УДК 517.988, 517.938

КРИТЕРИЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ОДУ НА ПЛОСКОСТИ В ТЕРМИНАХ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ИНДЕКСА ОСОБОЙ ТОЧКИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

И. В. Антюшина

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 01.03.2013 г.

Аннотация: в работе устанавливается критерий асимптотической устойчивости нулевого решения динамической системы ОДУ на плоскости с однородными полиномиальными правыми частями любой нечётной степени из класса динамических систем, для которых задача асимптотической устойчивости алгебраически разрешима. Критерий сводит задачу об асимптотической устойчивости к задаче вычисления топологического индекса особой точки некоторого полиномиального векторного поля, построенного по исходной системе ОДУ, что позволяет использовать для решения задачи об асимптотической устойчивости различную технику вычисления индекса. В частности, полученные условия асимптотической устойчивости доводятся применением эффективных результатов вычисления индекса особой точки до формул, позволяющих выяснить асимптотическую устойчивость в результате конечного числа арифметических операций и функции *sign* над коэффициентами многочленов из правых частей уравнений системы.

Ключевые слова: асимптотическая устойчивость, топологический индекс, индекс Коши.

Abstract: the criterion for the asymptotic stability of the zero solution of a dynamic system of ODE in a plane with homogeneous polynomial right-hand sides of any odd power of a class of dynamical systems, for which the problem of asymptotic stability is algebraically solvable, is established in the work. The criterion reduces the problem of asymptotic stability to the problem of computation of the topological index of a singular point of some polynomial vector field, constructed on the basis of the original ODE system, that allows to use for solving of the problem of asymptotic stability different technique for computing the index. In particular, the conditions of asymptotic stability, which were obtained, brought by effective results for computing the index of a singular point to the formulas, which allow to find out the asymptotic stability as a result of a finite number of arithmetic operations and the function *sign* on the coefficients of polynomials in right-hand sides of equations of a system.

Keywords: asymptotic stability, topological index, Cauchy index.

ВВЕДЕНИЕ

Существует большое число результатов с разного рода условиями асимптотической устойчивости для различных классов систем дифференциальных уравнений. Среди них немного результатов, позволяющих выяснить наличие устойчивости для динамических систем в результате конечного числа арифметических и логических операций над коэффициентами разложений Тейлора функций правых частей систем. Такое решение задачи для системы ОДУ по линейной части обеспечивают результаты А.М. Ляпунова (см. напр. [1]) вместе с критерием Рауса-Гурвица об условиях расположения корней многочлена в левой полуплоскости (см. напр. [2]). В работе В.Р. Зачепы [3] указываются достаточные условия асимптотической устойчивости в терминах диаграмм Ньютона, позволяющие для системы дифференциальных уравнений $\dot{x}_i = P_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$ в R^n выяснять асимптотическую устойчивость нулевого состояния равновесия по коэффициентам многочленов $P_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$. Для системы двух дифференциальных уравнений $\dot{x} = P(x, y), \dot{y} = Q(x, y)$, правые части которой — однородные многочлены третьей степени, для которых многочлен $yP(1, y) - Q(1, y)$ имеет вещественные корни, необходимые и достаточные условия указанного типа установлены А. Ю. Утешевым и С. Г. Шуляком в [4] (в [4] исследован также случай неалгебраической разрешимости задачи, когда многочлен $yP(1, y) - Q(1, y)$ не имеет вещественных корней, и установлено условие асимптотической устойчивости в радикалах относительно коэффициентов многочленов $P(x, y)$ и $Q(x, y)$).

В настоящей работе для динамических систем ОДУ на плоскости с однородными полиномиальными правыми частями $P(x, y)$, $Q(x, y)$ любой нечётной степени, для которых многочлен $yP(1, y) - Q(1, y)$ имеет вещественные корни, устанавливается критерий асимптотической устойчивости в терминах топологического индекса особой точки некоторого векторного поля, построенного по исходной системе ОДУ, что позволяет использовать различные результаты вычисления индекса для решения задачи об асимптотической устойчивости. Во второй части работы полученные условия асимптотической устойчивости с помощью эффективных результатов алгебраического вычисления топологического индекса доводятся до формул, позволяющих выяснить асимптотическую устойчивость нулевого решения в результате конечного числа только арифметических операций и функции *sign* (без радикалов!) над коэффициентами многочленов из правых частей уравнений системы.

Относительно вариантов решения задачи об асимптотической устойчивости нулевого решения для случая, когда многочлен $yP(1, y) - Q(1, y)$ не имеет вещественных корней и степени многочленов $P(x, y)$, $Q(x, y)$ не ниже пяти, в [4] высказана гипотеза о неразрешимости задачи в радикалах: "... Следует ожидать того, что в общем случае [т.е. если степень больше трёх] критерии асимптотической устойчивости не могут быть выражены в радикалах относительно коэффициентов полиномов $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, так как здесь имеется тесная связь с неразрешимостью в радикалах алгебраических уравнений степени выше четвёртой".

1. КРИТЕРИЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ В ТЕРМИНАХ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ИНДЕКСА

Рассмотрим задачу об асимптотической устойчивости нулевого решения динамической системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \tag{1}$$

где $P(x, y), Q(x, y)$ — однородные многочлены степени n.

Исключим из рассмотрения тривиальные случаи, когда n чётно, а также $P(0, y) = Q(0, y) = 0$, для которых нулевое решение не является асимптотически устойчивым (см. например [5]). Далее будем предполагать, что n нечетно и по крайней мере один из многочленов $P(0, y), Q(0, y)$ не равен нулю тождественно. Не ограничивая общности, будем считать, что $P(0, y) \not\equiv 0$.

Рассмотрим функцию

$$F(x, y) = yP(x, y) - xQ(x, y)$$

и векторное поле

$$\Psi(x,y) = \left(\frac{F(x,y)}{\text{НОД}\left(F(x,y), \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right)}, P(x,y) \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}{\text{НОД}\left(F(x,y), \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right)} \right).$$

Теорема 1. *Пусть степень n однородных многочленов $P(x,y)$, $Q(x,y)$ нечётна, $P(0,y) \not\equiv 0$ и многочлен $F(1,y)$ имеет k различных вещественных корней, причём $k > 0$. Нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда 0 — изолированная особая точка векторного поля Ψ и её топологический индекс $ind(\Psi, 0)$ равен k.*

Приведём понятия и утверждения, необходимые для доказательства теоремы 1.

Индексом Коши (см. например [2]) вещественной рациональной функции $R(x)$ на интервале (a,b) называется разность между числом разрывов $R(x)$ с переходом от $-\infty$ к $+\infty$ и числом разрывов с переходом от $+\infty$ к $-\infty$ при изменении x от a к b (при подсчёте числа разрывов крайние значения аргумента — пределы a и b — не включаются; a и b могут быть как конечными, так и бесконечными).

Приведём формулировку теоремы о вычислении топологического индекса особой точки векторного поля для случая однородных компонент поля.

Теорема 2 ([6]). *Пусть G — полиномиальное векторное поле в R^2, компоненты G_1, G_2 которого однородны степеней d_1, d_2 соответственно. Если 0 — изолированная особая точка поля G и выполнено условие $G_1(0,y) \not\equiv 0$, то*

$$ind(G,0) = \frac{(-1)^{d_1+d_2+1} - 1}{2} I_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_2(1,y)}{G_1(1,y)}.$$

Сформулируем также в удобной для нас форме теоремы об условиях асимптотической устойчивости в частном случае для системы ОДУ с однородными правыми частями:

$$\begin{cases} \dot{x} = G_1(x,y), \\ \dot{y} = G_2(x,y); \end{cases} \qquad (2)$$

$(G_1(x,y), G_2(x,y)$ — однородные многочлены одинаковой степени). Обозначим $F_0(x,y) = yG_1(x,y) - xG_2(x,y)$.

Теорема 3 ([7]). *Пусть множество M ненулевых вещественных решений уравнения $F_0(x,y) = 0$ непусто и $G_1(0,y) \not\equiv 0$. Если для любой точки $(x,y) \in M$ выполнено неравенство $\frac{G_1(x,y)}{x} < 0$, то нулевое решение системы (2) асимптотически устойчиво.*

Теорема 4 ([7]). *Пусть множество M ненулевых вещественных решений уравнения $F_0(x,y) = 0$ непусто и $G_1(0,y) \not\equiv 0$. Если хотя бы для одной точки $(x,y) \in M$ выполнено неравенство $\frac{G_1(x,y)}{x} > 0$, то нулевое решение системы (2) неустойчиво.*

Доказательство теоремы 1.

I. Достаточность. Пусть 0 — изолированная особая точка векторного поля Ψ и $ind(\Psi, 0) = k$. Проверим выполнение условий теоремы 2 для поля Ψ. Обозначим первую и вторую компоненты этого поля Ψ_1 и Ψ_2 соответственно.

Разлагая однородный многочлен $F(x,y)$ на линейные множители, получим:

$$F(x,y) = p_n \left(\prod_{i=1}^{k} (y - c_i x)^{æ_i} \right) \left(\prod_{i=1}^{\mu} (y - u_i x)^{\nu_i} (y - \overline{u_i} x)^{\nu_i} \right), \qquad (3)$$

где $p_n \neq 0$ — коэффициент монома старшей степени многочлена $F(1,\chi)$ (равный коэффициенту монома $p_n y^n$ многочлена $P(x,y)$); $c_1, \ldots, c_k$ — вещественные корни многочлена $F(1,\chi)$ кратностей

$\text{æ}_1, \ldots, \text{æ}_k$ соответственно; $u_1, \overline{u_1}, \ldots, u_\mu, \overline{u_\mu}$ — комплексные корни многочлена $F(1,\chi)$ с ненулевыми мнимыми частями кратностей $\nu_1, \ldots, \nu_\mu$ соответственно (отметим, что в силу $P(0,y) \not\equiv 0$ имеем $F(0,y) \not\equiv 0$, поэтому в разложении (3) отсутствует множитель вида x^s).

