

# ОЦЕНКА ВРЕМЕНИ ПРИХОДА ФЛУКТУИРУЮЩЕГО РАДИОИМПУЛЬСА С НЕИЗВЕСТНОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ

А. В. Захаров

*Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 11.03.2013 г.

**Аннотация:** на основе метода максимального правдоподобия выполнен синтез алгоритмов оценки времени прихода быстро флуктуирующего радиоимпульса, представляющего собой отрезок реализации узкополосного гауссовского случайного процесса. При этом амплитуда и фаза радиоимпульса имеют соответственно релеевское и равномерное распределения вероятностей. Получены аналитические выражения для характеристик эффективности предложенных алгоритмов оценки в условиях высокой апостериорной точности и при отсутствии аномальных ошибок. Проведено сравнение эффективности рассмотренных алгоритмов.

**Ключевые слова:** гауссовский случайный импульс, время прихода, оценка максимального правдоподобия, асимптотически оптимальная оценка, квазиоптимальная оценка, смещение оценки, рассеяние оценки.

**Abstract:** some algorithms for the estimation of time delay of rapid fluctuated pulse, which represents a piece of narrowband Gaussian random process, are synthesized by means of maximum likelihood method. Thus the amplitude and a phase of pulse has accordingly Rayleigh and uniform distributions. Analytical expressions for characteristics of efficiency of offered algorithms are obtained in conditions of high estimation accuracy and at absence of abnormal mistakes. Comparison of efficiency of the considered algorithms is carried out.

**Keywords:** Gaussian random pulse, time delay, maximum likelihood estimation, asymptotically optimal estimation, quasioptimal estimation, bias, variance of estimation.

## ВВЕДЕНИЕ

Задача оценки времени прихода случайных импульсных сигналов на фоне помех возникает в различных приложениях радиоп физики и радиотехники [1, 2]. Такая задача актуальна в радио и гидролокации, в радиосвязи, навигации и телеметрии, в радиоуправлении, при технической диагностике, при управлении производственными процессами и др. Проблема оценки времени прихода импульсных сигналов возникает в сейсмологии и геологии, в радиоспектроскопии, в радиоастрономии, гидроакустике и в других областях физики и техники.

При распространении сигналов в неоднородных и турбулентных физических средах, в каналах с замираниями, с модулирующей помехой и др., возникают случайные изменения (флуктуации) амплитуды и фазы передаваемых сигналов. Такие флуктуации могут возникать и при излучении сигналов вследствие стохастической природы излучающего сигнал объекта. При этом флуктуирующие сигналы часто можно рассматривать как случайную суперпозицию большого числа независимых элементарных сигналов. Такие флуктуирующие сигналы являются гауссовскими случайными процессами [3].

**Модель сигнала.** В качестве модели флуктуирующего радиоимпульса рассмотрим гауссовский случайный импульс [4, 5]

$$s(t) = a(t) I[(t - \lambda_0)/\tau_0] \cos[\nu_0 t - \varphi(t)] = \xi(t) I[(t - \lambda_0)/\tau_0], \quad (1)$$

где  $I(x) = 1$  при  $|x| < 1/2$ ,  $I(x) = 0$  при  $|x| \geq 1/2$  — прямоугольная функция, определяющая форму огибающей импульса при отсутствии флуктуаций,  $\lambda_0$  — априори неизвестное время прихода импульса,  $\tau_0$  — длительность импульса,  $\nu_0$  — несущая частота импульса, а  $a(t)$  и  $\varphi(t)$  — случайные процессы, задающие законы случайных амплитудных и фазовых флуктуаций сигнала. При этом случайный процесс  $\xi(t) = a(t) \cos[\nu_0 t - \varphi(t)]$  можно интерпретировать как стохастическую несущую импульса (1), а функцию  $I[(t - \lambda_0)/\tau_0]$  — как модулирующую функцию, вырезающую из несущей  $\xi(t)$  отрезок с временным положением  $\lambda_0$  и длительностью  $\tau_0$ . Здесь стохастическая несущая  $\xi(t)$  является узкополосным стационарным центрированным *гауссовским* случайным процессом, а случайные процессы  $a(t)$  и  $\varphi(t)$  являются стационарными и имеют соответственно *релеевское* и *равномерное* распределения вероятностей [3].

Спектральную плотность  $G(\omega)$  процесса  $\xi(t)$  удобно представить в виде [4]

$$G(\omega) = \frac{\gamma_0}{2} \left\{ g\left(\frac{\nu_0 - \omega}{\Omega_0}\right) + g\left(\frac{\nu_0 + \omega}{\Omega_0}\right) \right\}, \quad (2)$$

где  $\Omega_0 = \int_0^\infty G^2(\omega) d\omega / \max_\omega G^2(\omega)$  — эквивалентная ширина полосы частот стохастической несущей,  $\gamma_0 = 2 \max G(\omega)$  — интенсивность стохастической несущей, а функция  $g(x)$  задает форму спектральной плотности (2) и нормирована так, что

$$\max g(x) = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x) dx = 1. \quad (3)$$

При этом, в силу узкополосности несущей  $\xi(t)$ , выполняется условие  $\nu_0 \gg \Omega_0$ .

Считаем, что флуктуации сигнала (1) являются *быстрыми*, т.е. время корреляции  $\tau_K \approx 2\pi/\Omega_0$  случайного процесса  $\xi(t)$  *значительно меньше* длительности  $\tau_0$  импульса (1). Тогда выполняется условие [4, 5]

$$\mu_0 = \tau_0 \Omega_0 / 2\pi \gg 1. \quad (4)$$

Отметим, что при выполнении (4) параметры  $\gamma_0$  и  $\Omega_0$  характеризуют интенсивность и ширину полосы частот флуктуирующего импульса (1).

Считаем, что время прихода  $\lambda_0$  сигнала (1) *априори неизвестно* и подлежит измерению (оценке). При этом известен априорный интервала  $[\Lambda_1; \Lambda_2]$  возможных значений времени прихода  $\lambda_0$ , что на практике обычно выполняется.

В реальных условиях обработка сигналов часто производится в условиях априорной неопределенности, когда кроме времени прихода импульса неизвестна его амплитуда (интенсивность). Это объясняется случайным ослаблением сигнала при распространении по физическим средам и каналам связи. Поэтому далее будем считать, что *интенсивность*  $\gamma_0$  сигнала (1) *априори неизвестна*.

Примерами импульса (1) являются сигналы в радио и гидроакустических каналах с замираниями [6, 7], импульсные радиосигналы, искаженные модулирующей помехой [8], отраженные от сложного объекта с множеством “блестящих” точек [9, 10] и др. Импульсные сигналы (1) встречаются в радиоастрономии, в геофизике, в радиоспектроскопии и в других областях физики и техники.

**Модель шума.** На практике радиотехнические сигналы обычно наблюдаются на фоне шума (случайной помехи), когда наблюдению и обработке доступен не сам сигнал, а лишь смесь сигнала и шума. Распространенным видом помехи является аддитивный флуктуационный шум, имеющий тепловую природу и всегда присутствующий в реальных радиотехнических устройствах [1-3, 6]. Адекватной моделью такого шума является гауссовский белый шум [3]. Поэтому далее будем считать, что сигнал  $s(t)$  (1) наблюдается на фоне аддитивного гауссовского белого шума  $n(t)$  с односторонней спектральной плотностью  $N_0$ , причем сигнал  $s(t)$  и шум  $n(t)$  статистически независимы.

**Постановка задачи оценки.** Пусть на входе приемника в течение интервала времени  $t \in [T_1; T_2]$  наблюдается аддитивная смесь

$$x(t) = s(t) + n(t), \quad t \in [T_1; T_2] \quad (5)$$

флуктуирующего сигнала  $s(t)$  (1) с неизвестными временем прихода  $\lambda_0$  и интенсивностью  $\gamma_0$ , а также гауссовского белого шума  $n(t)$ . При этом интервал наблюдения  $[T_1; T_2]$  выбирается так, что  $T_1 < \Lambda_1 - \tau_0/2$  и  $T_2 > \Lambda_2 + \tau_0/2$ , т.е. сигнал (1) полностью локализован в пределах интервала  $[T_1; T_2]$  при любом значении времени прихода  $\lambda_0$  из априорного интервала  $[\Lambda_1; \Lambda_2]$ .

На основе обработки наблюдаемой реализации  $x(t)$  (5), а также с учетом имеющейся априорной информации о свойствах сигнала и шума, необходимо измерить (оценить) время прихода  $\lambda_0$  флуктуирующего сигнала  $s(t)$  (1).

