

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ЛИНИЙ СКОЛЬЖЕНИЯ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПЕРЕКУСЫВАНИИ ПОЛОСЫ

А. С. Чеботарев

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 06.02.2012 г.

Аннотация: В работе выводятся аналитические формулы для линий скольжения, в задаче о сжатии полосы идеально-гладкими штампами. Используется метод Римана интегрирования уравнений гиперболического типа. В результате интегралы выражаются через функции Ломмеля от двух переменных. Получены соотношения для скоростей в пластической области, и предельной нагрузки

Ключевые слова: Пластичность, плоская деформация, точные решения, линии скольжения, предельная нагрузка, сжатие полосы.

Abstract: The paper considers the derivation of sliding lines equation using the Riemann method for the flat deformation problem in the ideal plasticity theory. The author solves the problem of the band compression by perfectly smooth dies, and gives the relations for the velocity in the plastic area, and the ultimate load.

Keywords: Plasticity, flat deformation problem, sliding lines, exact solutions, limit load, band compression.

ВВЕДЕНИЕ

В работе в рамках плоской деформации, для модели жестко-пластического тела выводятся в параметрическом виде уравнения линий скольжения, являющихся характеристиками гиперболических уравнений теории идеальной пластичности для граничных условий задачи Гурса заданных на дугах пересекающихся окружностей. Приводятся выражения для скоростей в пластической области, возникающей под штампами сжимающими полосу из идеального жестко-пластического материала, а затем полученные соотношения используются для аналитического решения задачи о перекусывании полосы.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ПЕРЕКУСЫВАНИИ ПОЛОСЫ

Рассмотрим классическую задачу о перекусывании полосы в рамках плоской деформации для идеальной жестко-пластической модели среды. Полоса толщиной $2H$ из материала предел которой известен и равен k , симметрично сжимается с двух сторон абсолютно жесткими штампами шириной $2a$. Предполагая, что контакт происходит без трения и считая, что давление под штампом распределено равномерно, получим для верхней поло-

вины область пластического поведения материала обозначенного на рис. 1 как $ABEOD$. Нижняя часть симметрична верхней относительно оси Ox и на рис. 1 не представлена. Пластическая зона состоит из

- треугольника ABC – однородного напряженного состояния, линии скольжения взаимно перпендикулярные прямые подходящие к границе AB под углом $\frac{\pi}{4}$;
- двух веерообразных DAC и CBE – линии скольжения прямые сходящиеся в центрах A и B и дуги окружностей заключенных между сторонами AD , AC и BE , BC соответственно.
- криволинейного четырехугольника $CEOD$ линии скольжения представляют собой кривые, параметрические уравнения которых мы и собираемся вывести.

В ходе решения необходимо найти угол χ раскрытия веерообразных DAC и CBE , а также значение предельной нагрузки P^* на штамп AB , при которой реализуется предложенное пластическое состояние. Полученное решение носит название статически-определенного. После нахождения скоростей в пластической области получим кинематически возможное решение. Продолжение решения в жесткую область в рамках данной статьи не предполагается и следовательно речь о полном решении не идет.

