

## ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОЛН-УБИЙЦ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ

Р. В. Шамин\*, А. И. Смирнова\*\*, А. В. Юдин\*\*

\*Институт морской геологии и геофизики ДВО РАН

\*\*Российский университет дружбы народов

Поступила в редакцию 16.10.2012 г.

**Аннотация.** В статье рассматривается численное моделирование поверхностных волн аномально большой амплитуды — волн-убийц. Для моделирования используются уравнения в конформных переменных, описывающие потенциальное течение идеальной жидкости со свободной поверхностью. Описаны методы, позволяющие проводить эффективные вычислительные эксперименты с целью исследования характеристик волн-убийц. Рассмотрен пример вычислительного эксперимента, где возникает волна-убийца. Для этого эксперимента проведен детальный анализ геометрических и динамических характеристик типичной волны-убийцы. Предлагаемый подход позволяет проводить изучение волн-убийц в океане.

**Ключевые слова:** волны на воде, волны-убийцы, гидродинамика идеальной жидкости, вычислительные эксперименты.

**Annotation.** The article deals with the numerical modeling of surface waves anomalously large amplitude — rogue waves. For simulation we use equations in conformal variables describing the potential flow of ideal liquid with free surface. We describe methods that allow studying characteristics of rogue waves in those computational experiments effectively. We consider an example of computer simulation, where rogue wave appears. For this experiment we made a detailed analysis of geometric and dynamic characteristics of a typical rogue waves. The proposed approach allows the study of the rogue waves in the ocean.

**Keywords:** computational experiments, hydrodynamics of ideal liquid, water waves, rogue waves.

**1. Введение.** Волны-убийцы представляют собой внезапно возникающие аномально большие (до 30 м) поверхностные волны в океане. Такие волны несут собой серьезную опасность для судоходства и морских сооружений (см. [1]—[3]). Теория волн-убийц еще далека от завершения. Основным средством исследования поверхностных волн экстремальной амплитуды является вычислительный эксперимент, поскольку натурное и лабораторное исследование таких волн затруднительно. В настоящей работе мы представим эффективные методы для численного исследования волн-убийц.\*

Мы будем рассматривать уравнения гидродинамики идеальной жидкости со свободной поверхностью в конформных переменных. Идея использования конформных переменных для описания течения идеальной жидкости является классической, однако лишь в последнее время стали широко использоваться уравнения в конформных переменных для описания нестационарного течения идеальной жидкости

[4]—[8]. Для численного исследования волн-убийц необходимо уметь решать нелинейные уравнения гидродинамики с большой точностью на значительных временных интервалах. Именно динамические уравнения в конформных переменных позволяют проводить такие вычислительные эксперименты [9]—[11].

Мы рассматриваем применение уравнений в конформных переменных с целью численного моделирования динамики волн-убийц. В работе [10] мы применяли подобные уравнения с целью изучения статистики возникновения волн-убийц. В настоящей работе мы будем изучать характеристики отдельных волн-убийц. В разделе 2 мы приводим эти уравнения, а в разделе 3 мы описываем численную схему. В разделе 4 рассмотрен характерный пример волны-убийцы и вычисляем геометрические характеристики этой волны. В частности показано, что волна-убийца представляет собой очень крутую волну с большой кривизной профиля. В разделе 5 рассматриваются динамические характеристики волн-убийц. С помощью

© Шамин Р. В., Смирнова А. И., Юдин А. В., 2012

вычисления импульса и энергии волн, мы устанавливаем, что волна-убийца может концентрировать в себе до 36% энергии рассматриваемой системы.