**Известные результаты.** В [5] на основе метода максимального правдоподобия [1, 12] получен алгоритм оценки времени прихода стохастического импульса более общего вида с гауссовской случайной субструктурой, а также найдены асимптотические выражения для характеристик оценки. Из [5], как частный случай, можно получить соответствующие результаты для флуктуирующего радиоимпульса (1), наблюдаемого на фоне белого шума. Однако, в [5] предполагается, что все параметры импульса, кроме времени прихода, априори известны. Далее будет рассмотрен случай, когда неизвестны не только время прихода, но и интенсивность флуктуирующего сигнала (1).

В [11] рассмотрена задача обнаружения флуктуирующего радиоимпульса (1) с неизвестными временем прихода и интенсивностью, наблюдаемого на фоне белого шума. Далее будем предполагать, что сигнал (1) уже обнаружен и присутствует на входе приемника с вероятностью 1. Будет рассмотрена задача измерения (оценки) времени прихода такого сигнала.

## 1. АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

**Синтез алгоритма оценки. Общий случай.** Для синтеза алгоритма оценки времени прихода  $\lambda_0$  флуктуирующего импульса (1) с неизвестной интенсивностью  $\gamma_0$  используем метод максимального правдоподобия (МП) [1, 12].

Согласно методу МП, по наблюдаемой реализации  $x(t)$  (5) необходимо формировать логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП)  $L(\lambda, \gamma)$ , как функцию возможных значений  $\lambda$  и  $\gamma$  неизвестных времени прихода  $\lambda_0$  и интенсивности  $\gamma_0$  сигнала. Тогда оценка максимального правдоподобия (ОМП)  $\lambda_M$  времени прихода  $\lambda_0$  определяется как координата  $\lambda$  положения абсолютного максимума логарифма ФОП  $L(\lambda, \gamma)$  в пределах области значений  $\lambda$  и  $\gamma$ , задаваемой условиями  $\lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2]$  и  $\gamma > 0$ , т.е.

$$\lambda_M = \arg \sup_{\lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2]} \left[ \sup_{\gamma > 0} L(\lambda, \gamma) \right]. \quad (6)$$

Воспользовавшись результатами [4, 5] при выполнении (4), для логарифма ФОП получаем выражение

$$L(\lambda, \gamma) = M(\lambda, q) / N_0 - \Gamma(q), \quad (7)$$

$$\Gamma(q) = \mu_0 \int_{-\infty}^{\infty} \ln[1 + qg(x)] dx, M(\lambda, q) = \int_{\lambda-\tau_0/2}^{\lambda+\tau_0/2} y^2(t, q) dt, \quad (8)$$

где  $q = \gamma/N_0$ , а  $y(t, q) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) h(t - u, q) du$  — отклик линейного фильтра с импульсной характеристикой (ИХ)  $h(t, q)$  на наблюдаемые данные  $x(t)$  (5), причем передаточная функция (ПФ)  $H(\omega, q)$  этого фильтра удовлетворяет условию

$$|H(\omega, q)|^2 = \frac{qg[(\nu_0 - \omega)/\Omega_0]}{1 + qg[(\nu_0 - \omega)/\Omega_0]} + \frac{qg[(\nu_0 + \omega)/\Omega_0]}{1 + qg[(\nu_0 + \omega)/\Omega_0]}. \quad (9)$$

Практическая реализация алгоритма оценки (6) может быть осуществлена аналогично [11]. В частности, алгоритм оценки (6) предполагает фильтрацию наблюдаемых данных  $x(t)$  (5) с помощью набора линейных фильтров с передаточными функциями  $H(\omega, q)$  (9) для всех возможных значений  $q$  отношения  $q_0 = \gamma_0/N_0$ . Далее, согласно (8), выходной сигнал каждого фильтра возводится в квадрат и затем интегрируется в пределах скользящего временного интервала  $[\lambda - \tau_0/2; \lambda + \tau_0/2]$  для всех  $\lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2]$ . Такая процедура интегрирования реализуется с помощью линейного фильтра, согласованного с прямоугольным импульсом длительностью  $\tau_0$  [1, 4 и др.]. В результате получаем значения функции  $M(\lambda, q)$  (8) для различных значений аргументов  $\lambda, q$ . На основе функции  $M(\lambda, q)$  формируется логарифм ФОП  $L(\lambda, \gamma)$  (7) и определяется значение  $\lambda$ , при котором логарифм ФОП достигает абсолютного максимума. Найденное значение  $\lambda$ , согласно (6), принимается в качестве ОМП  $\lambda_M$  времени прихода  $\lambda_0$  импульса (1).

Отметим, что при реализации алгоритма (6) необходимо формировать логарифм ФОП  $L(\lambda, \gamma)$  (7), как функцию *двух переменных*  $\lambda, \gamma$ , и искать положение абсолютного максимума этой функции для всех значений  $\lambda, \gamma$  из априорной области возможных значений времени прихода  $\lambda_0$  и интенсивности  $\gamma_0$ . Это требует больших вычислительных и аппаратных затрат, что затрудняет использование алгоритма ОМП (6) в реальном времени при большой априорной неопределенности времени прихода и интенсивности импульса (1).

**Частный случай.** Структура алгоритма ОМП (6) существенно упрощается, если форму спектральной плотности (2) стохастической несущей  $\xi(t)$  можно считать *прямоугольной*. Тогда в (2) следует положить  $g(x) = I(x)$ , где  $I(x) = 1$  при  $|x| < 1/2$ ,  $I(x) = 0$  при  $|x| \geq 1/2$ . При этом выражение (2) принимает вид

$$G(\omega) = \frac{\gamma_0}{2} \left\{ I\left(\frac{\nu_0 - \omega}{\Omega_0}\right) + I\left(\frac{\nu_0 + \omega}{\Omega_0}\right) \right\}. \quad (10)$$

Для спектральной плотности (10) логарифм ФОП (7) можно переписать как

$$L(\lambda, \gamma) = q M_B(\lambda) / N_0(1 + q) - \Gamma_B(q), \Gamma_B(q) = \mu_0 \ln(1 + q),$$

$$M_B(\lambda) = \int_{\lambda-\tau_0/2}^{\lambda+\tau_0/2} y_B^2(t) dt, \quad (11)$$

где  $y_B(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) h_B(t - u) du$  — отклик линейного фильтра с ИХ  $h_B(t)$  на наблюдаемые данные  $x(t)$ , причем ПФ  $H_B(\omega)$  этого фильтра удовлетворяет условию

$$|H_B(\omega)|^2 = I[(\nu_0 - \omega)/\Omega_0] + I[(\nu_0 + \omega)/\Omega_0]. \quad (12)$$

Тогда ОМП (6), в силу условия  $q > 0$ , совпадает с оценкой

$$\lambda_M = \arg \sup_{\lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2]} M_B(\lambda), \quad (13)$$

представляющей собой координату  $\lambda$  положения абсолютного максимума функционала  $M_B(\lambda)$  (11) на интервале  $\lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2]$ .

Практическая реализация алгоритма оценки (13) значительно проще, чем алгоритма ОМП (6). Действительно, оценка (13) предполагает фильтрацию наблюдаемых данных  $x(t)$  (5) с помощью *только одного* линейного фильтра, передаточная функция которого  $H_B(\omega)$  определяется из (12) и не зависит от  $q$ . Далее выходной сигнал фильтра возводится в квадрат и интегрируется в пределах скользящего временного интервала  $[\lambda - \tau_0/2; \lambda + \tau_0/2]$  для всех  $\lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2]$ . В результате получаем значения решающей статистики  $M_B(\lambda)$  (11), как функции переменной  $\lambda$ . Оценка  $\lambda_M$  (13) определяется как значение  $\lambda$ , при котором функция  $M_B(\lambda)$  достигает абсолютного (наибольшего) максимума на интервале  $[\Lambda_1; \Lambda_2]$ .

Отметим, что формирование функции  $M_B(\lambda)$  (11) и поиск её абсолютного максимума только по *одной переменной*  $\lambda$  требует гораздо меньших вычислительных и аппаратных затрат, чем формирование и поиск абсолютного максимума логарифма ФОП  $L(\lambda, \gamma)$ , как функции двух переменных  $\lambda$  и  $\gamma$ . Однако, оценка (13) является ОМП только в случае (10) прямоугольной спектральной плотности несущей. Для непрямоугольной спектральной плотности (2) алгоритм оценки (13) уже не является оптимальным.

**Характеристики оценки.** Эффективность алгоритмов оценки параметров сигналов в общем случае характеризуют с помощью плотности вероятности оценки  $W(\lambda)$  [1, 12]. На практике часто ограничиваются заданием первых двух моментов ошибки оценки – смещения оценки (средней ошибки)  $b$  и рассеяния оценки (среднего квадрата ошибки)  $V$  [1, 12].

Учтем, что характеристики ОМП (6) определяются вероятностными свойствами решающей статистики (РС) алгоритма оценки - логарифма ФОП  $L(\lambda, \gamma)$  (7).