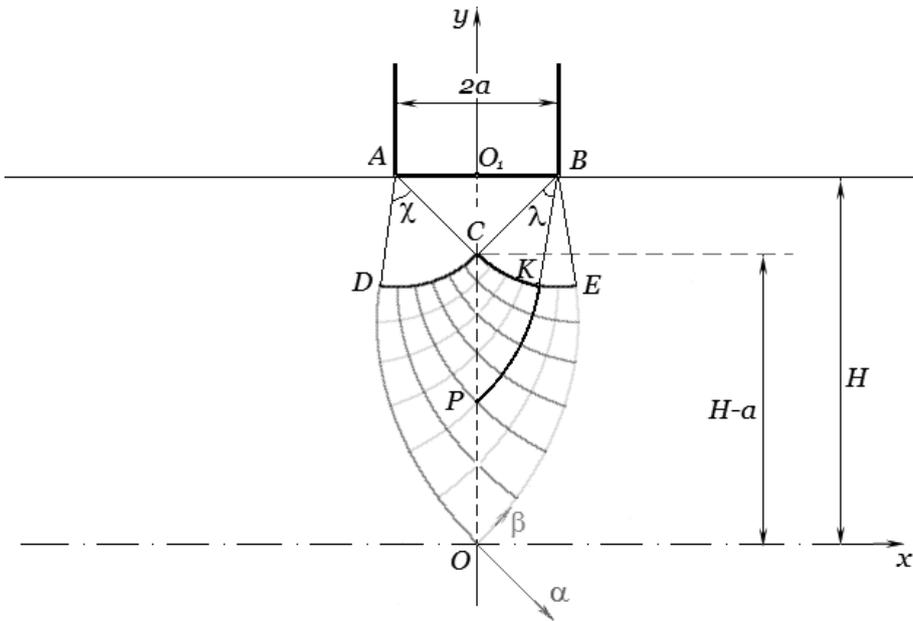


Рис. 1. Область пластического поведения материала $ABEOD$

В теории идеальной пластичности, в рамках плоской деформации, рассматривается ряд задач, в которых сетка линий скольжения строится по известным значениям, заданным на дугах пересекающихся окружностей. Это и внедрение прямоугольного штампа, и волочение сквозь короткую матрицу, и наконец задача о перекусывании полосы (например [1]—[4]). Общей характерной чертой данных публикаций является привлечение тех или иных конечно-разностных аппроксимаций, приближающих линии скольжения с требуемой точностью. Другой способ решения этой задачи состоит в использовании квадратурных формул метода Риммана, интегрирования уравнений гиперболического типа. Но на данном пути получены лишь формулы для кривизн линий скольжения, построенных на дугах окружностей (см. [4], [5]). В данной работе, следуя способу изложенному в [6], выводятся в параметрическом виде уравнения самих линий скольжения в криволинейном четырехугольнике $CEOD$, приводятся выражения для скоростей в пластической области, а затем полученные соотношения используются для аналитического решения задачи о перекусывании полосы.

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ЛИНИЙ СКОЛЬЖЕНИЯ

Пусть в системе координат xOy , (рис.2) центры окружностей расположены в точках с

координатами $(0, R)$ α -линия и $(-R, 0)$ β -линия.

Параметрические уравнения окружностей имеют следующий вид:

$$\alpha\text{-линия} \begin{cases} x = R \sin \alpha \\ y = R - R \cos \alpha \end{cases}$$

и

$$\beta\text{-линия} \begin{cases} x = -R + R \cos \beta \\ y = R \sin \beta \end{cases}.$$

Используя переменные введенные Михлиным $\begin{cases} X = x \cos \theta + y \sin \theta \\ Y = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$ при $\theta = \alpha + \beta$ будем иметь следующие краевые условия начальной характеристической задачи:

для α -линии

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \theta = \beta \end{cases}, \begin{cases} X = R - R \cos \beta \\ Y = R \sin \beta \end{cases}, \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial \beta} = R \sin \beta \\ \frac{\partial Y}{\partial \beta} = R \cos \beta \end{cases}.$$

и для β -линии

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \theta = \alpha \end{cases}, \begin{cases} X = R \sin \alpha \\ Y = R \cos \alpha - R \end{cases}, \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial \alpha} = R \cos \alpha \\ \frac{\partial Y}{\partial \alpha} = -R \sin \beta \end{cases}.$$

Как известно переменные Михлина X и Y удовлетворяют телеграфному уравнению $\partial^2 f \partial \alpha \partial \beta + f = 0$ решение которого задается формулой Риммана [5]:

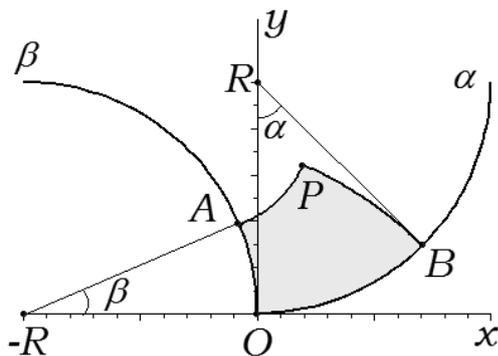


Рис. 2. В точке P формула (1) определяет решение телеграфного уравнения

$$f(a, b) = J_0(2\sqrt{ab})f(0,0) + \int_0^a J_0(2\sqrt{(a-\alpha)b}) \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha + \int_0^b J_0(2\sqrt{a(b-\beta)}) \frac{\partial f}{\partial \beta} d\beta. \quad (1)$$

Для переменной X будем иметь:

$$X(a, b) = \int_0^a J_0(2\sqrt{(a-\alpha)b}) R \cos \alpha d\alpha + \int_0^b J_0(2\sqrt{a(b-\beta)}) R \sin \beta d\beta.$$

Для переменной Y будем иметь:

$$Y(a, b) = \int_0^a J_0(2\sqrt{(a-\alpha)b}) (-R \sin \alpha) d\alpha + \int_0^b J_0(2\sqrt{a(b-\beta)}) R \cos \beta d\beta.$$