Аналогично имеем

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = (n+1)p_n \left(\prod_{i=1}^{k'} (y - c'_i x)^{\text{æ}'_i}\right) \left(\prod_{i=1}^{\mu'} (y - u'_i x)^{\nu'_i} (y - \overline{u'_i} x)^{\nu'_i}\right), \tag{4}$$

где $c'_1, \ldots, c'_{k'}$ — вещественные корни многочлена $\frac{\partial F}{\partial \chi}(\eta,\chi)|_{\eta=1}$ кратностей $\text{æ}'_1, \ldots, \text{æ}'_{k'}$ соответственно; $u'_1, \overline{u'_1}, \ldots, u'_{\mu'}, \overline{u'_{\mu'}}$ — комплексные корни многочлена $\frac{\partial F}{\partial \chi}(\eta,\chi)|_{\eta=1}$ с ненулевыми мнимыми частями кратностей $\nu'_1, \ldots, \nu'_{\mu'}$ соответственно.

Ясно, что $\frac{\partial F}{\partial \chi}(\eta,\chi)|_{\eta=1} \equiv (F(1,\chi))'$. Поэтому если c'_i — корень, общий для многочленов $F(1,\chi)$ и $\frac{\partial F}{\partial \chi}(\eta,\chi)|_{\eta=1}$, то кратность его как корня $\frac{\partial F}{\partial \chi}(\eta,\chi)|_{\eta=1}$ на 1 меньше, чем его кратность как корня $F(1,\chi)$ (то есть $\text{æ}'_i = \text{æ}_i - 1$). Аналогично для корней $u'_i, \overline{u'_i}$ (то есть $\nu'_i = \nu_i - 1$). С учётом этого ясно, что

$$\text{НОД}\left(F(x,y), \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\prod_{i=1}^{k'}{}' (y - c'_i x)^{\text{æ}_i - 1}\right) \left(\prod_{i=1}^{\mu'}{}' (y - u'_i x)^{\nu_i - 1} (y - \overline{u'_i} x)^{\nu_i - 1}\right) \tag{5}$$

(в произведения $\prod\limits_{i=1}^{k'}{}'$, $\prod\limits_{i=1}^{\mu'}{}'$ входят лишь множители, соответствующие общим корням многочленов $F(1,\chi)$, $\frac{\partial F}{\partial \chi}(\eta,\chi)|_{\eta=1}$).

Из равенств (3), (5) легко видеть, что многочлен $\Psi_1(x,y)$ обращается в нуль в некоторой точке если и только если в ней обращается в нуль многочлен $F(x,y)$. Значит, многочлен $\Psi_1(x,y)$ обращается в нуль в точке $(0,y)$ тогда и только тогда, когда $F(x,y)$ обращается в этой точке в нуль. Так как $P(0,y) \not\equiv 0$, то $F(0,y) \not\equiv 0$. Следовательно, $\Psi_1(0,y) \not\equiv 0$.

Так как многочлены $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ являются однородными степени n, то, как легко видеть, функции $\Psi_1(x,y)$, $\Psi_2(x,y)$ являются однородными степеней k и $(n+k-1)$ соответственно.

Итак, для поля Ψ выполнены условия теоремы 2, и, следовательно, с учётом нечётности числа n,

$$ind(\Psi,0) = \frac{(-1)^{k+n+k-1+1}-1}{2} I_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Psi_2(1,y)}{\Psi_1(1,y)} = -I_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Psi_2(1,y)}{\Psi_1(1,y)} = \\ = -I_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(1,y)\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)|_{x=1}\right)}{F(1,y)}.$$

Таким образом,

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(1,y)\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)|_{x=1}\right)}{F(1,y)} = -k. \tag{6}$$

Поскольку $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)|_{x=1} = (F(1,y))'$, то равенство (6) принимает вид

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(1,y)(F(1,y))'}{F(1,y)} = -k. \tag{7}$$

Так как многочлен $F(1,y)$ имеет k различных вещественных корней, то выполнено

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{(F(1,y))'}{F(1,y)} = k$$

(см. [2]). Значит, при переходе через каждый нуль многочлена $F(1,y)$ (при возрастании аргумента) знак функции $\frac{(F(1,y))'}{F(1,y)}$ меняется с "-" на "+".