Поэтому рассмотрим вначале характеристики логарифма ФОП.

Обозначим  $S(\lambda, \gamma) = \langle L(\lambda, \gamma) \rangle -$  детерминированная, а  $N(\lambda, \gamma) = L(\lambda, \gamma) - \langle L(\lambda, \gamma) \rangle -$  случайная составляющие логарифма ФОП (7), где  $\langle \rangle$  означает усреднение по реализациям наблюдаемых данных  $x(t)$  при фиксированных значениях  $\lambda_0$  и  $\gamma_0$ . Из [4] следует, что логарифм ФОП  $L(\lambda, \gamma)$  (7) является асимптотически (при  $\mu_0 \rightarrow \infty$ ) гауссовским случайным полем. Как известно, статистические характеристики гауссовского случайного поля определяются первыми двумя моментами поля - математическим ожиданием и корреляционной функцией [3]. Поэтому для расчета характеристик ОМП (6) при выполнении (4) можно ограничиться анализом двух первых моментов логарифма ФОП - детерминированной составляющей  $S(\lambda, \gamma)$  и корреляционной функции  $K(\lambda_1, \gamma_1, \lambda_2, \gamma_2) = \langle N(\lambda_1, \gamma_1) N(\lambda_2, \gamma_2) \rangle$  случайной составляющей  $N(\lambda, \gamma)$ .

Аналогично [4, 5] получаем, что детерминированная составляющая логарифма ФОП при выполнении (4) имеет вид

$$S(\lambda, \gamma) = A_1(\gamma) C(\lambda - \lambda_0) + A_0(\gamma), C(t) = \max(0; 1 - |t|/\tau_0), \quad (14)$$

$$A_0(\gamma) = \mu_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{qg(x)}{1 + qg(x)} - \ln[1 + qg(x)] \right\} dx, A_1(\gamma) = \mu_0 q_0 q \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g^2(x) dx}{1 + qg(x)},$$

где  $q_0 = \gamma_0/N_0$  - отношение интенсивности принимаемого сигнала (1) к односторонней спектральной плотности шума  $n(t)$ . При выполнении (4) корреляционная функция случайной составляющей логарифма ФОП равна

$$K(\lambda_1, \gamma_1, \lambda_2, \gamma_2) = D_1(\gamma_1, \gamma_2) R(\lambda_1 - \lambda_0, \lambda_2 - \lambda_0) + D_0(\gamma_1, \gamma_2) C(\lambda_1 - \lambda_2), \quad (15)$$

$$R(t_1, t_2) = \max[0; 1 - \max(|t_1|, |t_2|, |t_2 - t_1|)/\tau_0],$$

$$D_0(\gamma_1, \gamma_2) = \mu_0 q_1 q_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g^2(x) dx}{[1 + q_1 g(x)][1 + q_2 g(x)]},$$

$$D_1(\gamma_1, \gamma_2) = \mu_0 q_0 q_1 q_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g^3(x)[2 + q_0 g(x)]}{[1 + q_1 g(x)][1 + q_2 g(x)]} dx,$$

где обозначено  $q_1 = \gamma_1/N_0$ ,  $q_2 = \gamma_2/N_0$ .

Из (14) следует, что детерминированная составляющая  $S(\lambda, \gamma)$  при  $q > 0$  достигает абсолютного максимума при  $\lambda = \lambda_0$ ,  $\gamma = \gamma_0$ , т.е. в точке истинных значений времени прихода и интенсивности сигнала (1). При этом реализации случайной составляющей  $N(\lambda, \gamma)$  непрерывны с вероятностью 1. Тогда выходное отношение сигнал/шум (ОСШ) для алгоритма ОМП (6) равно [1, 12]:

$$z = \frac{S(\lambda_0, \gamma_0) - S(\lambda_0 + \tau_0, \gamma_0)}{\sqrt{K(\lambda_0, \gamma_0, \lambda_0, \gamma_0)}} = \frac{A_1(\gamma_0)}{\sqrt{D_1(\gamma_0, \gamma_0) + D_0(\gamma_0, \gamma_0)}} = \sqrt{\mu_0 q_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g^2(x) dx}{1 + q_0 g(x)}. \quad (16)$$

Рассмотрим теперь характеристики ОМП (6). Точные выражения для характеристик ОМП времени прихода импульсных сигналов обычно найти не удается [1, 5, 12 и др.]. Следуя [1, 4, 5, 12], получим асимптотически точные (с ростом ОСШ  $z$ ) выражения для характеристик ОМП (6). Будем полагать, что выходное ОСШ (16) велико, так что выполняется условие  $z \gg 1$ . При этом отношение  $q_0 = \gamma_0/N_0$ , которое можно интерпретировать как входное ОСШ, может быть мало.

Будем считать, что оценка времени прихода импульса (1) является надежной [12], т.е. величина  $|\lambda_M - \lambda_0|$  ошибки ОМП  $\lambda_M$  (6) не превосходит длительности  $\tau_0$  сигнала. Иными словами, аномальные ошибки  $|\lambda_M - \lambda_0| > \tau_0$  при оценке времени прихода  $\lambda_0$  отсутствуют [12]. Это справедливо при выполнении условия  $\Lambda_2 - \Lambda_1 \leq \tau_0$ , когда неопределенность времени прихода импульса не превышает его длительности  $\tau_0$  [5, 12]. На практике обычно стремятся обеспечивать условие надежности оценки.

При больших ОСШ ( $z \gg 1$ ) и при отсутствии аномальных ошибок достигается высокая апостериорная точность (ВАТ) оценки [12, 13]. Это значит, что ОМП  $\lambda_M$  (6) находится в малой окрестности истинного значения  $\lambda_0$  времени прихода импульса, так что  $|\lambda_M - \lambda_0| \ll \tau_0$ . При этом положение абсолютного максимума логарифма ФОП  $L(\lambda, \gamma)$  по параметру  $\gamma$  находится в малой окрестности истинного значения  $\gamma_0$  интенсивности принимаемого импульса. Поэтому для расчета характеристик ОМП  $\lambda_M$  (6) в условиях ВАТ можно ограничиться анализом статистических характеристик логарифма ФОП  $L(\lambda, \gamma)$  в малой окрестности значений  $\lambda = \lambda_0$  и  $\gamma = \gamma_0$ .

Из (14), (15) следует, что детерминированная составляющая  $S(\lambda, \gamma)$  и корреляционная функция случайной составляющей  $N(\lambda, \gamma)$  непрерывно дифференцируемы по параметру  $\gamma$  в окрестности точки  $\gamma = \gamma_0$ . Поэтому интенсивность  $\gamma_0$  импульса (1) является регулярным параметром [13]. Однако из (14), (15) видно, что детерминированная составляющая  $S(\lambda, \gamma)$  и корреляционная функция случайной составляющей  $N(\lambda, \gamma)$  не являются непрерывно дифференцируемыми функциями по времени прихода  $\lambda$  в окрестности точки  $\lambda = \lambda_0$ . В частности, производные этих функций по параметру  $\lambda$  в точке  $\lambda = \lambda_0$  имеют разрывы первого рода. Поэтому время прихода  $\lambda_0$  импульса (1) является разрывным параметром [13]. Это не позволяет воспользоваться методом малого параметра [12] для расчета характеристик ОМП (6), так как этот метод требует непрерывной дифференцируемости моментов логарифма ФОП  $L(\lambda, \gamma)$  по обоим параметрам  $\lambda$  и  $\gamma$  в точке максимума  $\lambda = \lambda_0$ ,  $\gamma = \gamma_0$  детерминированной составляющей логарифма ФОП.

В [14] рассмотрен метод расчета характеристик совместных ОМП разрывного и регулярно параметров квазидетерминированного сигнала, наблюдаемого на фоне белого шума. Однако, корреляционная функция случайной составляющей логарифма ФОП для такого сигнала повторяет по форме детерминированную составляющую логарифма ФОП, что для моментов (14), (15) не выполняется. Поэтому результаты [14] здесь напрямую неприменимы и требуют дальнейшего обобщения. В п. III из [13] выполнено обобщение метода [14] на случай более широкого класса сигналов. Воспользовавшись результатами [13] можно записать асимптотически точные (с ростом ОСШ  $z$ ) выражений для характеристик ОМП (6).