**2. Динамические уравнения в конформных переменных.** Пусть идеальная несжимаемая жидкость занимает область в плоскости  $(x, y)$ , ограниченную свободной поверхностью

$$\begin{aligned} -\infty < y < \eta(x, t), \\ -\infty < x < \infty, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Считая движение жидкости потенциальным, мы имеем

$$v(x, y, t) = \nabla \Phi(x, y, t),$$

где  $v(x, y, t)$  — двумерное поле скоростей,  $\Phi(x, y, t)$  — потенциал скоростей. Всюду в данной работе мы считаем, что операторы градиента, дивергенции и Лапласа применяются лишь по пространственным переменным  $x$  и  $y$ . Из условия несжимаемости жидкости  $\operatorname{div} v = 0$  следует, что потенциал скоростей удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \Phi(x, y, t) = 0. \quad (1)$$

С уравнением (1) связываются следующие граничные и начальные условия:

$$(\eta_t + \Phi_x \eta_x - \Phi_y) \big|_{y=\eta(x,t)} = 0, \quad (2)$$

$$(\Phi_t + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + gy) \big|_{y=\eta(x,t)} = 0, \quad (3)$$

$$\Phi_y \big|_{y=-\infty} = 0, \quad (4)$$

$$\eta \big|_{t=0} = \eta_0(x), \quad (5)$$

$$\Phi \big|_{t=0} = \Phi_0(x, y). \quad (6)$$

Здесь  $g$  — ускорение поля тяжести.

Введем комплексную плоскость  $z = x + iy$ . Область, занимаемую жидкостью, мы можем конформно отобразить на нижнюю полуплоскость с переменными  $w = u + iv$ . Обратное конформное отображение выражается аналитической функцией  $z = z(t, w)$ . Эта функция является также функцией времени, поскольку мы рассматриваем нестационарную задачу. Зная функцию  $z(t, u)$ , мы можем восстановить профиль свободной поверхности. Для описания потенциального течения идеальной жидкости необходимо также знать потенциал скоростей. Поскольку потенциал является гармонической функцией, то все его значения могут быть описаны значением этого потенциала лишь на

границе области. Пусть  $\psi(t, x)$  — значение потенциала скоростей на свободной поверхности. Соответственно, через  $\Psi(t, z)$  мы обозначим аналитическую в нижней полуплоскости функцию такую, что  $\operatorname{Re} \Psi(t, x) = \psi(t, x)$ . Будем рассматривать функцию  $\Pi(t, w) = \Psi(t, z(t, w))$ , которая также будет аналитичной в нижней полуплоскости. Следуя работе [12] мы введем новые переменные

$$R(t, w) = \frac{1}{z'(t, w)}, \quad V(t, w) = i \frac{\Pi'(t, w)}{z'(t, w)}.$$

Здесь и далее штрихом мы обозначаем производную по переменной  $t$ . Эти функции являются аналитичными в нижней полуплоскости и удовлетворяют краевым условиям

$$R(t, w) \rightarrow 1, \operatorname{Im} w \rightarrow -\infty, V(t, w) \rightarrow 0, \operatorname{Im} w \rightarrow -\infty.$$

Функции  $R$  и  $V$  удовлетворяют следующей системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{R}(t, u) &= i(U(t, u)R'(t, u) - U'(t, u)R(t, u)), \\ \dot{V}(t, u) &= i(U(t, u)V'(t, u) - \\ &- B'(t, u)R(t, u)) + g(R(t, u) - 1), \\ &0 < t < T, \quad 0 < u < 2\pi, \end{aligned} \quad (7)$$

$$R(t, 0) = R(t, 2\pi), V(t, 0) = V(t, 2\pi), 0 < t < T,$$

$$R(0, u) = R_0(u), V(0, u) = V_0(u), 0 < u < 2\pi.$$

Здесь функции  $U$  и  $B$  вычисляются по формулам

$$U = P(\bar{V}\bar{R} + \bar{V}\bar{R}), B = P(\bar{V}\bar{V}), P = \frac{1}{2}(I + iH),$$

где  $H$  есть интегральный оператор Гильберта для периодических функций, который определяется формулой

$$H[f](u) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{v.p.} \int_0^{2\pi} f(u') \left( \frac{u' - u}{2} \right) du'.$$

Математическая корректность рассмотренных выше уравнений была установлена в цикле работ [13]—[16]. В этих работах были установлены существование и единственность решений уравнений (7), предложены методы оценки времени существования решений и доказана сходимость численных методов.