Обратная подстановка к физическим координатам x, y дает квадратурные формулы интересующих нас линий скольжения:

$$\begin{cases} x(a, b) = X(a, b) \cos(a+b) - Y(a, b) \sin(a+b), \\ y(a, b) = X(a, b) \sin(a+b) + Y(a, b) \cos(a+b). \end{cases}$$

Рассмотрим вычисление интегралов, фигурирующих в выражениях для $X(a, b)$ и $Y(a, b)$:

$$\begin{aligned} Int_1 &= \int_0^a J_0(2\sqrt{(a-\alpha)b}) \cos \alpha d\alpha, \\ Int_2 &= \int_0^b J_0(2\sqrt{a(b-\beta)}) \sin \beta d\beta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Int_3 &= \int_0^a J_0(2\sqrt{(a-\alpha)b}) \sin \alpha d\alpha, \\ Int_4 &= \int_0^b J_0(2\sqrt{a(b-\beta)}) \cos \beta d\beta. \end{aligned}$$

При этом будем иметь:

$$\begin{cases} X(a, b) = R(Int_1 + Int_2), \\ Y(a, b) = R(-Int_3 + Int_4). \end{cases}$$

Рассмотрим $Int_1 = \int_0^a J_0(2\sqrt{(a-\alpha)b}) \cos \alpha d\alpha$.

Введем следующую замену: $t = \sqrt{b(a-\alpha)}$ тогда:

$$\begin{aligned} \alpha &= a - \frac{t^2}{b}, \quad d\alpha = -\frac{2}{b} t dt. \quad \text{Границы преобразуются:} \\ \alpha &= a \rightarrow t=0 \\ \alpha &= 0 \rightarrow t = \sqrt{ba}. \quad \text{В итоге получим} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Int_1 &= \int_{\sqrt{ba}}^0 J_0(2t) \cos(a - \frac{t^2}{b}) (-\frac{2}{b} t) dt = \\ &= \frac{2}{b} \int_0^{\sqrt{ba}} J_0(2t) \cos(a - \frac{t^2}{b}) t dt = \\ &= \frac{2}{b} \int_0^{\sqrt{ba}} t J_0(2t) \left(\cos(a) \cos(\frac{t^2}{b}) + \sin(a) \sin(\frac{t^2}{b}) \right) dt = \\ &= \frac{2}{b} \cos(a) \int_0^{\sqrt{ba}} t \cos(\frac{t^2}{b}) J_0(2t) dt + \\ &+ \frac{2}{b} \sin(a) \int_0^{\sqrt{ba}} t \sin(\frac{t^2}{b}) J_0(2t) dt. \end{aligned}$$

Согласно [7]:

$$\begin{aligned} \int_0^x x^{\nu+1} \begin{Bmatrix} \sin ax^2 \\ \cos ax^2 \end{Bmatrix} J_\nu(bx) dx &= \\ = b^\nu (2a)^{\nu+1} \begin{Bmatrix} U_{\nu+1}(2ax^2, bx) \\ U_{\nu+2}(2ax^2, bx) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin ax^2 \\ \cos ax^2 \end{Bmatrix} &\mp \\ \mp U_{\nu+2}(2ax^2, bx) \begin{Bmatrix} \cos ax^2 \\ \sin ax^2 \end{Bmatrix}. & \end{aligned}$$

где $U_\nu(z, w) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{z}{w}\right)^{2k+\nu} J_{2k+\nu}(w)$ — функция

Ломмеля двух переменных.

Значит,

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{ba}} t \cos(\frac{t^2}{b}) J_0(2t) dt &= \\ = \frac{b}{2} \left[U_1(2a, 2\sqrt{ba}) \cos(a) + U_2(2a, 2\sqrt{ba}) \sin(a) \right], \end{aligned}$$

$$\int_0^{\sqrt{ba}} t \sin\left(\frac{t^2}{b}\right) J_0(2t) dt =$$

$$= \frac{b}{2} \left[U_1(2a, 2\sqrt{ba}) \sin(a) - U_2(2a, 2\sqrt{ba}) \cos(a) \right].$$