Для этого учтем, что первые две производные детерминированной составляющей  $S(\lambda, \gamma)$  (14) по параметру  $\gamma$  при  $\gamma = \gamma_0$  допускают следующие асимптотические представления в малой окрестности значения  $\lambda = \lambda_0$ :

$$\left. \frac{\partial S(\lambda, \gamma)}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=\gamma_0} = \left. \frac{dA_1(\gamma)}{d\gamma} \right|_{\gamma=\gamma_0} C(\lambda - \lambda_0) + \left. \frac{dA_0(\gamma)}{d\gamma} \right|_{\gamma=\gamma_0} = \left. \frac{\partial S(\lambda_0, \gamma)}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=\gamma_0} [1 + O(\delta^{\alpha_1})], \quad (17)$$

$$\left. \frac{\partial^2 S(\lambda, \gamma)}{\partial \gamma^2} \right|_{\gamma=\gamma_0} = \left. \frac{d^2 A_1(\gamma)}{d\gamma^2} \right|_{\gamma=\gamma_0} C(\lambda - \lambda_0) + \left. \frac{d^2 A_0(\gamma)}{d\gamma^2} \right|_{\gamma=\gamma_0} = \left. \frac{\partial^2 S(\lambda_0, \gamma)}{\partial \gamma^2} \right|_{\gamma=\gamma_0} [1 + O(\delta^{\alpha_2})],$$

при  $\delta = |\lambda - \lambda_0|/\tau_0 \rightarrow 0$ , где  $\alpha_1 \geq 1$ ,  $\alpha_2 \geq 1$ , а  $O(\delta)$  — величина того же порядка малости, что и  $\delta$ . Аналогично производные корреляционной функции  $K(\lambda_1, \gamma_1, \lambda_2, \gamma_2)$  (15) по параметрам  $\gamma_1, \gamma_2$  в точке  $\gamma_1 = \gamma_0, \gamma_2 = \gamma_0$  допускают асимптотические представления в малой окрестности значений  $\lambda_1 = \lambda_0, \lambda_2 = \lambda_0$ :

$$\left. \frac{\partial K(\lambda_1, \gamma_1, \lambda_2, \gamma_2)}{\partial \gamma_1} \right|_{\gamma_1=\gamma_2=\gamma_0} = \left. \frac{\partial K(\lambda_0, \gamma_1, \lambda_0, \gamma_2)}{\partial \gamma_1} \right|_{\gamma_1=\gamma_2=\gamma_0} [1 + O(\delta_n^{\alpha_3})], \quad (18)$$

$$\left. \frac{\partial^2 K(\lambda_1, \gamma_1, \lambda_2, \gamma_2)}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2} \right|_{\gamma_1=\gamma_2=\gamma_0} = \left. \frac{\partial^2 K(\lambda_0, \gamma_1, \lambda_0, \gamma_2)}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2} \right|_{\gamma_1=\gamma_2=\gamma_0} [1 + O(\delta_n^{\alpha_4})],$$

при  $\delta_n = \max(|\lambda_1 - \lambda_0|, |\lambda_2 - \lambda_0|)/\tau_0 \rightarrow 0$ , где  $\alpha_3 \geq 1, \alpha_4 \geq 1$ .

Асимптотические представления (17), (18) удовлетворяют условиям применимости результатов п. III из [13] и позволяют воспользоваться ими для получения асимптотически точных (с ростом ОСШ  $z$ ) выражений для характеристик ОМП (6). В частности, из [13 (п. III)] следует, что при выполнении (4) характеристики ОМП (6) разрывного параметра  $\lambda_0$  при неизвестном регулярном параметре  $\gamma_0$  асимптотически (с ростом ОСШ  $z$ ) совпадают с соответствующими характеристиками ОМП разрывного параметра  $\lambda_0$  при априори известном регулярном параметре  $\gamma_0$ . Характеристики ОМП времени прихода  $\lambda_0$  флуктуирующего импульса (1) с априори известной интенсивностью  $\gamma_0$  можно получить как частный случай результатов [5], положив там  $z_0 = 0$ , либо аналогично [13], где приведены характеристики ОМП разрывного параметра в более общем случае. В частности, из [5, 13] получаем, что условная (при фиксированном  $\lambda_0$ ) плотность вероятности  $W_M(\lambda)$  оценки  $\lambda_M$  (6) равна

$$W_M(\lambda) = \frac{\psi z^2}{\tau_0} \left[ 3 \exp \left( 2\psi z^2 \frac{|\lambda - \lambda_0|}{\tau_0} \right) \left\{ 1 - \Phi \left( 3z \sqrt{\frac{\psi}{2}} \sqrt{\frac{|\lambda - \lambda_0|}{\tau_0}} \right) \right\} + \right. \\ \left. + \Phi \left( z \sqrt{\frac{\psi}{2}} \sqrt{\frac{|\lambda - \lambda_0|}{\tau_0}} \right) - 1 \right], \quad (19)$$

где ОСШ  $z$  определяется из (16),

$$\psi = \frac{2D_0(\gamma_0, \gamma_0) + 2D_1(\gamma_0, \gamma_0)}{2D_0(\gamma_0, \gamma_0) + D_1(\gamma_0, \gamma_0)} = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g^2(x) \{1 + [1 + q_0g(x)]^2\}}{2 [1 + q_0g(x)]^2} dx \right]^{-1}, \quad (20)$$

а  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt / \sqrt{2\pi}$  — интеграл вероятности. При этом условное смещение (средняя ошибка)  $b_M = \langle \lambda_M - \lambda_0 \rangle$  равно 0, а условное рассеяние (средний квадрат ошибки)  $V_M = \langle (\lambda_M - \lambda_0)^2 \rangle$  оценки (6) равно

$$V_M = 13\tau_0^2/2\psi^2 z^4, \quad (21)$$

где  $\psi$  и  $z$  определяются из (16), (20).

В случае прямоугольной спектральной плотности (10) в этих формулах следует положить  $g(x) = I(x)$ . Тогда из (16), (20) получаем

$$z = \sqrt{\mu_0}q/(1+q), \psi = 2(1+q_0)^2/[1+(1+q_0)^2] \quad (22)$$

и формулы (19), (21) с учетом (22) определяют характеристики ОМП (13).

Согласно [5, 13], выражения (19), (21) являются асимптотически точными, их точность возрастает с увеличением  $\mu_0$  (4) и ОСШ  $z$ . Аналитически оценить точность этих выражений при конечных значениях  $\mu_0, z$  не представляется возможным. Однако результаты статистического моделирования алгоритма оценки времени прихода импульса (1) на ЭВМ, выполненные аналогично [4], показывают, что формулы (19), (21) обладают хорошей точностью уже при  $\mu_0 \geq 30 \dots 40$  и  $z \geq 2 \dots 3$ .

Отметим, что при получении выражений (19), (21) в [5, 13] фактически полагается, что истинное значение  $\lambda_0$  времени прихода сигнала (1) является внутренней точкой априорного интервала  $[\Lambda_1; \Lambda_2]$ , а ОСШ  $z$  достаточно велико, так что окрестность значения  $\lambda = \lambda_0$ , в которой локализована оценка  $\lambda_M$ , не выходит на границу априорного интервала  $[\Lambda_1; \Lambda_2]$ . В противном случае формулы для характеристик оценки существенно усложняются.

## 2. АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ

Как отмечалось ранее, практическая реализация алгоритма ОМП (6) может потребовать больших вычислительных и аппаратурных затрат, связанных с необходимостью формирования и анализа логарифма ФОП  $L(\lambda, \gamma)$  (7), как функции двух переменных  $\lambda$  и  $\gamma$ . Структура алгоритма оценки времени прихода существенно упрощается в случае “слабого” сигнала (1), когда его интенсивность  $\gamma_0$  значительно меньше спектральной мощности  $N_0$  аддитивного шума, т.е. когда выполняется условие  $q_0 = \gamma_0/N_0 \ll 1$ . Рассмотрим это подробнее.

**Синтез алгоритма оценки.** Учтем, что ПФ  $H(\omega, q)$  (9) при  $q \rightarrow 0$  упрощается и переходит в ПФ  $\sqrt{q} H_A(\omega)$ , где функция  $H_A(\omega)$  удовлетворяет условию

$$|H_A(\omega)|^2 = g\left(\frac{\nu_0 - \omega}{\Omega_0}\right) + g\left(\frac{\nu_0 + \omega}{\Omega_0}\right). \quad (23)$$

Поэтому при  $q \ll 1$  в логарифме ФОП (7) можно заменить ПФ  $H(\omega, q)$  (9) на упрощенную ПФ  $\sqrt{q} H_A(\omega)$ . Тогда логарифм ФОП в случае “слабого” сигнала ( $q_0 \ll 1$ ) принимает вид

$$L(\lambda, \gamma) = q M_A(\lambda)/N_0 - \mu_0 q \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx, \quad (24)$$

$$M_A(\lambda) = \int_{\lambda-\tau_0/2}^{\lambda+\tau_0/2} y_A^2(t) dt, \quad (25)$$

где  $y_A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) h_A(t-u) du$  — отклик линейного фильтра с ИХ  $h_A(t)$  на реализацию наблюдаемых данных  $x(t)$ , причем ПФ  $H_A(\omega)$  этого фильтра удовлетворяет условию (23). Тогда ОМП  $\lambda_M$  (6) с учетом (24) переходит в оценку

$$\lambda_A = \arg \sup_{\lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2]} M_A(\lambda), \quad (26)$$

представляющую собой координату  $\lambda$  положения абсолютного максимума функционала  $M_A(\lambda)$  (25) на интервале  $\lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2]$ .