**3. Численная схема.** Рассмотрим численную схему для нахождения приближенных решений задачи (7).

Пусть  $N \geq 1$  — фиксированное число размерности приближенной задачи. Приближенные решения будем искать в виде

$$\begin{aligned} R^N(u, t) &= 1 + \sum_{k=1}^N r_k(t) e^{-iku}, \\ V^N(u, t) &= \sum_{k=1}^N v_k(t) e^{-iku}. \end{aligned} \quad (8)$$

Использование представления в виде конечных сумм Фурье (8) имеет существенные преимущества. Действительно, пусть  $f = \sum_{k=1}^N f_k e^{-iku}$ , тогда  $f_u = \sum_{k=1}^N (-ik) f_k e^{-iku}$ . Оператор  $P$  вычисляется следующим образом: для  $g = \sum_{k=-N}^N g_k e^{-iku}$  имеем  $P[g] = g_0 / 2 + \sum_{k=1}^N g_k e^{-iku}$ . Введем бинарную операцию « $*$ », которая является замкнутой для множества функций вида (8). Пусть  $A = \sum_{k=-N}^N a_k e^{-iku}$ ,  $B = \sum_{k=-N}^N b_k e^{-iku}$ . Тогда для  $C = AB$  имеем  $C = \sum_{k=-2N}^{2N} c_k e^{-iku}$ . Операцию « $*$ » введем следующим образом  $A * B = \sum_{k=-N}^N c_k e^{-iku}$ , где  $c_k$  — коэффициенты Фурье функции  $C$ .

Приближенные решения  $R^N$  и  $V^N$  будем искать как решения системы уравнений

$$\begin{cases} R_t^N = i(U^N * R_u^N - U_u^N * R^N), \\ V_t^N = i(U^N * V_u^N - B_u^N * R^N) + g(R^N - 1), \end{cases}$$

где  $U^N = P(V^N * \bar{R}^N + \bar{V}^N * R^N)$ ,  $B = P(V^N * \bar{V}^N)$ .

Система (9) решается явным методом Рунге—Кутта 4-го порядка точности по переменной  $t$ . Таким образом наша вычислительная схема представляет собой метод прямых для эволюционных уравнений.

Покажем, как зная значения функций  $R$  и  $V$  восстановить свободную поверхность и значение потенциала на свободной поверхности. Для функции  $\frac{1}{R}$  имеет место представление

$$\frac{1}{R} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) e^{-iku}.$$

Значения коэффициентов  $c_k$  несложно получить рекуррентно из соотношения

$$\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) e^{-iku}\right) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k(t) e^{-iku}\right) = 1$$

Умножением рядов можно получить разложение

$$-i \frac{V(t, u)}{R} = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(t) e^{-iku}.$$

Теперь восстановим функцию  $z(t, u)$  следующим образом

$$z(t, u) = u + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{-ik} c_k(t) e^{-iku},$$

а функцию  $\Pi(t, u)$  — по формуле

$$\Pi(t, u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{-ik} d_k(t) e^{-iku}.$$

Свободную поверхность мы получим как геометрическое место точек по следующему правилу

$$\Gamma(t) = \{(\operatorname{Re} z(t, u), \operatorname{Im} z(t, u)) : u \in [0, 2\pi]\}.$$

Значение потенциала на свободной поверхности находится по формуле

$$\psi(t, u) = \operatorname{Re} \Pi(t, u).$$

**4. Геометрические характеристики волн-убийц.** В наших вычислительных экспериментах мы наблюдаем полную запись волны-убийцы, что позволяет вычислить некоторые геометрические характеристики профиля этой волны. Рассмотрим типичный вычислительный эксперимент. На рисунке 1 мы приводим профиль волны в начальный момент времени.

В момент времени  $t = 60.6$  в нашем примере возникла типичная волна-убийца, профиль которой мы приводим на рисунке 2.