Из равенства (7) вытекает, что все вещественные корни многочлена $F(1,y)$ являются полюсами функции $S(y) = \frac{P(1,y)(F(1,y))'}{F(1,y)}$, и при переходе через каждый из этих корней (при возрастании аргумента) знак этой функции меняется с "+" на "-". Следовательно, в достаточно малой проколотой окрестности любого нуля многочлена $F(1,y)$ имеет место неравенство $P(1,y) < 0$. Пусть c — любой из вещественных корней многочлена $F(1,y)$. С учётом знака функции $P(1,y)$ в его окрестности и в силу непрерывности $P(1,y)$ её значение $P(1,c)$ в точке c не может быть положительным. Запишем функцию $S(y)$ в виде

$$S(y) = \frac{P(1,y)\frac{(F(1,y))'}{\text{НОД}(F(1,y),(F(1,y))')}}{\frac{F(1,y)}{\text{НОД}(F(1,y),(F(1,y))')}}.$$

Теперь в разложении знаменателя функции $S(y)$ на неприводимые множители каждый множитель стоит в первой степени. Множество корней знаменателя $S(y)$ совпадает с множеством корней многочлена $F(1,y)$. Поэтому если $P(1,c) = 0$, то соответствующий ему линейный множитель сократится с одним из линейных множителей знаменателя $S(y)$. Мы получаем противоречие с тем, что все корни $F(1,y)$ являются полюсами функции $S(y)$.

Получаем, что $P(1,c) < 0$ для любого $c \in R$ такого, что $F(1,c) = 0$.

Как видно из равенства (3) с учётом того, что $k > 0$, множество M_F вещественных решений уравнения $F(x,y) = 0$ есть множество точек, каждая из которых принадлежит какой-либо из прямых $y = c_i x$, $i = \overline{1,k}$, где $c_1, \ldots, c_k$ — вещественные корни многочлена $F(1,y)$. Т.е.

$$M_F = \{(x,y) \in R^2 : \ \ y = c_i x\}. \tag{8}$$

Таким образом, множество M_F содержит точки, отличные от нулевой; кроме того, $P(0,y) \not\equiv 0$; значит, к полю (P,Q) применимы теорема 3 и теорема 4.

Пусть $(x^*, y^*) \in R^2 \setminus 0$ — произвольная точка, являющаяся вещественным решением уравнения $F(x,y) = 0$. Исходя из вида множества M_F, $x^* \neq 0$ и найдётся $c^* \in R$ такое, что $F(1,c^*) = 0$ и $y^* = c^* x^*$. Так как $P(1,c^*) < 0$ (согласно установленному выше), многочлен $P(x,y)$ однороден степени n, число n нечётно и $x^* \neq 0$, то имеем:

$$(x^*)^{n-1} P(1,c^*) = \frac{(x^*)^n P(1,c^*)}{x^*} = \frac{P(x^*, c^* x^*)}{x^*} = \frac{P(x^*,y^*)}{x^*} < 0.$$

Следовательно, согласно теореме 3, нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво.

II. Необходимость. Пусть нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво. Как установлено выше, к векторному полю (P,Q) применима теорема 4. Поэтому для любой точки $(x^*, y^*) \in R^2 \setminus 0$ такой, что $F(x^*,y^*) = 0$ (и, значит, $x^* \neq 0$), выполнено $\frac{P(x^*,y^*)}{x^*} \leqslant 0$.

Предположим, что $P(x^*,y^*) = 0$. Тогда, так как $F(x^*,y^*) = y^* P(x^*,y^*) - x^* Q(x^*,y^*)$ и $x^* \neq 0$, то выполнено $Q(x^*,y^*) = 0$. Пусть число $\xi \neq 0$ сколь угодно малое. Так как функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ однородны степени n, то

$$P(\xi x^*, \xi y^*) = \xi^n P(x^*,y^*) = 0, \quad Q(\xi x^*, \xi y^*) = \xi^n Q(x^*,y^*) = 0.$$

Таким образом, существует сколь угодно близкая к началу координат точка $(\xi x^*, \xi y^*) \neq 0$, в которой поле (P,Q) обращается в нуль. Следовательно, система (1) имеет сколь угодно близкие к началу координат ненулевые стационарные решения. Наличие таких решений противоречит асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1). Таким образом, $P(x^*,y^*) \neq 0$, и, значит, $\frac{P(x^*,y^*)}{x^*} < 0$.

Так как многочлен $P(x,y)$ однороден степени n, имеем

$$\frac{P(x^*,y^*)}{x^*} = \frac{(x^*)^n P\left(1,\frac{y^*}{x^*}\right)}{x^*} = (x^*)^{n-1} P\left(1,\frac{y^*}{x^*}\right),$$

а принимая во внимание, что число n нечётно, получаем $P\left(1,\frac{y^*}{x^*}\right) < 0$. В силу равенства (8) найдётся вещественный корень c^* многочлена $F(1,y)$ такой, что $y^* = c^*x^*$. Значит, $P(1,c^*) < 0$.

Аналогичным образом, неравенство $P\left(1,\frac{y}{x}\right) < 0$ выполнено для любой точки $(x,y) \in R^2 \setminus 0$ такой, что $F(x,y) = 0$. Поэтому, учитывая равенство (8), получаем, что для любого вещественного корня c многочлена $F(1,y)$ справедливо неравенство $P(1,c) < 0$, и, кроме того, в силу непрерывности функции $P(x,y)$, в достаточно малой окрестности точки c имеем

$$P(1,y) < 0. \tag{9}$$

В п. I доказательства указано, что при переходе через каждый нуль многочлена $F(1,y)$ (при возрастании аргумента) знак функции $\frac{(F(1,y))'}{F(1,y)}$ меняется с "-" на "+".