Отметим, что алгоритм оценки  $\lambda_A$  (26) получен из алгоритма ОМП (6) в результате предельного перехода  $q \rightarrow 0$ . Поэтому алгоритм (26) является *асимптотически оптимальным* (АО) при  $q_0 \rightarrow 0$ . Это значит, что характеристики АО оценки (26) и ОМП (6) асимптотически совпадают при  $q_0 \rightarrow 0$  и приближенно совпадают при малых отношениях  $q_0 \ll 1$ . Однако, если отношение  $q_0$  велико, то характеристики оценки (26) могут быть хуже, чем характеристики ОМП (6). Отметим также, что для спектральной плотности (10) алгоритм (26) совпадает с алгоритмом ОМП (13) при любых значениях  $q_0$ . Поэтому для прямоугольной спектральной плотности (10) алгоритм (26) является *оптимальным*.

Практическая реализация АО алгоритма (26) предполагает фильтрацию наблюдаемых данных  $x(t)$  (5) с помощью *одного* линейного фильтра, передаточная функция  $H_A(\omega)$  которого удовлетворяет условию (23) и не зависит от  $q$ . Далее выходной сигнал фильтра возводится в квадрат и интегрируется в пределах скользящего временного интервала  $[\lambda - \tau_0/2; \lambda + \tau_0/2]$  для всех  $\lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2]$ . При этом получаем значения функционала  $M_A(\lambda)$  (25), как функции переменной  $\lambda$ . Оценка  $\lambda_A$  (26) определяется как значение  $\lambda$ , при котором функция  $M_A(\lambda)$  достигает абсолютного (наибольшего) максимума на интервале  $[\Lambda_1; \Lambda_2]$ .

Отметим, что практическая реализация АО алгоритма (26) значительно проще, чем алгоритма ОМП (6). Действительно, для получения оценки  $\lambda_A$  (26) достаточно формировать функцию  $M_A(\lambda)$  (25) и искать положение её абсолютного максимума *только по одной переменной*  $\lambda$ . Это требует гораздо меньших вычислительных и аппаратных затрат, чем формирование логарифма ФОП  $L(\lambda, \gamma)$  и поиск положения его максимума по двум переменным  $\lambda, \gamma$ .

**Характеристики АО оценки.** Найдем характеристики АО оценки (26). Обозначим  $S_A(\lambda) = \langle M_A(\lambda) \rangle - \langle M_A(\lambda) \rangle^2$  — детерминированная, а  $N_A(\lambda) = M_A(\lambda) - \langle M_A(\lambda) \rangle$  — случайная составляющая функционала (25). Из [4] следует, что функционал  $M_A(\lambda)$  (25) является асимптотически (при  $\mu_0 \rightarrow \infty$ ) гауссовским случайным процессом. Статистические характеристики гауссовского случайного процесса полностью определяются его математическим ожиданием и корреляционной функцией [3]. Поэтому при выполнении (4) ограничимся рассмотрением детерминированной составляющей  $S_A(\lambda)$  и корреляционной функции  $K_A(\lambda_1, \lambda_2) = \langle N_A(\lambda_1)N_A(\lambda_2) \rangle$  случайной составляющей  $N_A(\lambda)$ .

Аналогично (14), (15) при выполнении (4) получаем

$$S_A(\lambda) = A_{10} C(\lambda - \lambda_0) + A_{00}, \quad (27)$$

$$A_{00} = \mu_0 N_0 \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx, \quad A_{10} = \mu_0 q_0 N_0,$$

$$K_A(\lambda_1, \lambda_2) = D_{10} R(\lambda_1 - \lambda_0, \lambda_2 - \lambda_0) + D_{00} C(\lambda_1 - \lambda_2), \quad (28)$$

$$D_{00} = \mu_0 N_0^2, \quad D_{10} = \mu_0 q_0 N_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} g^3(x) [2 + q_0 g(x)] dx,$$

где функции  $C(\lambda)$  и  $R(\lambda_1, \lambda_2)$  определяются из (14), (15). Из (27) следует, что детерминированная составляющая  $S_A(\lambda)$  (27) достигает абсолютного максимума в точке  $\lambda = \lambda_0$  истинного значения времени прихода импульса (1). При этом случайная составляющая  $N_A(\lambda)$  непрерывна с вероятностью 1, а дисперсия  $\sigma_A^2(\lambda) = K_A(\lambda, \lambda)$  этой составляющей, согласно (28), достигает максимума при  $\lambda = \lambda_0$ . Тогда выходное отношение сигнал/шум (ОСШ) для АО алгоритма оценки (26) равно [1, 12]

$$z = \frac{S_A(\lambda_0) - S_A(\lambda_0 + \tau_0)}{\sqrt{K_A(\lambda_0, \lambda_0)}} = \frac{A_{10}}{\sqrt{D_{10} + D_{00}}} = \sqrt{\mu_0 q_0} / \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} g^2(x) [1 + q_0 g(x)]^2 dx}. \quad (29)$$

Выражения (27), (28) для моментов функционала (25) позволяют воспользоваться результатами [5, 13] и (аналогично ОМП времени прихода сигнала с известной интенсивностью) записать асимптотически точные (с ростом ОСШ  $z$ ) выражения для характеристик АО оценки (26). В частности, из [5, 13] получаем, что условная (при фиксированном  $\lambda_0$ ) плотность вероятности  $W_A(\lambda)$  оценки  $\lambda_A$  (26) определяется из (19), где следует положить

$$\psi = \frac{2(D_{00} + D_{10})}{2D_{00} + D_{10}} = \frac{2 \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x) [1 + q_0 g(x)]^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} g^2(x) \{1 + [1 + q_0 g(x)]^2\} dx}, \quad (30)$$

а ОСШ  $z$  определяется из (29). При этом соответствующее (19) смещение оценки  $b_A = \langle \lambda_A - \lambda_0 \rangle$  равно 0, а рассеяние оценки  $V_A = \langle (\lambda_A - \lambda_0)^2 \rangle$  определяется из (21) с учетом обозначений  $z$  (29) и  $\psi$  (30).

В случае прямоугольной спектральной плотности (10) в этих формулах следует положить  $g(x) = I(x)$ . Тогда выражения (29), (30) переходят в выражения (22), а характеристики АО оценки (26) совпадают с соответствующими характеристиками ОМП (13) при прямоугольной спектральной плотности несущей.

Сравним теперь рассеяния АО оценки  $\lambda_A$  (26) и МП оценки  $\lambda_M$  (6). Напомним, что рассеяние характеризует среднеквадратическую ошибку измерения, т.е. чем меньше рассеяние оценки, тем точность измерения больше.

На рис. 1 сплошными линиями нанесены зависимости нормированного рассеяния  $\rho_M = V_M/\tau_0^2$  оценки  $\lambda_M$ , а штриховыми линиями — нормированного рассеяния  $\rho_A = V_A/\tau_0^2$

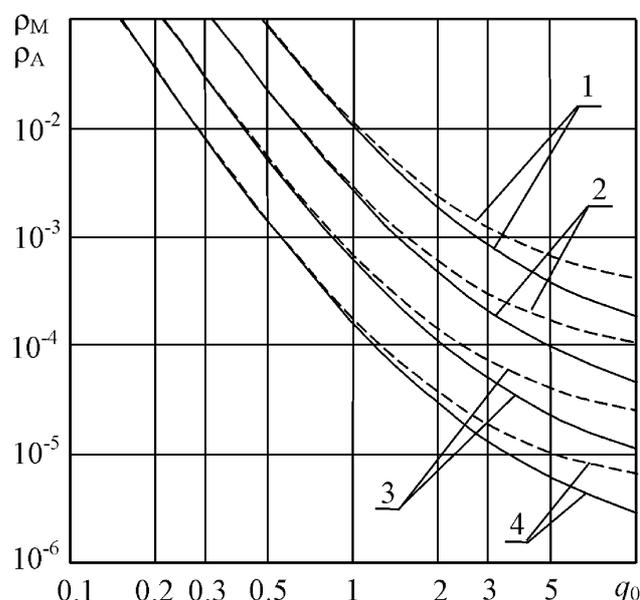


Рис. 1. Нормированные рассеяния МП оценки и АО оценки

оценки  $\lambda_A$ , от отношения  $q_0 = \gamma_0/N_0$  при лоренцевской форме спектральной плотности  $g(x) = 1/[1 + (\pi x/2)^2]$  и при различных значениях  $\mu_0$ . Кривые 1 на рис. 1 соответствуют  $\mu_0 = 50$ , кривые 2 —  $\mu_0 = 100$ , кривые 3 —  $\mu_0 = 200$ , а кривые 4 —  $\mu_0 = 400$ . При этом рассеяния  $V_M$  и  $V_A$  вычислялись по формуле (21), куда в качестве параметров  $z$  и  $\psi$  подставлялись значения (16), (20) для случая оценки  $\lambda_M$  или значения (29), (30) для случая оценки  $\lambda_A$ .