Из рисунка видно, что данная волна является нелинейной волной. Действительно, максимальная крутизна в момент образования волны-убийцы

$$\mu_{\max} = \max_{x \in [0, 2\pi]} |y'(x)| = 1.06.$$

Другой важной геометрической характеристикой волны-убийцы является кривизна профиля волны-убийцы. Кривизна профиля начальной волны приведена на рисунке 3.

Теперь на рисунке 4 приведем график кривизны профиля волны-убийцы, представленного на рисунке 2.

**5. Динамические характеристики волн-убийц.** Продолжим изучение нашего примера волны-убийцы, представленной на рисунке 2. В настоящем разделе мы рассмотрим распределение импульса между отдельными волнами в цуге волн, где одна из волн есть волна-убийца. Под отдельной волной мы будем понимать жидкость расположенную между двумя локальными максимумами на профиле

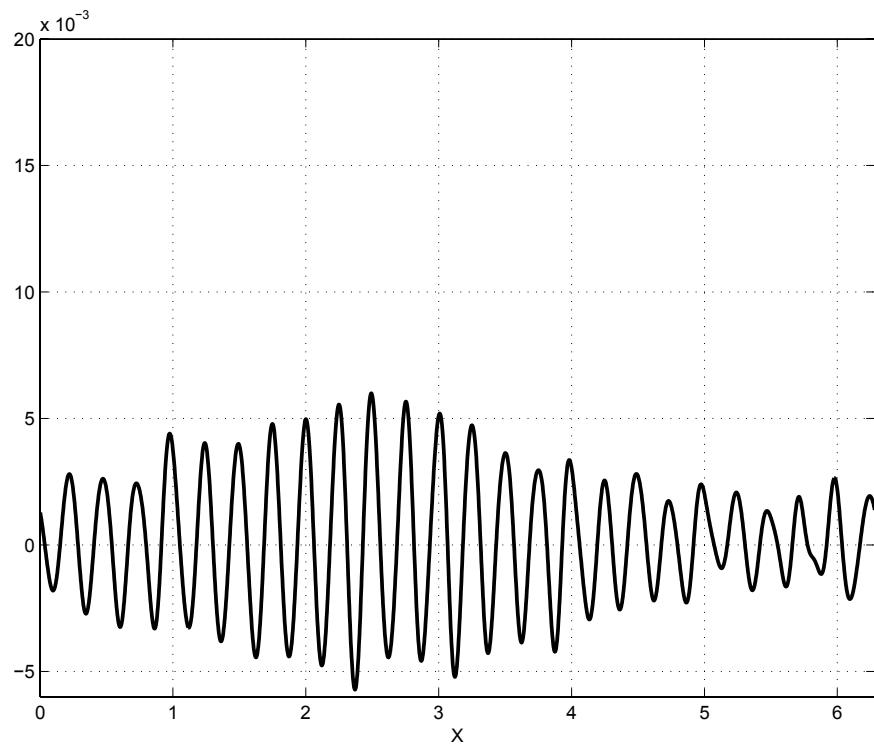


Рис. 1. Начальный профиль волны,  $t = 0$

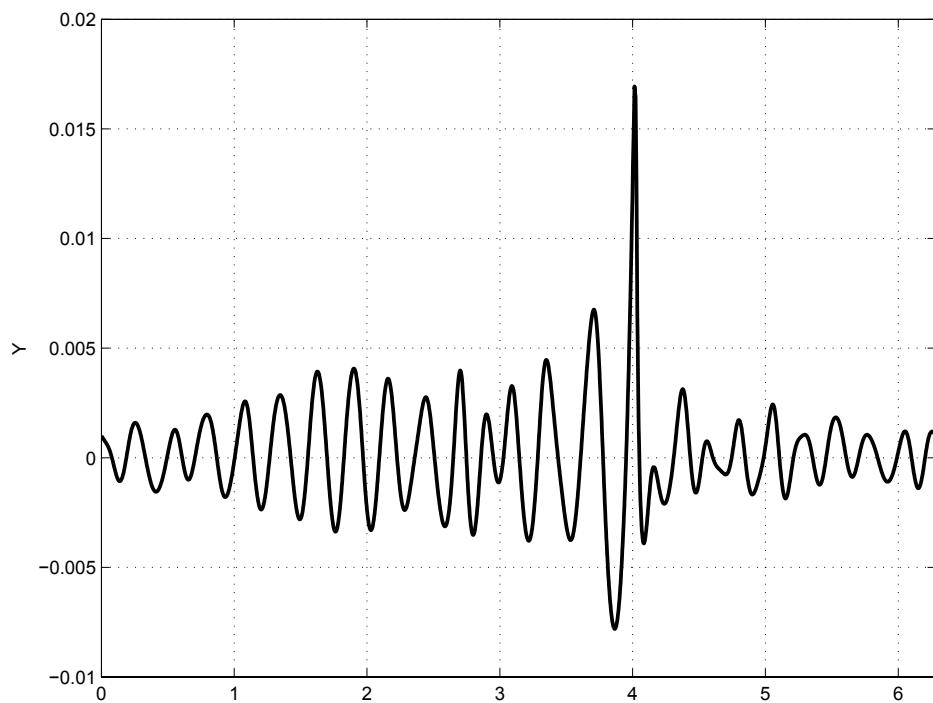


Рис. 2. Профиль волны-убийцы,  $t = 60.6$

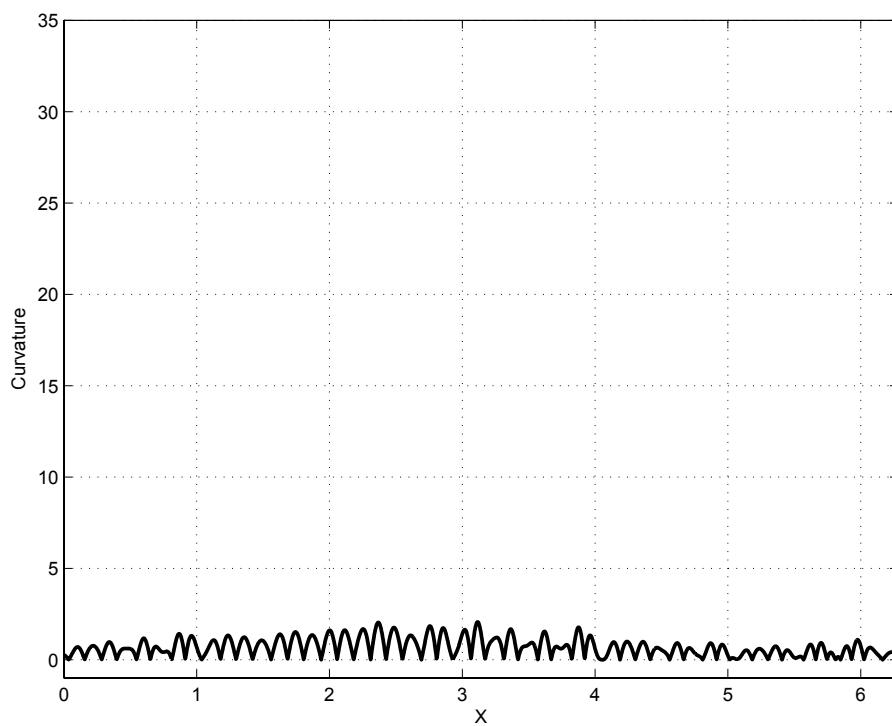