Продолжая вычисление Int_1 окончательно получим:

$$Int_1 =$$

$$= \frac{2}{b} \left(\cos(a) \frac{b}{2} \left[U_1(2a, 2\sqrt{ba}) \cos(a) + U_2(2a, 2\sqrt{ba}) \sin(a) \right] + \right.$$

$$\left. + \sin(a) \frac{b}{2} \left[U_1(2a, 2\sqrt{ba}) \sin(a) - U_2(2a, 2\sqrt{ba}) \cos(a) \right] \right) =$$

$$= \left[U_1(2a, 2\sqrt{ba}) \cos^2(a) + U_2(2a, 2\sqrt{ba}) \sin(a) \cos(a) \right] +$$

$$+ \left[U_1(2a, 2\sqrt{ba}) \sin^2(a) - U_2(2a, 2\sqrt{ba}) \cos(a) \sin(a) \right] =$$

$$= U_1(2a, 2\sqrt{ba}).$$

Рассмотрим теперь $Int_4 = \int_0^b J_0\left(2\sqrt{a(b-\beta)}\right) \times$
 $\times \cos \beta d\beta$, замена: $t = \sqrt{a(b-\beta)}$ тогда: $\beta = b - \frac{t^2}{a}$,
 $d\beta = -\frac{2}{a} t dt$. Границы преобразуются:
 $\beta = b \rightarrow t = 0$

$\beta = 0 \rightarrow t = \sqrt{ba}$. В результате имеем:

$$Int_4 = \int_{\sqrt{ba}}^0 J_0(2t) \cos\left(b - \frac{t^2}{a}\right) \left(-\frac{2}{a} t\right) dt =$$

$$= \frac{2}{a} \int_0^{\sqrt{ba}} J_0(2t) \cos\left(b - \frac{t^2}{a}\right) t dt.$$

Так как полученное выражение симметрично Int_1 относительно замены $a \leftrightarrow b$ то $Int_4 = U_1(2b, 2\sqrt{ba})$. Поступая аналогично с выражениями Int_2 , Int_3 будем иметь:

$$Int_1 = \int_0^a J_0\left(2\sqrt{(a-\alpha)b}\right) \cos \alpha d\alpha = U_1(2a, 2\sqrt{ba}),$$

$$Int_2 = \int_0^b J_0\left(2\sqrt{a(b-\beta)}\right) \sin \beta d\beta = U_2(2b, 2\sqrt{ba}),$$

$$Int_3 = \int_0^a J_0\left(2\sqrt{(a-\alpha)b}\right) \sin \alpha d\alpha = U_2(2a, 2\sqrt{ba}),$$

$$Int_4 = \int_0^b J_0\left(2\sqrt{a(b-\beta)}\right) \cos \beta d\beta = U_1(2b, 2\sqrt{ba}).$$

Подставляя полученные значения интегралов Int_1 , Int_2 , Int_3 , Int_4 в $X(a, b)$ и $Y(a, b)$, будем иметь следующие выражения:

$$\begin{cases} X(a, b) = R(U_1(2a, 2\sqrt{ba}) + U_2(2b, 2\sqrt{ba})), \\ Y(a, b) = R(U_1(2b, 2\sqrt{ba}) - U_2(2a, 2\sqrt{ba})). \end{cases}$$

Переходя от переменных Михлина X и Y к

физическим координатам x и y , получим следующие уравнения для линий скольжения в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x(a, b) = R \cos(a+b) \left(U_1(2a, 2\sqrt{ba}) + U_2(2b, 2\sqrt{ba}) \right) - \\ - R \sin(a+b) \left(U_1(2b, 2\sqrt{ba}) - U_2(2a, 2\sqrt{ba}) \right), \\ y(a, b) = R \sin(a+b) \left(U_1(2a, 2\sqrt{ba}) + U_2(2b, 2\sqrt{ba}) \right) + \\ + R \cos(a+b) \left(U_1(2b, 2\sqrt{ba}) - U_2(2a, 2\sqrt{ba}) \right). \end{cases} \quad (3)$$

В качестве иллюстрации (рис. 3) приведем сетку линий скольжения для значений параметров $0 < a < \frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} < b < 0$, и хотя аргументами функций Ломмеля являются мнимые числа сами значения этих функций остаются действительными.

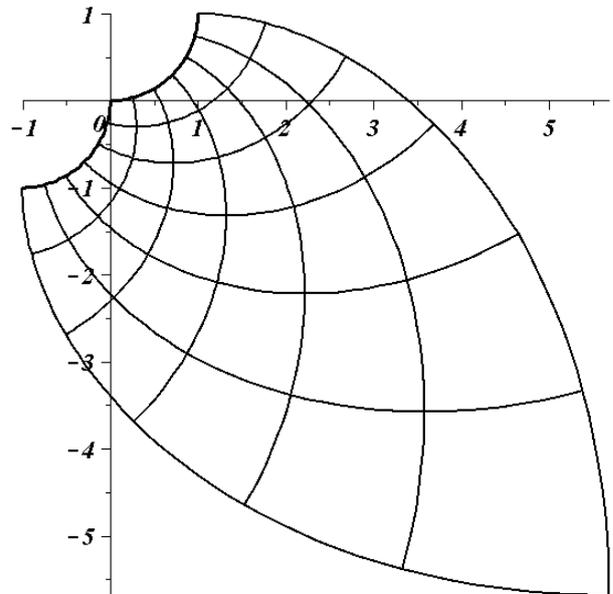


Рис. 3. Сетка линий скольжений построенная на дугах окружностей. Для сравнения [5] стр. 186, Фиг. 31