Точка $(1,y)$ отлична от нулевой, а, как показано в начале п. II доказательства, отличная от нулевой точка не может являться общим решением уравнений $F(x,y) = 0$ и $P(x,y) = 0$. Следовательно, многочлены $F(1,y)$ и $P(1,y)$ не имеют общих вещественных корней. Значит, каждый нуль функции $F(1,y)$ является полюсом функции $S(y) = \frac{P(1,y)(F(1,y))'}{F(1,y)}$. Тогда из неравенства (9) вытекает, что знак функции $S(y)$ при переходе через каждый нуль многочлена $F(1,y)$ (при возрастании аргумента) меняется с "+" на "-".

Таким образом, получаем, что $I_{-\infty}^{+\infty} S(y) = -k$. Функции $\Psi_1(x,y)$ и $\Psi_2(x,y)$ однородны степеней k и $(n+k-1)$ соответственно и, как показано в п. I доказательства, выполнено условие $\Psi_1(0,y) \not\equiv 0$. Проверим изолированность нулевой особой точки поля Ψ. Из равенств (3), (4), (5) легко видеть, что функции $\frac{F(x,y)}{\text{НОД}\left(F(x,y),\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right)}$, $\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}{\text{НОД}\left(F(x,y),\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right)}$ не имеют общих множителей, и, значит, не обращаются в нуль на одинаковых прямых, проходящих через начало координат. Поэтому точка $(0,0)$ - единственный общий вещественный нуль этих функций.

В п. I доказательства было установлено, что функция $\frac{F(x,y)}{\text{НОД}\left(F(x,y),\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right)}$ обращается в нуль в тех и только тех точках, в которых равен нулю многочлен $F(x,y)$. Кроме того, как мы знаем, уравнения $F(x,y) = 0$, $P(x,y) = 0$ не имеют общих ненулевых вещественных решений. Следовательно, единственный общий вещественный нуль функций $\frac{F(x,y)}{\text{НОД}\left(F(x,y),\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right)}$ и $P(x,y)$ - это точка $(0,0)$.

Тогда получаем, что 0 - изолированная особая точка поля Ψ.

Итак, по теореме 2,

$$ind(\Psi,0) = \frac{(-1)^{k+n+k-1+1} - 1}{2} I_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Psi_2(1,y)}{\Psi_1(1,y)} = -I_{-\infty}^{+\infty} S(y) = k. \quad \blacksquare$$

2. ТЕОРЕМА ЭРМИТА-ГУРВИЦА-ФРОБЕНИУСА И УСЛОВИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Из теоремы 2 немедленно следует, что

$$ind\,(\Psi,0) = -I_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(1,y)\,(F(1,y))'}{F(1,y)}.$$

Поэтому так как

$$k = I_{-\infty}^{+\infty} \frac{(F(1,y))'}{F(1,y)},$$

то равенство $ind\,(\Psi, 0) = k$ равносильно равенству

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(1,y)\,(F(1,y))'}{F(1,y)} = -I_{-\infty}^{+\infty} \frac{(F(1,y))'}{F(1,y)}. \tag{10}$$

Обозначим $g_1(y) = F(1,y)$, $g_2(y) = P(1,y)\,(F(1,y))'$. Равенство (10) принимает вид

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_2}{g_1} = -I_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_1'}{g_1}. \tag{11}$$

Приведём формулировку теоремы Эрмита-Гурвица-Фробениуса (см. [2]), позволяющую выразить индекс Коши вещественной рациональной функции на интервале $(-\infty, +\infty)$ через её коэффициенты.

Вначале введём необходимые обозначения.

Пусть

$$\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_l \tag{12}$$

— некоторая последовательность вещественных чисел, причём $\mu_0 \neq 0$, $\mu_l \neq 0$. В последовательности (12) заменим нули (если они имеются) на ненулевые числа по следующему правилу: для всякой группы подряд идущих нулей $\mu_{h+1} = \ldots = \mu_{h+q} = 0$ ($\mu_h \neq 0$, $\mu_{h+q+1} \neq 0$) заменим μ_{h+i} ($1 \leqslant i \leqslant q$) на $(-1)^{\frac{i(i-1)}{2}} sgn\,\mu_h$. Число знакоперемен в полученной таким образом последовательности обозначим $V\,(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_l)$.