Рис. 3. Кривизна начального профиля волны,  $t = 0$

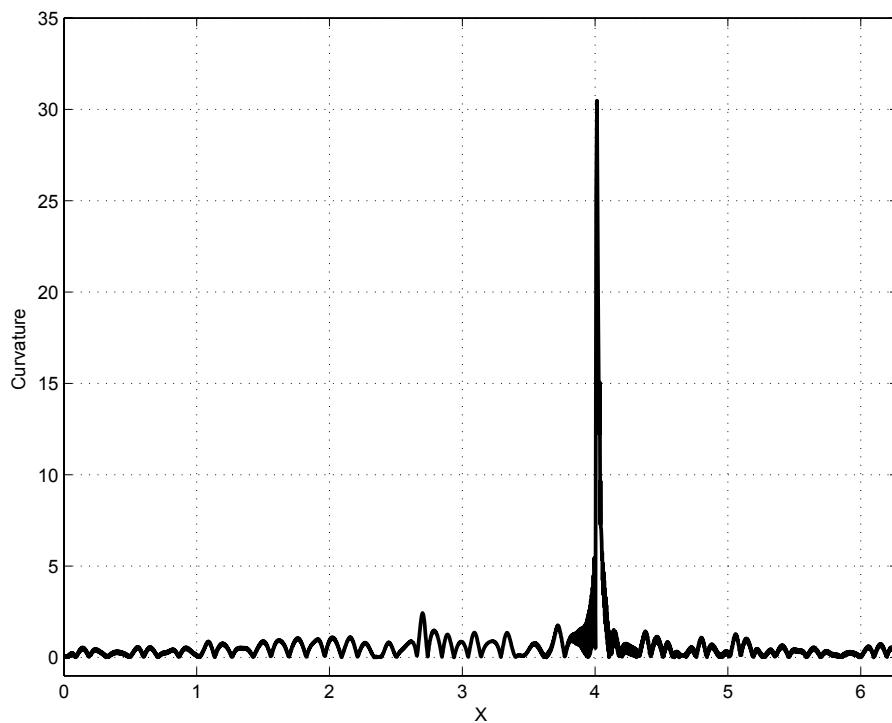


Рис. 4. Кривизна профиля волны-убийцы,  $t = 60.6$

свободной поверхности. Из физических соображений понятно, что образование волны-убийцы представляет собой концентрацию энергии и импульса. С помощью наших экспериментов мы можем это проверить. В нашем примере мы имеем 24 отдельных волн. Для удобства мы будем нумеровать по возрастанию амплитуды. На графике 5 мы приводим нормированные значения модуля импульса отдельных волн.

Из этого графика видно, что в начальный момент времени значение модуля импульса возрастает почти линейно от минимального до максимального значения, а в момент образования волны-убийцы, максимальная волна резко отличается от остальных, момент импульса волны-убийцы составляет более 13% от модуля импульса всей системы.

Похожая ситуация имеет место и для полной энергии. На графике 6 мы приводим нормированные значения для полной энергии отдельных волн.

Волна-убийца в рассматриваемом эксперименте концентрирует в себе более 36 % энергии системы.

**6. Заключение.** Исследование волн-убийц представляет собой весьма сложную задачу,

поскольку необходимо проводить вычислительные эксперименты на больших временных интервалах с большой точностью. Обычные численные методы расчета динамики волн на воде часто оказываются недостаточными, и в настоящей работе мы использовали уравнения в конформных переменных, позволяющие эффективно исследовать волны-убийцы. Полученные геометрические и динамические характеристики аномально больших поверхностных волн дают количественную оценку процессам возникновения таких волн, что очень важно для понимания механизмов возникновения волн-убийц.

Авторы благодарят академика РАН В. Е. Захарова за постановку задачи и внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта НШ-6170.2012.2 и гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования (Договор 11.G34.31.0035 от 25 ноября 2010 между Минобрнауки РФ, НГУ и ведущим ученым).