На рис. 2 показана зависимость отношения  $X_A = V_A/V_M$  рассеяний оценок  $\lambda_A$  и  $\lambda_M$  от отношения  $q_0 = \gamma_0/N_0$  при разных формах спектральной плотности  $g(x) = \frac{1}{1+(\alpha|x|)^n}$ . Здесь  $\alpha = \frac{2\pi(n-1)}{n^2 \sin(\pi/n)}$  — масштабирующий коэффициент, обеспечивающий выполнение второго условия нормировки (3) для функции  $g(x)$ . Отметим, что отношение  $X_A$  можно интерпретировать как проигрыш в точности АО оценки  $\lambda_A$  по сравнению с ОМП  $\lambda_M$ . Чем больше отношение  $X_A \geq 1$ , тем больше АО оценка  $\lambda_A$  (26) уступает в точности МП оценке  $\lambda_M$  (6). Кривая 1 на рис. 2 соответствует случаю  $n = 2$ , кривая 2 —  $n = 3$ , кривая 3 —  $n = 5$ , а кривая 4 —  $n = 10$ , причем проигрыш  $X_A$  здесь не зависит от параметра  $\mu_0$ . Отметим, что случай  $n = 2$  соответствует лоренцевской функции  $g(x) = 1/[1 + (\pi x/2)^2]$ , а с увеличением  $n$  форма функции  $g(x)$  приближается к прямоугольной. Это иллюстрируют графики функций  $g(x)$ , приведенные в левом верхнем углу рис. 2 и соответствующие графикам проигрыша  $X_A$ , показанным на рис. 2.

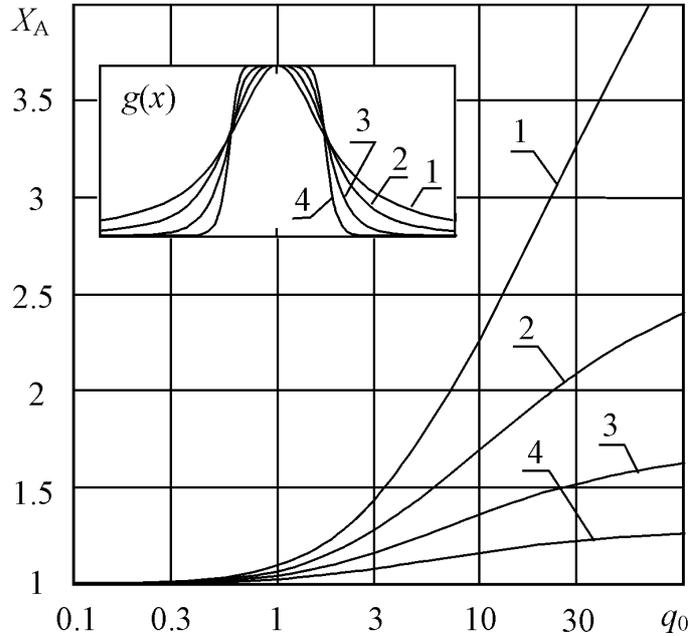


Рис. 2. Проигрыш в точности АО оценки при различной форме спектральной плотности стохастической несущей

Из рис. 1, 2 видно, что при небольших отношениях  $q_0 \leq 1 \dots 2$  проигрыш в точности АО оценки  $\lambda_A$  (26) является незначительным, так что отношение  $X_A$  близко к 1. При  $q_0 \rightarrow 0$  получаем  $X_A \rightarrow 1$ , т.е. рассеяние АО оценки  $\lambda_A$  асимптотически совпадает с рассеянием МП оценки  $\lambda_M$  при  $q_0 \rightarrow 0$ . С увеличением отношения  $q_0$  проигрыш  $X_A$  в точности АО оценки  $\lambda_A$  монотонно возрастает. Однако, даже при больших значениях  $q_0 = 10 \dots 20$  проигрыш  $X_A$  остается умеренным и не превышает  $2 \dots 3$ .

Из рис. 2 видно, что проигрыш  $X_A$  в точности АО оценки  $\lambda_A$  быстро уменьшается с ростом  $n$ , т.е. по мере приближения формы функции  $g(x)$  к прямоугольной. Для прямоугольной формы спектральной плотности  $g(x) = I(x)$  проигрыш вообще отсутствует (т.е.  $X_A = 1$ ) при любых значениях  $q_0$ , так как оценки  $\lambda_A$  (26) и  $\lambda_M$  (6) в этом случае совпадают.

Таким образом, при не слишком больших отношениях  $q_0 = \gamma_0/N_0$  целесообразно использовать более простой АО алгоритм оценки (26) вместо более сложного МП алгоритма (6). При этом интервал значений  $q_0$ , при которых проигрыш  $X_A$  в точности АО оценки (26) ещё достаточно мал, расширяется в сторону больших значений  $q_0$  по мере приближения формы  $g(x)$  спектральной плотности (2) к прямоугольной. Отметим также, что рассеяние АО оценки  $\lambda_A$  (26) уменьшается с ростом отношения  $q_0$  (см. рис.1), несмотря на увеличение проигрыша  $X_A$  в точности оценки (26) по сравнению с ОМП (6). Поэтому точность АО оценки  $\lambda_A$  (26) может оказаться приемлемой даже при больших отношениях  $q_0$ .

**Оптимизация АО алгоритма оценки при сильном сигнале.**

Анализ алгоритма (26) показывает, что причиной роста проигрыша в точности АО оценки  $\lambda_A$  с увеличением отношения  $q_0$  является отклонение формы ПФ  $H_A(\omega)$  (23) от оптимальной ПФ  $H(\omega, q)$  (9), которое возрастает с увеличением  $q$ . В частности, с увеличением  $q$  возрастает ширина оптимальной ПФ  $H(\omega, q)$  (9), тогда как ширина ПФ  $H_A(\omega)$  (23) остается постоянной. Поэтому для повышения точности АО оценки (26) при больших отношениях  $q_0$  целесообразно *увеличивать ширину* ПФ  $H_A(\omega)$ . Это эквивалентно *расширению полосы частот*, на которой производится обработка сигнала при вычислении оценки (26). Тогда ПФ  $H_A(\omega)$  при реализации алгоритма оценки (26) следует выбирать как

$$|H_A(\omega)|^2 = g\left(\frac{\nu_0 - \omega}{\Omega_A}\right) + g\left(\frac{\nu_0 + \omega}{\Omega_A}\right), \quad (31)$$

где  $\Omega_A > \Omega_0$ - эквивалентная ширина квадрата модуля ПФ  $H_A(\omega)$ , характеризующая ширину полосы частот, на которой производится обработка сигнала.

Процедуру увеличения ширины ПФ  $H_A(\omega)$  при реализации алгоритма оценки (26) для больших отношений  $q_0$  будем называть *оптимизацией* алгоритма оценки. Алгоритм оценки (26), использующий ПФ (31) при  $\Omega_A \geq \Omega_0$ , назовем *оптимизированным алгоритмом*. Обоснованный выбор эквивалентной ширины  $\Omega_A$  для оптимизированного алгоритма (26) может быть сделан на основе анализа характеристик оценки (26) при различных значениях  $\Omega_A$ .