Пусть $f_1(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{k_1} x^{k_1}$, $f_2(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{k_2} x^{k_2}$ — произвольные многочлены, $a_{k_1} \neq 0$, $b_{k_2} \neq 0$, $M = \max\{k_1, k_2\}$. Положим

$$æ(f_1, f_2) = \begin{cases} sgn\,(a_{k_1} b_{k_2}), \text{ если } k_1 - k_2 < 0 \text{ и } k_1 \not\equiv k_2 (\mathrm{mod} 2), \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для всякого $i = 1, \ldots, M$ обозначим

$$\nabla_i(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} a_M & a_{M-1} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{M-2i+1} \\ b_M & b_{M-1} & \ldots & \ldots & \ldots & b_{M-2i+1} \\ 0 & a_M & \ldots & \ldots & \ldots & a_{M-2i+2} \\ 0 & b_M & \ldots & \ldots & \ldots & b_{M-2i+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & a_M & \ldots & a_{M-i} \\ & \smash{\raisebox{1ex}{\Large 0}} & & b_M & \ldots & b_{M-i} \end{vmatrix},$$

где $a_j = 0$ если $j < 0$ или $j > k_1$, $b_j = 0$ если $j < 0$ или $j > k_2$.

Теорема 5 (Эрмит-Гурвиц-Фробениус). Если $\nabla_s(f_1, f_2)$ - последнее отличное от нуля число в ряду $\nabla_1(f_1, f_2)$,...,$\nabla_M(f_1, f_2)$, то справедлива формула

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_2}{f_1} = s - 2V\,(1, \nabla_1(f_1, f_2), \ldots, \nabla_s(f_1, f_2)) + æ(f_1, f_2). \tag{13}$$

Выразим индексы Коши, стоящие в левой и правой частях равенства (11), по формуле (13). Пусть многочлены $P(x,y), Q(x,y)$ имеют вид

$$P(x,y) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} y + \ldots + p_n y^n,$$

$$Q(x,y) = q_0x^n + q_1x^{n-1}y + \ldots + q_ny^n.$$

Тогда

$$g_1(y) = -q_0 + (p_0 - q_1)y + (p_1 - q_2)y^2 + \ldots + (p_{n-1} - q_n)y^n + p_ny^{n+1},$$

$$g_1'(y) = (p_0 - q_1) + 2(p_1 - q_2)y + 3(p_2 - q_3)y^2 + \ldots + n(p_{n-1} - q_n)y^{n-1} + (n+1)p_ny^n.$$

Так как $P(0,y) \not\equiv 0$, то $\deg\, g_1 = n+1$, $\deg\, g_1' = n$. Так как $\deg\, g_1 > \deg\, g_1'$, то $æ(g_1, g_1') = 0$ и

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_1'}{g_1} = s_1 - 2V\left(1, \nabla_1(g_1, g_1'), \ldots, \nabla_{s_1}(g_1, g_1')\right),$$

где $\nabla_{s_1}(g_1, g_1')$ — последнее отличное от нуля число в ряду $\nabla_1(g_1, g_1'), \ldots, \nabla_{n+1}(g_1, g_1')$.

Имеем $\deg\, g_2 = 2n$. В силу нечетности числа n величины $\deg\, g_1$ и $\deg\, g_2$ имеют одинаковую четность, поэтому $æ(g_1, g_2) = 0$. Кроме того, $\deg\, g_2 \geqslant \deg\, g_1$. Тогда

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_2}{g_1} = s_2 - 2V\left(1, \nabla_1(g_1, g_2), \ldots, \nabla_{s_2}(g_1, g_2)\right),$$

где $\nabla_{s_2}(g_1, g_2)$ — последнее отличное от нуля число в ряду $\nabla_1(g_1, g_2), \ldots, \nabla_{2n}(g_1, g_2)$. Заметим, что $\nabla_1(g_1, g_2) = \ldots = \nabla_{n-2}(g_1, g_2) = 0$ (каждый из этих определителей имеет нулевую строку), поэтому $\nabla_1(g_1, g_2), \ldots, \nabla_{n-2}(g_1, g_2)$ не требуют вычислений.

Итак, равенство $ind(\Psi, 0) = k$ равносильно равенству

$$s_1 - 2V\left(1, \nabla_1(g_1, g_1'), \ldots, \nabla_{s_1}(g_1, g_1')\right) = -s_2 + 2V\left(1, \nabla_1(g_1, g_2), \ldots, \nabla_{s_2}(g_1, g_2)\right). \tag{14}$$

3. УСЛОВИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ $n = 1$

Пусть теперь $n = 1$. Покажем, что если $P(0,y) \not\equiv 0$ и многочлен $F(1,y)$ имеет k различных вещественных корней, $k > 0$, то теорема 1 представляет собой известный критерий асимптотической устойчивости линейных систем (см. напр. [8, 1]):

Теорема 6. Нулевое решение системы $\dot{x} = Ax$ ($x = (x_1, \ldots, x_m)$, $A - m \times m$-матрица) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все характеристические значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части.

Другими словами, докажем следующую лемму:

Лемма 1. Пусть $P(x,y) = p_1x + p_2y$, $Q(x,y) = q_1x + q_2y$, $P(0,y) \not\equiv 0$ и многочлен $F(1,y)$ имеет k различных вещественных корней, $k > 0$. Тогда собственные значения матрицы

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix} \tag{15}$$

имеют отрицательные вещественные части если и только если 0 является изолированной особой точкой векторного поля Ψ и $ind(\Psi, 0) = k$.