РЕШЕНИЕ В СКОРОСТЯХ

Найдем граничные условия для скоростей. Штампы, действующие на полосу, сближаются по вертикали со скоростью U . Жесткие области полосы расходятся по горизонтали со скоростью V . Условие несжимаемости приводит к тому, что $U \cdot 2a = 2(V \cdot H)$. Значит $U = V \frac{H}{a}$. Переменные u и v как обычно обозначают составляющие вектора скорости точки вдоль α -линии и вдоль β -линии соответственно. Исходя из изображения (рис. 4) видно, что на α -линии нормальная составляющая скорости будет $v = -V \cos \lambda$, а касательная составляющая

щая u направлена под углом $\frac{\pi}{4} - \alpha$ к оси симметрии. Исходя из того, что угол $\alpha < 0$, мы получаем, что угол $MKN = \pi/4 - \alpha$. Далее, учитывая что углы KMN и λ накрестлежащие, мы получаем $\lambda = \pi/4 + \alpha$, а проекция $v = -V \cos(\pi/4 + \alpha)$. Проводя аналогичные рассуждения на β -линии и учитывая, что $\beta > 0$, получаем $u = V \sin(\pi/4 + \beta)$.

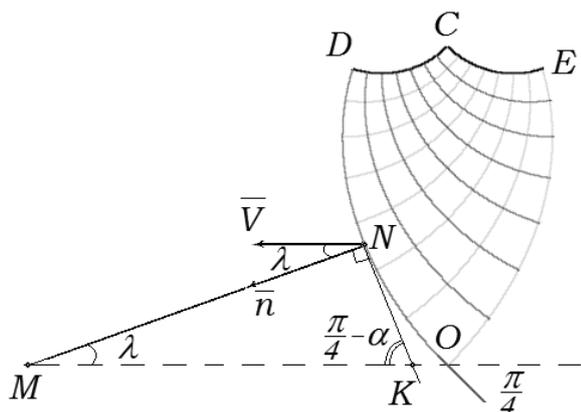


Рис. 4. Определение граничных условий для скоростей

Используя уравнения Гейрингер получаем:

$$\begin{cases} \partial u \partial \alpha = v = -V \cos(\pi/4 + \alpha) \\ \partial v \partial \beta = -u = -V \sin(\pi/4 + \beta) \\ \partial u \partial \beta = V \cos(\pi/4 + \beta) \\ \partial v \partial \alpha = V \sin(\pi/4 + \alpha) \end{cases}$$

Переменные u и v также удовлетворяют телеграфному уравнению $\partial^2 f \partial \alpha \partial \beta + f = 0$, решение которого определяется формулой (1).

$$\begin{aligned} u(a, b) &= V\sqrt{2}J_0\left(2\sqrt{ab}\right) - \\ &- V\int_0^a J_0\left(2\sqrt{(a-\alpha)b}\right)\cos(\pi/4 + \alpha)d\alpha + \\ &+ V\int_0^b J_0\left(2\sqrt{a(b-\beta)}\right)\cos(\pi/4 + \beta)d\beta \\ v(a, b) &= V\sqrt{2}J_0\left(2\sqrt{ab}\right) + \\ &+ V\int_0^a J_0\left(2\sqrt{(a-\alpha)b}\right)\sin(\pi/4 + \alpha)d\alpha - \\ &- V\int_0^b J_0\left(2\sqrt{a(b-\beta)}\right)\sin(\pi/4 + \beta)d\beta \end{aligned}$$

Используя тригонометрические формулы, получим:

$$\begin{aligned} u(a, b) &= V\sqrt{2}\left[J_0\left(2\sqrt{ab}\right) - \right. \\ &- \int_0^a J_0\left(2\sqrt{(a-\alpha)b}\right)\cos(\alpha)d\alpha + \\ &+ \int_0^b J_0\left(2\sqrt{a(b-\beta)}\right)\sin(\beta)d\beta - \\ &+ \int_0^a J_0\left(2\sqrt{a(b-\beta)}\right)\cos(\beta)d\beta - \\ &- \left. \int_0^b J_0\left(2\sqrt{a(b-\beta)}\right)\sin(\beta)d\beta\right] \\ v(a, b) &= V\sqrt{2}\left[J_0\left(2\sqrt{ab}\right) + \right. \\ &+ \int_0^a J_0\left(2\sqrt{(a-\alpha)b}\right)\sin(\alpha)d\alpha + \\ &+ \int_0^b J_0\left(2\sqrt{(a-\alpha)b}\right)\cos(\alpha)d\alpha - \\ &- \int_0^a J_0\left(2\sqrt{a(b-\beta)}\right)\sin(\beta)d\beta - \\ &- \left. \int_0^b J_0\left(2\sqrt{a(b-\beta)}\right)\cos(\beta)d\beta\right] \end{aligned}$$