*Запишем характеристики* оптимизированной оценки (26) при использовании ПФ (31). Аналогично (14), (15) при выполнении (4) получаем, что в данном случае детерминированная составляющая  $S_A(\lambda)$  определяется из (27), а корреляционная функция случайной составляющей  $N_A(\lambda)$  определяется из (28), где

$$A_{00} = \mu_0 N_0 \kappa \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx, A_{10} = \mu_0 q_0 N_0 \int_{-\infty}^{\infty} g(x) g(x/\kappa) dx, \quad (32)$$

$$D_{00} = \mu_0 N_0^2 \kappa, D_{10} = \mu_0 q_0 N_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x/\kappa) g(x) [2 + q_0 g(x)] dx,$$

а  $\kappa = \Omega_A/\Omega_0$  имеет смысл коэффициента расширения полосы ПФ  $H_A(\omega)$ . Согласно (32), выходное ОСШ для оптимизированного алгоритма (26) равно

$$z = \frac{A_{10}}{\sqrt{D_{10} + D_{00}}} = \frac{\sqrt{\mu_0 q_0} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) g(x/\kappa) dx}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} g^2(x/\kappa) [1 + q_0 g(x)]^2 dx}}, \quad (33)$$

а параметр  $\psi$  определяется как

$$\psi = \frac{2(D_{00} + D_{10})}{2D_{00} + D_{10}} = \frac{2 \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x/\kappa) [1 + q_0 g(x)]^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} g^2(x/\kappa) \{1 + [1 + q_0 g(x)]^2\} dx}. \quad (34)$$

Тогда условная (при фиксированном  $\lambda_0$ ) плотность вероятности  $W_A(\lambda)$  оптимизированной оценки  $\lambda_A$  (26) определяется из (19) с учетом обозначений  $z$  (33) и  $\psi$  (34). При этом соответствующее смещение оценки  $b_A = \langle \lambda_A - \lambda_0 \rangle$  равно 0, а рассеяние оценки  $V_A = \langle (\lambda_A - \lambda_0)^2 \rangle$  определяется из (21) с учетом (33), (34).

Полученные выражения позволяют оценить точность оптимизированной оценки  $\lambda_A$  (26) при использовании ПФ (31). Сплошными линиями на рис.3 показаны зависимости проигрыша  $X_A = V_A/V_M$  в точности оптимизированной оценки  $\lambda_A$  от отношения  $q_0$  при различных значениях  $\kappa$  и при  $g(x) = [1 + (\pi x/2)^2]^{-1}$ . При этом рассеяния  $V_M$  и  $V_A$  вычислялись по формуле (21), куда в качестве параметров  $z$  и  $\psi$  подставлялись значения (16), (20) для оценки  $\lambda_M$  и значения (33), (34) для оценки  $\lambda_A$ . Кривая 1 на рис. 3 получена при  $\kappa = 1$ , кривая 2 – при  $\kappa = 1.4$ , кривая 3 – при  $\kappa = 1.9$ , а кривая 4 – при  $\kappa = 2.6$ . Из рис. 3 видно, что увеличение отношения  $\kappa$  (т.е. эквивалентной ширины  $\Omega_A$  квадрата модуля ПФ) приводит к уменьшению проигрыша  $X_A$  в точности оптимизированной оценки  $\lambda_A$  при больших отношениях  $q_0 = \gamma_0/N_0$ . При этом проигрыш  $X_A$  при малых отношениях  $q_0$  несколько возрастает. Интервал значений  $q_0$ , при которых наблюдается уменьшение проигрыша  $X_A$  в точности оптимизированной оценки  $\lambda_A$ , сдвигается в область больших значений  $q_0$  с ростом отношения  $\kappa$ . Подбирая величину  $\kappa$  (ширину  $\Omega_A$  квадрата модуля ПФ), можно добиться улучшения точности оптимизированной оценки  $\lambda_A$  (26) в нужном диапазоне значений  $q_0$ .

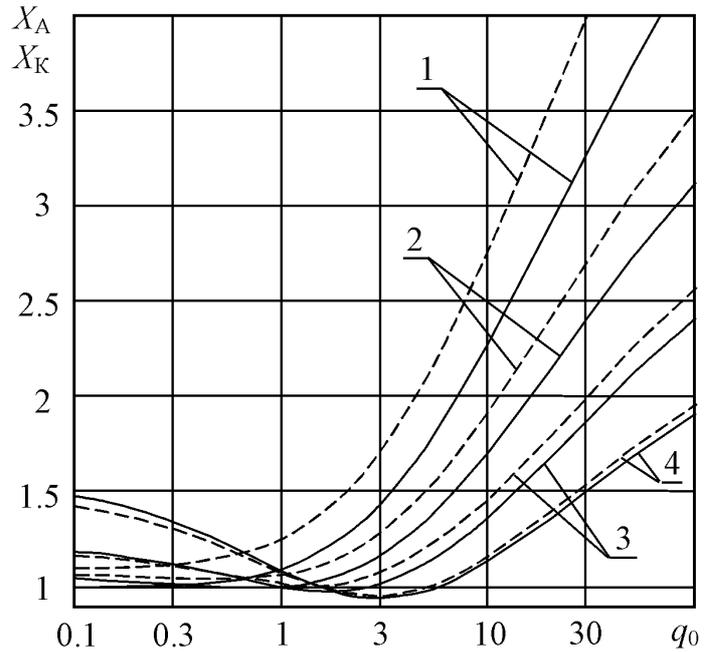


Рис. 3. Проигрыши в точности АО и КО оценок при различной ширине передаточной функции

### 3. КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ

При практической реализации АО алгоритма (26) требуется априорная информация о форме  $g(x)$  спектральной плотности (2), которая необходима для расчета асимптотически оптимальной ПФ  $H_A(\omega)$  (23). Однако, на практике форма спектральной плотности (2) может быть известна неточно. Кроме того, реализация фильтра с ПФ  $H_A(\omega)$  (23) при заданной функции  $g(x)$  может оказаться излишне сложной. Это затрудняет практическую реализацию АО алгоритма оценки (26). Такие же трудности могут возникать при реализации алгоритма ОМП (6), предполагающего применение фильтров с ПФ  $H(\omega, q)$  (9).

Однако, анализ алгоритма оценки (26) показывает, что его характеристики не очень критичны к выбору формы ПФ  $H_A(\omega)$ . На это указывает отсутствие значительного проигрыша в точности АО оценки (26) по сравнению с ОМП (6) при не слишком больших отношениях  $q_0$ . Поэтому в алгоритме оценки (26) вместо ПФ  $H_A(\omega)$  (23) можно использовать какую-либо простую неоптимальную ПФ  $H_K(\omega)$ , форма которой не сильно отличается от  $H_A(\omega)$ . При этом эквивалентную ширину  $\Omega_K$  неоптимальной ПФ  $H_K(\omega)$  следует выбирать так, чтобы минимизировать проигрыш в точности оценки, возникающий из-за отклонения формы ПФ  $H_K(\omega)$  от оптимальной.

В этом случае АО оценка  $\lambda_A$  (26) переходит в оценку

$$\lambda_K = \arg \sup_{\lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2]} M_K(\lambda), \quad (35)$$

которая является координатой  $\lambda$  положения абсолютного максимума функционала  $M_K(\lambda)$  на интервале  $\lambda \in [\Lambda_1; \Lambda_2]$ , где

$$M_K(\lambda) = \int_{\lambda - \tau_0/2}^{\lambda + \tau_0/2} y_K^2(t) dt, \quad (36)$$

$y_K(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) h_K(t - u) du$  — отклик фильтра с ИХ  $h_K(t)$  на реализацию наблюдаемых данных  $x(t)$ , причем ПФ  $H_K(\omega)$  этого фильтра удовлетворяет условию

$$|H_K(\omega)|^2 = g_K \left( \frac{\nu_0 - \omega}{\Omega_K} \right) + g_K \left( \frac{\nu_0 + \omega}{\Omega_K} \right). \quad (37)$$

Здесь  $\Omega_K$  — эквивалентная ширина квадрата модуля ПФ (37), характеризующая ширину полосы частот, на которой производится обработка сигнала, а функция  $g_K(x)$  задает форму квадрата модуля ПФ  $H_K(\omega)$  и нормирована так, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_K^2(x) dx = 1, \quad \max g_K(x) = 1.$$

Следуя [3] оценку  $\lambda_K$  (35) будем называть *квазиоптимальной* (КО) оценкой.