Доказательство. **I. Необходимость.** Пусть собственные значения матрицы (15) имеют отрицательные вещественные части. Это равносильно одновременному выполнению неравенств

$$p_1 + q_2 < 0 \tag{16}$$

$$p_1q_2 - q_1p_2 > 0 \tag{17}$$

Действительно, характеристический многочлен матрицы (15) имеет вид $\lambda^2 - (p_1 + q_2)\lambda + (p_1q_2 - q_1p_2)$. Если оба его корня λ_1, λ_2 действительны, то $\lambda_1 + \lambda_2 = p_1 + q_2$, $\lambda_1\lambda_2 = p_1q_2 - p_2q_1$. Если λ_1, λ_2 комплексные, то $Re\,\lambda_1 = Re\,\lambda_2 = \frac{p_1+q_2}{2}$, $p_1q_2 - q_1p_2 = \|\lambda_1\|^2 = \|\lambda_2\|^2$. Отсюда легко видеть, что в общем случае $Re\,\lambda_1 < 0,\ Re\,\lambda_2 < 0$ если и только если выполнены неравенства (16), (17).

Покажем, что 0 – изолированная особая точка поля Ψ. Пусть $(x, y) \neq 0$, $\Psi(x, y) = 0$. Так как многочлены $\frac{F(x,y)}{\text{НОД}\left(F(x,y), \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right)}$, $\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}{\text{НОД}\left(F(x,y), \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right)}$ не имеют общих множителей, то получаем:

$$\begin{cases} F(x,y) = 0, \\ P(x,y) = 0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} xQ(x,y) = 0, \\ P(x,y) = 0. \end{cases}$$

Тогда если

$$\begin{cases} P(x,y) = 0, \\ Q(x,y) = 0, \end{cases}$$

то определитель матрицы (15) равен нулю как определитель матрицы линейной однородной системы, имеющей ненулевое решение. Это противоречит неравенству (17). Если же выполнено

$$\begin{cases} x = 0, \\ P(x,y) = 0, \end{cases}$$

мы имеем $P(0, y) = p_2 y = 0$, где $y \neq 0$ (т.к. $(x, y) \neq 0$) и $p_2 \neq 0$ (т.к. $P(0, y) \not\equiv 0$). Противоречие. Следовательно, 0 – изолированная особая точка векторного поля Ψ.

Докажем равенство (14), которое равносильно равенству $ind(\Psi, 0) = k$.

Как и выше, будем обозначать $g_1(y) = F(1, y)$, $\quad g_2(y) = P(1, y)\,(F(1, y))'$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$\nabla_1(g_1, g_1') = 2p_2^2, \quad \nabla_2(g_1, g_1') = p_2^2\left((p_1 - q_2)^2 + 4p_2q_1\right), \tag{18}$$

$$\nabla_1(g_1, g_2) = p_2^2(p_1 + q_2), \quad \nabla_2(g_1, g_2) = p_2^2(p_1q_2 - q_1p_2)\left((p_1 - q_2)^2 + 4p_2q_1\right). \tag{19}$$

1 случай. Предположим, что $(p_1 - q_2)^2 + 4p_2q_1 = 0$. Тогда $\nabla_2(g_1, g_1') = 0$, $\nabla_2(g_1, g_2) = 0$. Так как $p_2 \neq 0$ (в силу того, что $P(0, y) \not\equiv 0$) и выполнено неравенство (16), то $\nabla_1(g_1, g_1') \neq 0$, $\nabla_1(g_1, g_2) \neq 0$. Таким образом, в равенстве (14) $s_1 = 1, s_2 = 1$.

С учётом неравенства (16) и равенств (18), (19) получаем, что левая часть равенства (14) принимает вид $1 - 2V(1,\, 2p_2^2) = 1$, правая часть принимает вид $-1 + 2V\left(1, p_2^2(p_1 + q_2)\right) = -1 + 2 = 1$. Таким образом, равенство (14) выполнено.

2 случай. Пусть теперь $(p_1 - q_2)^2 + 4p_2q_1 \neq 0$. Тогда так как $p_2 \neq 0$, то $\nabla_2(g_1, g_1') \neq 0$ и $s_1 = 2$. Так как, кроме того, выполнено неравенство (17), то $\nabla_2(g_1, g_2) \neq 0$ и $s_2 = 2$.

Имеем $F(1, y) = p_2y^2 + (p_1 - q_2)y - q_1$. По условию, этот многочлен имеет вещественные корни, поэтому $D = (p_1 - q_2)^2 + 4p_2q_1 \geqslant 0$, но так как в рассматриваемом случае эта величина ненулевая, то $(p_1 - q_2)^2 + 4p_2q_1 > 0$.