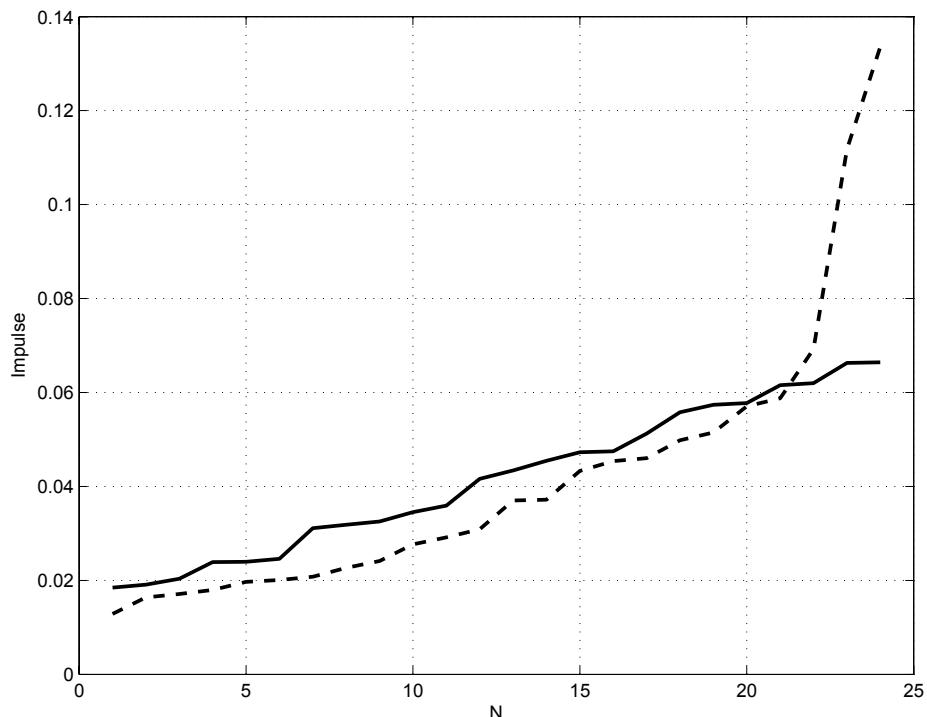


Рис. 5. Модуль импульса для отдельных волн. Сплошная линия — в начальный момент; точечная — в момент образования волны-убийцы

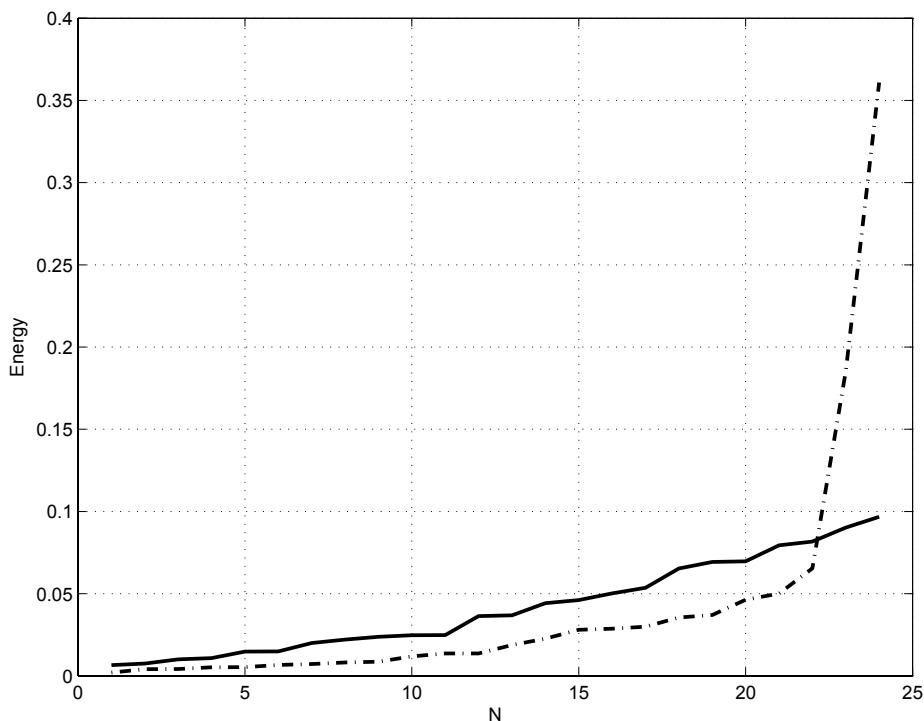


Рис. 6. Энергия для отдельных волн. Сплошная линия — в начальный момент; точечная — в момент образования волны-убийцы

