{R}{||C||\, N + 1},$$

то для любого $t \in [0, h_0]$ выполняется неравенство $||x_0 - y(t)|| < R$. Отсюда следует, что $K(x, u) \in U_R[\bar{x_0}]$.

Итак, отображение K удовлетворяет условиям следствия 4, следовательно $dim(Fix(K, \overline{U})) \geqslant n$. Так как для любой пары $(x_*, u_*) \in Fix(K, \overline{U})$ функция x_* является решением задачи (4), (5) (см. теорему 3), то возникает отображение $\omega : Fix(K, \overline{U}) \to \sum(x_0, [0, h_0])$, $\omega(x, u) = x$. Проверим, что это отображение является гомеоморфизмом на свою область значений. Так как множество $Fix(K, \overline{U})$ является компактным, то для этого достаточно доказать, что если точки (x, u_1) и (x, u_2) принадлежат $Fix(K, \overline{U})$, то $u_1 = u_2$.

Имеем:

$$x(t) = x_0 + \int\limits_0^t z_1(s)ds + \int\limits_0^t u_1(s)ds \tag{9}$$

и

$$x(t) = x_0 + \int\limits_0^t z_2(s)ds + \int\limits_0^t u_2(s)ds, \tag{10}$$

где $z_1(s)$, $z_2(s) \in C(F(s, x(s)))$ для почти всех $s \in [0, h_0]$.

Тогда $z_1(s) - z_2(s) = u_2(s) - u_1(s)$ для почти всех $s \in [0, h_0]$. Следовательно, точка $z_1(s) - z_2(s) \in C(E_2) \bigcap KerA$. В силу сделанного замечания получаем, что $z_1(s) - z_2(s) = 0$ для почти всех $s \in [0, h_0]$. Тогда $u_1(s) = u_2(s)$ для почти всех $s \in [0, h_0]$. Так как функции u_1 и u_2 непрерывны, то они равны на всем отрезке $[0, h_0]$. Таким образом, отображение ω является гомеоморфизмом на свою область значений.

Теперь в силу монотонности топологической размерности dim имеем:

$$dim(\sum(x_0, [0, h_0])) \geqslant dim(\omega(Fix(K, \overline{U}))) = dim(Fix(K, \overline{U})) \geqslant n.$$

Так как число n мы выбирали произвольно, то $dim(\sum(x_0, [0, h_0])) \geqslant \infty$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Favini A., Yagi A. Degenerate differential equations in Banach spaces / A. Favini, A. Yagi. — N.Y.: Marcel Dekker. — 1999.

[2] Obukhovskii V., Zecca P. On boundari value problems for degenerate differential inclusions in Banach spaces // V. Obukhovskii, P. Zecca / Abstr. Appl. Anal. — 2003. — № 13. — P. 769–784.

[3] Baskakov A., Obukhovskii V., Zecca P. Multivalued linear operators and differential inclusions in Banach spaces//A. Baskakov, V. Obukhovskii, P. Zecca / Math. Differ. Incl. Control Optim. — 2003. — № 23. – P. 53–74.

[4] Гельман Б.Д. О локальных решениях вырожденных дифференциальных включений / Б.Д. Гельман // Функциональный анализ и его приложения. — 2012. — № 1. — С. 79–83.

[5] Гельман Б.Д. О топологической размерности множества решений операторных включений, содержащих сюръективные операторы / Б.Д. Гельман // Вестник ВГУ, серия физика, математика. — 2001. — № 1. — С. 75–80.

[6] Гельман Б.Д. Об операторных включениях с сюръективными операторами / Б.Д. Гельман // Вестник ВГУ, серия: физика, математика. — 2006. — № 1. — С. 119–127.

[7] Завьялова А.В. О локальных решениях одного класса вырожденных дифференциальных включений / А.В. Завьялова // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна. — 2012. — С. 67–68.

[8] Завьялова А.В. О задаче Коши для одного класса вырожденных дифференциальных включений / А.В. Завьялова // Современные методы теории краевых задач. — 2012. — С. 68–69.

[9] Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский. — М: КомКнига (URSS). — 2005.

[10] Толстоногов А.А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве / А.А. Толстоногов. — Новосибирск: Наука. — 1986.

[11] Александров П.С.,Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности / П.С. Александров, Б.А. Пасынков. — М: Наука. — 1973.

[12] Гельман Б.Д. Топологические свойства множества неподвижных точек многозначных отображений / Б.Д. Гельман // Математ. сборник. — 1997. — № 12. — С. 33–56.

Гельман Б. Д., доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории функций и геометрии Воронежского государственного университета
E-mail: gelman@math.vsu.ru
Тел.: 2235-692

Gel'man Boris Danilovich, Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor of the Department of Theory of Functions and Geometry Voronezh State University
E-mail: gelman@math.vsu.ru
Tel.: 2235-692

Завьялова А. В., аспирантка кафедры высшей математики Воронежского государственного педагогического университета
E-mail: an_toshka@mail.ru
Тел.: 8-920-440-42-00

Zavyalova A. V., aspirant of Department of Higher Mathematics Voronezh State Pedagogical University
E-mail: an_toshka@mail.ru
Tel.: 8-920-440-42-00