Запишем характеристики КО оценки  $\lambda_K$  (35). Обозначим  $S_K(\lambda) = \langle M_K(\lambda) \rangle$  — детерминированная, а  $N_K(\lambda) = M_K(\lambda) - \langle M_K(\lambda) \rangle$  — случайная составляющая функционала (36). Из [4] следует, что функционал  $M_K(\lambda)$  (36) является асимптотически (при  $\mu_0 \rightarrow \infty$ ) гауссовским случайным процессом. Поэтому при выполнении (4) можно ограничиться анализом детерминированной составляющей  $S_K(\lambda)$  и корреляционной функции  $K_K(\lambda_1, \lambda_2) = \langle N_K(\lambda_1) N_K(\lambda_2) \rangle$  случайной составляющей  $N_K(\lambda)$ . При выполнении (4) получаем, что детерминированная составляющая  $S_K(\lambda)$  определяется из (27), а корреляционная функция случайной составляющей  $N_K(\lambda)$  определяется из (28), где следует положить

$$A_{00} = \mu_0 N_0 \kappa \int_{-\infty}^{\infty} g_K(x) dx, \quad A_{10} = \mu_0 q_0 N_0 \int_{-\infty}^{\infty} g(x) g_K(x/\kappa) dx, \quad (38)$$

$$D_{00} = \mu_0 N_0^2 \kappa, \quad D_{10} = \mu_0 q_0 N_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} g_K^2(x/\kappa) g(x) [2 + q_0 g(x)] dx,$$

а  $\kappa = \Omega_K/\Omega_0$  имеет смысл коэффициента расширения полосы неоптимальной ПФ  $H_K(\omega)$  по сравнению с асимптотически оптимальной ПФ  $H_A(\omega)$  (23). Согласно (38), выходное ОСШ для КО алгоритма оценки (35) равно

$$z = \frac{A_{10}}{\sqrt{D_{10} + D_{00}}} = \frac{\sqrt{\mu_0} q_0 \int_{-\infty}^{\infty} g(x) g_K(x/\kappa) dx}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} g_K^2(x/\kappa) [1 + q_0 g(x)]^2 dx}}, \quad (39)$$

а параметр  $\psi$  определяется как

$$\psi = \frac{2(D_{00} + D_{10})}{2D_{00} + D_{10}} = \frac{2 \int_{-\infty}^{\infty} g_K^2(x/\kappa) [1 + q_0 g(x)]^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} g_K^2(x/\kappa) \{1 + [1 + q_0 g(x)]^2\} dx}. \quad (40)$$

Тогда условная (при фиксированном  $\lambda_0$ ) плотность вероятности  $W_K(\lambda)$  квазиоптимальной оценки  $\lambda_A$  (35) определяется из (19) с учетом обозначений  $z$  (39),  $\psi$  (40). При этом соответствующее смещение оценки  $b_K = \langle \lambda_K - \lambda_0 \rangle$  равно 0, а рассеяние оценки  $V_K = \langle (\lambda_K - \lambda_0)^2 \rangle$  определяется из (21) с учетом (39), (40).

Полученные выражения позволяют оценить точность КО оценки  $\lambda_K$  (35) при различных значениях  $\kappa = \Omega_K/\Omega_0$  и  $q_0$ . В качестве примера штриховыми линиями на рис.3 показаны зависимости проигрыша  $X_K = V_K/V_M$  в точности КО оценки (35) по сравнению с ОМП (6) от отношения  $q_0$  при различных значениях  $\kappa$ . Рассеяния  $V_M$  и  $V_K$  вычислялись по формуле (21), куда в качестве параметров  $z$  и  $\psi$  подставлялись значения (16), (20) для оценки  $\lambda_M$  и значения (39), (40) для оценки  $\lambda_K$ . При этом предполагалось, что спектральная плотность (2) имеет лоренцевскую форму  $g(x) = 1/[1+(\pi x/2)^2]$ , а квадрат модуля передаточной функции  $H_K(\omega)$  (37) имеет гауссовскую форму  $g_K(x) = \exp(-\pi x^2/2)$ , что соответствует использованию колебательного контура в качестве фильтра с ПФ  $H_K(\omega)$ . Кривые 1 на рис.3 соответствуют  $\kappa = 1$ , кривые 2 –  $\kappa = 1.4$ , кривые 3 –  $\kappa = 1.9$ , а кривые 4 –  $\kappa = 2.6$ . При этом сплошными линиями на рис.3 показаны соответствующие зависимости проигрыша  $X_A = V_A/V_M$  в точности АО оценки (26) по сравнению с ОМП (6).

Из рис.3 видно, что КО оценка (35) не сильно уступает в точности АО оценке (26), несмотря на отличие гауссовской функции  $g_K(x)$  от лоренцевской функции  $g(x)$ . При этом из общих соображений ясно, что проигрыш  $X = V_K/V_A$  в точности КО оценки (35) по сравнению с АО оценкой (26) будет уменьшаться по мере приближения формы ПФ  $H_K(\omega)$  к форме ПФ  $H_A(\omega)$ .

Из рис.3 также видно, что увеличение отношения  $\kappa$  (эквивалентной ширины квадрата модуля ПФ  $\Omega_K$ ) приводит к уменьшению проигрыша  $X_K$  в точности оценки  $\lambda_K$  (35) по сравнению с ОМП (6) при больших отношениях  $q_0 = \gamma_0/N_0$ . При этом проигрыш  $X_K$  при малых отношениях  $q_0$  несколько возрастает. Интервал значений  $q_0$ , при которых наблюдается уменьшение проигрыша  $X_K$ , смещается в область больших значений  $q_0$  с ростом отношения  $\kappa$ . Подбирая величину  $\kappa$  (эквивалентную ширину квадрата модуля ПФ  $\Omega_K$ ), можно добиться улучшения точности квазиоптимальной оценки (35) в нужном диапазоне значений  $q_0$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, наилучшими характеристиками среди рассмотренных алгоритмов оценки обладает алгоритм ОМП (6). Однако этот алгоритм является наиболее сложным, его практическая реализация для работы в реальном времени может вызывать затруднения.

Простой АО алгоритм оценки (26) может быть рекомендован вместо алгоритма ОМП (6), когда отношение интенсивности сигнала (1) к спектральной мощности шума не слишком велико. Для повышения точности АО оценки (26) при больших интенсивностях принимаемого сигнала можно увеличить ширину ПФ (23), оптимизируя ее по минимуму рассеяния оценки в заданном интервале значений интенсивности.

Простой КО алгоритм оценки (35) целесообразно использовать при неточно известной форме спектральной плотности (2), либо при сложности практической реализации ПФ (23). Подбирая ширину квазиоптимальной ПФ (37), можно добиться уменьшения проигрыша в точности КО оценки (35), возникающего из-за отклонения формы ПФ (37) от оптимальной.

Полученные в работе результаты позволяют сделать обоснованный выбор того или иного алгоритма оценки в зависимости от требований, предъявляемых к точности оценки, а также к степени простоты аппаратной или программной реализации алгоритма оценки.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов / В.И. Тихонов. – М.: Радио и связь, 1983. – 320 с.

- [2] Радиотехнические системы / Под ред. Ю.М. Казаринова. – М.: Академия, 2008. – 592 с.
- [3] Тихонов В.И. Статистическая радиотехника / В.И. Тихонов. – М.: Радио и связь, 1983. – 624 с.
- [4] Трифонов А.П. Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами / А.П. Трифонов, Е.П. Нечаев, В.И. Парфенов – Воронеж: Изд-во ВГУ, 1991. – 246 с.
- [5] Трифонов А.П. Прием сигнала с неизвестной задержкой при наличии модулирующей помехи / А.П. Трифонов, А.В. Захаров // Известия вузов. Радиоэлектроника, 1986. – Т. 29, № 4. – С. 36–41.
- [6] Кловский Д.Д. Передача дискретных сообщений по радиоканалам / Д.Д. Кловский. – М.: Радио и связь, 1982. – 304 с.
- [7] Кириллов Н.Е. Помехоустойчивая передача сообщений по линейным каналам со случайно изменяющимися параметрами / Н.Е. Кириллов. – М.: Связь, 1971. – 256 с.
- [8] Кремер И.Я. Модулирующие помехи и прием радиосигналов / И.Я. Кремер, В.И. Владимиров, В.И. Карпунин. – М.: Сов. радио, 1972. – 480 с.
- [9] Вопросы статистической теории радиолокации. Том. 1 / Под ред. Г.П. Тартаковского. – М.: Сов. радио, 1963. – 426 с.
- [10] Ван-Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. Том. 3 / Г. Ван-Трис / Пер с англ. под ред. В.Т. Горяинова. – М.: Сов. радио, 1977. – 644 с.
- [11] Захаров А.В. Обнаружение флуктуирующего импульса с неизвестными временем прихода и интенсивностью / А.В. Захаров // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2006. – № 2. – С. 62–71.
- [12] Куликов Е.И. Оценка параметров сигналов на фоне помех / Е.И. Куликов, А.П. Трифонов. – М.: Сов. радио, 1978. – 296 с.
- [13] Трифонов А.П. Асимптотические характеристики совместных оценок параметров сигналов / А.П. Трифонов, А.В. Захаров, А.М. Воробьев // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2003. – №2. – С. 77–92.
- [14] Трифонов А.П. Характеристики совместных оценок параметров сигнала при частичном нарушении условий регулярности / А.П. Трифонов, В.К. Бутейко // Радиотехника и электроника. – 1991. – Т. 36, № 2. – С. 319–327.

*Захаров А.В., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры радиофизики Воронежского государственного университета*

*E-mail: zakharov@phys.vsu.ru*

*Тел.: 8(473)2-208-916*

*Zakharov Alexander V., Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associated Professor of the Radiophysics Chair, Voronezh State University*

*E-mail: zakharov@phys.vsu.ru*

*Tel.: 8(473)2-208-916*