Интегралы, фигурирующие в уравнениях, представим в виде (2). Тогда получим следующие соотношения для скоростей:

$$\begin{cases} u(a, b) = V\sqrt{2}\left[J_0\left(2\sqrt{ab}\right) - U_1\left(2a, 2\sqrt{ba}\right) + \right. \\ \left. + U_2\left(2a, 2\sqrt{ba}\right) + U_1\left(2b, 2\sqrt{ba}\right) - U_2\left(2b, 2\sqrt{ba}\right)\right] \\ v(a, b) = V\sqrt{2}\left[J_0\left(2\sqrt{ab}\right) + U_1\left(2a, 2\sqrt{ba}\right) + \right. \\ \left. + U_2\left(2a, 2\sqrt{ba}\right) - U_1\left(2b, 2\sqrt{ba}\right) - U_2\left(2b, 2\sqrt{ba}\right)\right] \end{cases} \quad (4)$$

Очевидно, что вдоль прямой Oy в силу симметрии $u(-\phi, \phi) = -v(-\phi, \phi)$ Выведем уравнение определения угла раскрытия веера χ из условия: $\sqrt{2}u(-\chi, \chi) = U$ или

$$a\sqrt{2}u(-\chi, \chi) = VH. \quad (5)$$

Уравнение (5) получено из соотношений связывающих скорости движения штампа и скорость перемещения жесткой области полосы. Но можно для определения угла раскрытия веера χ использовать другие соображения, в частности геометрические. Когда точка O пересечения линий DO и EO лежит на оси симметрии угол раскрытия веера DAC равен в точности χ . Далее переходим к выводу соотношений, необходимых для определения предельной нагрузки.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Используем формулы (3) для вывода соотношений потребующихся в дальнейшем. Выразим $x(a, b)$, $y(a, b)$ в случае $\begin{cases} a=z, \\ b=-z; \end{cases}$ при условиях $\begin{cases} z \in R, \\ z \neq 0. \end{cases}$ Имеем

$$\begin{cases} x(z, -z) = R \left(U_1(2z, 2\sqrt{-z^2}) + U_2(-2z, 2\sqrt{-z^2}) \right) = \\ = R \left(U_1(2z, 2zi) + U_2(-2z, 2zi) \right), \\ y(z, -z) = R \left(U_1(-2z, 2\sqrt{-z^2}) - U_2(2z, 2\sqrt{-z^2}) \right) = \\ = R \left(U_1(-2z, 2zi) - U_2(2z, 2zi) \right). \end{cases}$$

Преобразуем выражения $U_1(z, zi)$, $U_2(-z, zi)$, $U_1(-z, zi)$, $U_2(z, zi)$ используя определение функций Ломмеля двух переменных и свойства функций Бесселя.

$$\begin{aligned} U_1(z, zi) &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{z}{zi}\right)^{2m+1} J_{2m+1}(zi) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{1}{i}\right)^{2m+1} (i)^{2m+1} J_{2m+1}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m I_{2m+1}(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_1(-z, zi) &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{-z}{zi}\right)^{2m+1} J_{2m+1}(zi) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{-1}{i}\right)^{2m+1} (i)^{2m+1} J_{2m+1}(z) = \\ &= -\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m I_{2m+1}(z) = -U_1(z, zi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2(z, zi) &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{z}{zi}\right)^{2m+2} J_{2m+2}(zi) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{1}{i}\right)^{2m+2} (i)^{2m+2} J_{2m+2}(z) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m I_{2m+2}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (-1)^{2m+2} I_{2m+2}(z) = \\ &= U_2(-z, zi) \end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned} U_1(z, zi) &= -U_1(-z, zi) = \\ &= I_1(z) - I_3(z) + I_5(z) - I_7(z) + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} U_2(z, zi) &= U_2(-z, zi) = \\ &= I_2(z) - I_4(z) + I_6(z) - I_8(z) + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Чтобы упростить (7) воспользуемся [8] формулой (9.6.36)

$$1 = I_0(z) - 2I_2(z) + 2I_4(z) - 2I_6(z) + 2I_8(z) + \dots$$

$$\text{Получим } U_2(z, zi) = U_2(-z, zi) = I_0(z) - 12$$

Для (6) будем иметь следующее выражение

$$\begin{aligned} U_1(z, zi) &= -U_1(-z, zi) = \\ &= \frac{1}{2} \int I_0(z) = z {}_1F_2\left(\frac{1}{2}; 1, \frac{3}{2}; \frac{z^2}{4}\right) \end{aligned}$$