С учётом последнего неравенства, а также неравенств (16), (17) и равенств (18), (19) получаем, что левая часть равенства (14) принимает вид $2 - 2V\left(1,\, 2p_2^2, p_2^2((p_1 - q_2)^2 + 4p_2q_1)\right) = 2$, правая часть принимает вид $-2 + 2V\left(1,\, p_2^2(p_1 + q_2), p_2^2(p_1q_2 - p_2q_1)((p_1 - q_2)^2 + 4p_2q_1)\right) = -2 + 4 = 2$. Таким образом, равенство (14) выполнено.

II. Достаточность. Пусть 0 – изолированная особая точка поля Ψ и выполнено равенство $ind(\Psi, 0) = k$(а значит, и равенство (14)). Покажем, что справедливы неравенства (16), (17), одновременное выполнение которых равносильно тому, что собственные значения матрицы (15) имеют отрицательные вещественные части.

Так как 0 – изолированная особая точка поля Ψ, то, как нетрудно видеть, она является изолированной и для линейного поля (P,Q). Другими словами, 0 является единственным решением линейной однородной системы

$$\begin{cases} P(x,y)=0, \\ Q(x,y)=0. \end{cases}$$

Следовательно, определитель этой системы $p_1q_2-p_2q_1$ отличен от нуля.

1 случай. Предположим, что $(p_1-q_2)^2+4p_2q_1=0$. Значит, $s_1=1$. Кроме того,

$$p_2q_1=-\frac{(p_1-q_2)^2}{4},$$

откуда

$$p_1q_2-p_2q_1=\frac{(p_1+q_2)^2}{4}. \tag{20}$$

Из равенства (20) и неравенства $p_1q_2-p_2q_1\neq 0$ вытекает, что выполнено неравенство (17), а также что $p_1+q_2\neq 0$, и, следовательно, $s_2=1$. Таким образом, равенство (14) принимает вид $1-2V(1,\,2p_2^2)=-1+2V\left(1,p_2^2(p_1+q_2)\right)$, откуда $V\left(1,p_2^2(p_1+q_2)\right)=1$. Тогда выполнено неравенство (16).

2 случай. Пусть теперь $(p_1-q_2)^2+4p_2q_1\neq 0$. Тогда $s_1=2$, а так как $p_1q_2-p_2q_1\neq 0$, то $s_2=2$. Значит, равенство (14) принимает вид

$$\begin{aligned} &2-2V\left(1,\,2p_2^2,\,p_2^2((p_1-q_2)^2+4p_2q_1)\right)=\\ &\qquad=-2+2V\left(1,\,p_2^2(p_1+q_2),\,p_2^2(p_1q_2-p_2q_1)((p_1-q_2)^2+4p_2q_1)\right). \end{aligned} \tag{21}$$

В силу того, что многочлен $F(1,y)$ имеет вещественные корни, выполнено $(p_1-q_2)^2+4p_2q_1>0$. Из этого неравенства и равенства (21) следует

$$V\left(1,\,p_2^2(p_1+q_2),\,p_2^2(p_1q_2-p_2q_1)((p_1-q_2)^2+4p_2q_1)\right)=2,$$

откуда вытекают неравенства (16), (17).

Автор выражает благодарность Н.М. Близнякову за постановку задачи, полезные обсуждения и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости : учеб. пособие для вузов по напр. и спец. "Математика"/ Б.П. Демидович. – 2-е изд. - М. : Изд-во Моск. ун-та : ЧеРо, 1998. - 480 с.

[2] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. - М. : Наука, 1967. - 576 с.

[3] Зачепа В.Р. Устойчивость по Ляпунову динамической системы с полуквазиоднородной правой частью / В.Р. Зачепа // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. - 2007. - № 1. - С. 49-54.

[4] Утешев А.Ю. Критерий асимптотической устойчивости системы двух дифференциальных уравнений с однородными правыми частями / А.Ю. Утешев, С.Г. Шуляк // Дифференциальные уравнения. - 1987. - Т. 23, № 6. - С. 1009-1014.

[5] Векторные поля на плоскости / М.А. Красносельский [и др.]. - М. : Физматгиз, 1963. - 248 с.

[6] Близняков Н.М. Вычисление и оценки индекса особой точки векторного поля на плоскости / Н.М. Близняков ; Воронеж. гос. ун-т. - Воронеж, 1979. - 26 с. - Деп. в ВИНИТИ 14.08.79, № 3041-79.

[7] Каменков Г.В. Избранные труды : в 2-х т. / Г.В. Каменков. - М. : Наука, 1972. - Т. 2 : Устойчивость и колебания нелинейных систем. - 216 с.

[8] Ла-Салль Ж. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова / Ж. Ла-Салль, С. Лефшец. - М. : Мир, 1964. - 168 с.

Антюшина И. В., Воронежский государственный университет, ведущий инженер Управления научно-исследовательских работ
E-mail: iamveryok@mail.ru
Тел.: 8-915-541-69-23

Antyushina I. V., Voronezh State University, Leading Engineer of Management of Research Works
E-mail: iamveryok@mail.ru
Tel.: 8-915-541-69-23