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Куркин А. А., Пелиновский Е. Н. Волны-убийцы: факты, теория и моделирование. Нижний Новгород, 2004.
2. Дивинский Б. В., Левин Б. В., Лопатухин Л. И., Пелиновский Е. Н., Слюняев А. В. Аномально высокая волна в Черном море: наблюдения и моделирование // ДАН, 2004, Т. 395, № 5, С. 690—695.
3. Лавренов И. В. Встреча с волной-убийцей // Морской флот. 1985. № 12. С. 28—30.
4. Whitney J. C. The numerical solution of unsteady free-surface flows by conformal mapping // In: Proc. Second Inter. Conf. on Numer. Fluid Dynamics (ed. M. Holt), 1971. Springer-Verlag. P. 458—462.
5. Овсянников Л. В. К обоснованию теории мелкой воды // Динамика сплошной среды: сб. науч. тр. / Акад. наук СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — Новосибирск, 1973. — Вып.15. — С. 104—125.
6. Дьяченко А. И. О динамике идеальной жидкости со свободной поверхностью // Докл. Акад. наук. 2001. Т. 376. № 1. С. 27—29.
7. Chalikov D., Sheinin D. Modeling of Extreme Waves Based on Equations of Potential Flow with a Free Surface // Journ. Comp. Phys. 2005. V. 210. P. 247-273.
8. Ruban V. P. Water waves over a time-dependent bottom: Exact description for 2D potential flows // Phys. Lett. A. 2005. V. 340 No 1—4. P. 194—200.
9. Dyachenko A. I., Zakharov V. E. On the Formation of Freak Waves on the Surface of Deep Water // Письма в ЖЭТФ. 2008. Т. 88. № 5. С. 356—359.
10. Захаров В. Е., Шамин Р. В. О вероятности возникновения волн-убийц // Письма в ЖЭТФ. 2010. Т. 91. Вып. 2. С. 68—71.
11. Chalikov D. Freak waves: Their occurrence and probability // Phys. Fluids. 2009. V. 21. Issue 7. P. 076602-1—076602-18.
12. Zakharov V. E., Dyachenko A. I., Vasilyev O. A. New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface // Eur. J. Mech. B Fluids. 2002. V. 21. P. 283—291.
13. Шамин Р. В. Об одном численном методе в задаче о движении идеальной жидкости со свободной поверхностью // Сибирский журнал вычислительной математики. 2006. Т. 9. № 4. С. 379—89.
14. Шамин Р. В. Вычислительные эксперименты в моделировании поверхностных волн в океане. М.: Наука, 2008. 133 с.
15. Шамин Р. В. Динамика идеальной жидкости со свободной поверхностью в конформных переменных // Современная математика. Фундаментальные направления. 2008. Т. 28. С. 3—144.
16. Шамин Р. В. Описание динамики волн на воде на основе дифференциальных включений // Доклады Академии наук. 2011. Т. 438. № 4. С. 453—455.

*Характеристики волн-убийц в вычислительном эксперименте*

*Шамин Р.В., доктор физико-математических наук, заместитель директора по науке Института морской геологии и геофизики ДВО РАН (ИМГиГ ДВО РАН).*

*Смирнова А. И., студентка Российского университета дружбы народов*

*Юдин А. В., аспирант Российского университета дружбы народов (РУДН)*

*Shamin R. V., Doctor of Science, Leader researcher, Institute of Marine Geology and Geophysics of FEB RAS*

*Smirnova A. I., student of Peoples' Friendship University of Russia*

*Yudin A. V., postgraduate student of Peoples' Friendship University of Russia  
Moscow, Miklukho-Maklaya str. 6.*