где ${}_1F_2\left(\frac{1}{2}; 1, \frac{3}{2}; \frac{z^2}{4}\right)$ — обобщенная гипергеометрическая функция. Таким образом получим

$$\begin{aligned} x(z, -z) &= -y(z, -z) = \\ &= R \left(z {}_1F_2\left(\frac{1}{2}; 1, \frac{3}{2}; z^2\right) + \frac{I_0(2z)}{2} - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

Эта формула позволяет найти расстояние от точки лежащей на оси симметрии $y=-x$ до начала координат в зависимости от соответствующего значения дуговой координаты (рис. 3).

Используя введенные выше соотношения запишем зависимость между углом λ раскрытия веера CBK и длиной CP в следующем виде:

$$CP = y(\lambda) = a \left(2\lambda {}_1F_2\left(\frac{1}{2}; 1, \frac{3}{2}; \lambda^2\right) + I_0(2\lambda) - 1 \right) \quad (8)$$

Тогда для поиска χ — угла раскрытия веера CBE будет иметь уравнение: $CO=y(\chi)$ (рис. 1). Или после подстановки

$$H = a \left(2\chi {}_1F_2\left(\frac{1}{2}; 1, \frac{3}{2}; \chi^2\right) + I_0(2\chi) \right) \quad (9)$$

Численное сравнение формул (5) и (9) предоставляем читателю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

Выразим зависимость между σ_C и σ_P

$$\begin{cases} \sigma_C - \theta_C 2k = \sigma_K - \theta_K 2k & \text{вдоль } \alpha\text{-линии } CK, \\ \sigma_K + \theta_K 2k = \sigma_P + \theta_P 2k & \text{вдоль } \beta\text{-линии } KP; \end{cases}$$

Так как $\theta_C = \theta_P = \frac{\pi}{4}$, а $\theta_K = -\frac{\pi}{4} + \lambda$ то исключая σ_K получим распределение σ вдоль CO в зависимости от угла λ :

$$\sigma_P = \sigma_C + 4k\lambda.$$

Константу σ_C найдем приравнявая нулю сумму проекций всех сил, действующих вдоль прямой O_1O и направленных вдоль оси Ox :

$$0 = \int_{O_1}^O \sigma_x dy = \int_{O_1}^C \sigma_x dy + \int_C^O \sigma_x dy.$$

Используя соотношения Леви

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma - k \sin 2\theta, \\ \sigma_y = \sigma + k \sin 2\theta, \text{ найдем} \\ \tau_{xy} = k \cos 2\theta; \end{cases}$$

$$\text{в точке } P \begin{cases} \sigma_x = \sigma_C + 4k\lambda + k, \\ \tau_{xy} = 0; \end{cases}$$

$$\text{в точке } C \begin{cases} \sigma_x = \sigma_C + k, \\ \sigma_y = \sigma_C - k; \end{cases} \text{ тогда}$$

$$\begin{aligned} \int_{O_1}^C \sigma_x dy &= (\sigma_C + k)a \\ \int_C^O \sigma_x dy &= \int_C^O (\sigma_C + k + 4k\lambda) dy. \end{aligned} \quad (10)$$

Так как зависимость $y = y(\lambda)$ известна – формула (8) – то вычисление интеграла (10) произведем подстановкой

$$\begin{aligned} dy &= \frac{dy}{d\lambda} d\lambda & y = y_C &\rightarrow \lambda = 0 \\ & & y = y_O &\rightarrow \lambda = \chi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= (\sigma_C + k)a + \int_C^O (\sigma_C + k + 4k\lambda) dy = + \\ &= (\sigma_C + k)a + (\sigma_C + k) \int_0^\chi dy d\lambda d\lambda + \\ &\quad + 4k \int_0^\chi \lambda dy d\lambda d\lambda = \\ &= (\sigma_C + k)a + (\sigma_C + k)(y(\chi) - y(0)) + \\ &\quad + 4k \int_0^\chi \lambda dy d\lambda d\lambda = \\ &= (\sigma_C + k)a + (\sigma_C + k)(H - a) + 4k \int_0^\chi \lambda dy d\lambda d\lambda = \\ &= (\sigma_C + k)H + 4k \left(\lambda y(\lambda) \Big|_0^\chi - \int_0^\chi y(\lambda) d\lambda \right) = \\ &= (\sigma_C + k)H + 4k\chi(H - a) - 4k \int_0^\chi y(\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

Выражая σ_C получим

$$\sigma_C = \frac{4k}{H} \int_0^\chi y(\lambda) d\lambda - 4k\chi + 4k\chi \frac{a}{H} - k.$$

Так как

$$\begin{aligned} \int y(z) dz &= \int \left(2z {}_1F_2 \left(\frac{1}{2}; 1, \frac{3}{2}; z^2 \right) + I_0(2z) - 1 \right) dz = \\ &= z \left({}_1F_2 \left(\frac{1}{2}; 1, \frac{3}{2}; z^2 \right) + z {}_1F_2 \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}, 2; z^2 \right) - 1 \right), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \sigma_C &= \frac{4k}{H} \chi \left({}_1F_2 \left(\frac{1}{2}; 1, \frac{3}{2}; \chi^2 \right) + \chi {}_1F_2 \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}, 2; \chi^2 \right) - 1 \right) - \\ &\quad - 4k\chi + 4k\chi \frac{a}{H} - k. \end{aligned} \quad (11)$$

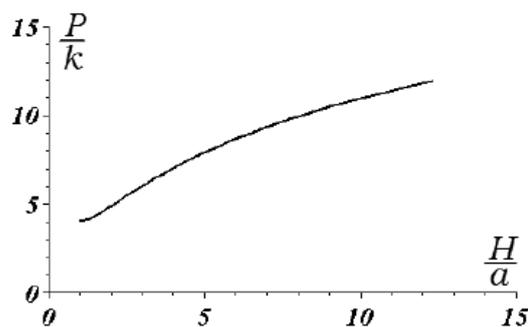


Рис. 5. Зависимость предельной нагрузки от геометрических параметров

Значение предельной нагрузки найдем следующим образом

$$\begin{aligned} P^* &= \int_A^B \sigma_y dx = \int_A^B (\sigma_C - k) dx = (\sigma_C - k)2a. \\ P^* &= 2a \left(\frac{4k}{H} \chi \left({}_1F_2 \left(\frac{1}{2}; 1, \frac{3}{2}; \chi^2 \right) + \chi {}_1F_2 \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}, 2; \chi^2 \right) - 1 \right) - \right. \\ &\quad \left. - 4k\chi + 4k\chi \frac{a}{H} - 2k \right) \end{aligned} \quad (12)$$

Формулы (9), (12) выражают зависимости

$$\begin{cases} H = H(\chi), \\ P^* = P^*(H(\chi), \chi); \end{cases} \text{ что фактически означает}$$

связь между величиной предельной нагрузки и геометрическими параметрами задачи (рис. 5).

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В теории идеальной пластичности не так много задач имеют законченные аналитические решения. Как правило решения приближенные получить легче и использовать в конкретных ситуациях проще. Но для выявления многочисленных свойств исследуемого явления приближенные решения удобны лишь в рамках вычислительного эксперимента. В тоже время

точные аналитические решения выявляют свойства задачи посредством свойств функций, входящих в решение. В данной работе получены уравнения линий скольжения (3), скоростей (4), формула для предельной нагрузки в параметрическом виде. Квадратурные формулы (2) помогают исследовать свойства задач теории пластичности опираясь на свойства функций Ломмеля двух переменных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивлев Д. Д.* Теория идеальной пластичности, М., Наука, 1966.
2. *Соколовский В. В.* Теория пластичности, М., Высш. школа, 1969.
3. *Качанов Л. .* Основы теории пластичности, М., Наука, 1969.

Чеботарев А. С., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики факультета ПММ, Воронежский государственный университет

Тел. 2-208-763

E-mail: xeba@amm.vsu.ru

4. *Друянов Б. А., Непершин Р. И.* Теория технологической пластичности, М., Машиностроение, 1990.

5. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности, М., Наука, 1956.

6. *Чеботарев А. С.* Интегрирование уравнений плоской деформации одной задачи теории идеальной пластичности. Воронеж. Вестник ВГУ. Серия Физика Математика. № 2. 2007.

7. *Прудников А. П. Брычков Ю. А. Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М. Наука. 1983.

8. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Под редакцией М. Абрамовица и И. Стиган. — М.: Наука, 1979. 832 с.

Chebotarev A. S., candidate of Sciences in Physics and Mathematics, associate professor of faculty of applied mathematics information technologies and mechanics, Voronezh State University

Tel: (473)220-87-63

E-mail: xeba@amm.vsu.ru