УДК 517.925.41

ТРАЕКТОРИИ КУБИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ, ИМЕЮЩЕЙ ИНВАРИАНТНЫЕ ПРЯМЫЕ ШЕСТИ РАЗЛИЧНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

А. Д. Ушхо

Адыгейский государственный университет

Поступила в редакцию 15.12.2011 г.

Аннотация. Доказывается, что, в зависимости от взаимного расположения особых точек, кубическая дифференциальная система на плоскости, имеющая действительные инвариантные прямые шести различных направлений, приводится к специальному виду. Это позволяет упростить качественное исследование системы в целом. Устанавливается также, что такая система в конечной части фазовой плоскости имеет семь особых точек: четыре простых дикритических узла и три простых седла, а на экваторе сферы Пуанкаре не имеет особых точек.
Ключевые слова: кубическая дифференциальная система, инвариантная прямая, особая точка, экватор сферы Пуанкаре.

Abstract. It is proved, that, depending on a relative positioning of special points, the cubic differential system on a plane, having the real invariant straight lines of six various directions, is reduce to a special form. It allows to simplify qualitative study of system as a whole. It is established also, that such system in a final part of a phase plane has seven special points: four simple dicritic knots and three simple saddles, and on equator of Poincare sphere has no special points.
Keywords: cubic differential system, invariant straight line, singular point, equator of Poincare sphere.

ВВЕДЕНИЕ

Будем рассматривать систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=0}^{3} a_{ij} x^i y^j \equiv P_3(x,y), \frac{dy}{dt} = = \sum_{i+j=0}^{3} b_{ij} x^i y^j \equiv Q_3(x,y) \quad (1)$$

в предположении, что она удовлетворяет условиям*

$$a_{ij}, b_{ij} \in \boldsymbol{R}\ (P_3, Q_3) = 1,\ \sum_{i+j=3} \left|a_{ij}\right| > 0, \sum_{i+j=3} \left|b_{ij}\right| > 0\,. \quad (2)$$

Долгое время считалось, что дифференциальное уравнение

$$P_3(x,y)dy - Q_3(x,y)dx = 0 \quad (3)$$

может иметь интегральные прямые не более четырех различных направлений [1, 2]. Интерес к проблеме инвариантных прямых кубических систем на плоскости вновь проявился в последнее десятилетие. В частности, впервые в работе [3] доказано, что такие системы могут иметь действительные инвариантные прямые не четырех, как утверждается в [1], а шести различных направлений. В работе [4] построен пример конкретной кубической системы, имеющей инвариантные прямые шести различных направлений. Работы [3, 4] инициировали исследование системы (1) на предмет оценки сверху числа различных направлений действительных инвариантных прямых. В [5] доказано, что система (1) может иметь действительные инвариантные прямые не более шести различных направлений. Данная статья является естественным продолжением работы [5].

Прежде чем начать изложение основных результатов работы приведем определения понятий «инвариантная прямая», «особая точка» и прокомментируем некоторые факты из качественной теории дифференциальных уравнений, которые существенно используются нами.

Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y)\,,\ \frac{dy}{dt} = Q(x,y)\,, \quad (4)$$

* В данной статье всегда считаем выполненными условия (2).

где P и Q – взаимно простые многочлены степени n с действительными коэффициентами.

Определение 1 [6]. Прямую линию $ax + by + c = 0$ назовем инвариантной прямой линией системы (4), если выполняется равенство

$$aP(x, y) + bQ(x, y) \equiv (ax + by + c)R(x, y),$$

где $R(x, y)$ — многочлен с действительными коэффициентами, a, b, c — const.

Отметим, что $R(x, y)$ — многочлен степени не выше $n-1$ [7, с. 17].

Понятия «инвариантная прямая» (или «линейный частный интеграл») системы (4) и «интегральная прямая» дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \tag{5}$$

являются синонимами [7].

Уравнение (5) часто называют в качественной теории дифференциальных уравнений уравнением фазовых траекторий системы (4) (см. например, [7] и [8]).

Определение 2 [9]. Особой точкой системы (4) называют точку $M(x_0, y_0)$, $x_0, y_0 \in \boldsymbol{R}$, удовлетворяющую системе уравнений

$$\begin{cases} P(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0. \end{cases}$$

Наряду с термином «особая точка» в качественной теории дифференциальных уравнений используются такие термины как «состояние равновесия», «точка покоя».

Под бесконечно удаленными особыми точками системы (4) подразумеваются особые точки систем, полученных из (4) в результате применения преобразований Пуанкаре [9]:

$$x = 1/z, \; y = u/z \text{ и } x = \upsilon/z, \; y = 1/z.$$

Нами используется известный из геометрии факт (см., например, [10]): любая прямая, а значит и инвариантная прямая, пересекает кривую третьего порядка не более чем в трех действительных точках. Так как особыми точками системы (1) являются общие точки изоклины бесконечности $P_3(x, y) = 0$ и изоклины нуля $Q_3(x, y) = 0$, то на любой прямой эта система не может иметь более трех особых точек.

Покажем, что кубическая дифференциальная система (1) не может иметь более четырех инвариантных прямых, пересекающихся в одной особой точке. Не уменьшая общности, будем считать начало координат $O(0,0)$ особой точкой системы (1), через которую проходят инвариантные прямые.

Пусть $y = mx$ — инвариантная прямая системы (1), тогда имеет место равенство

$$Q_3(x, kx) - mP_3(x, kx) \equiv 0, \tag{6}$$

где $a_{00} = b_{00} = 0$.

Из (6) получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a_{01}m^2 + (a_{10} - b_{01})m - b_{10} = 0, \\ a_{02}m^3 + (a_{11} - b_{02})m^2 + (a_{20} - b_{11})m - b_{20} = 0, \\ a_{03}m^4 + (a_{12} - b_{03})m^3 + (a_{21} - b_{12})m^2 + \\ +(a_{30} - b_{21})m - b_{30} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Все уравнения системы не могут одновременно удовлетворяться тождественно относительно m, так как в противном случае правые части уравнений системы (1) имеют общий множитель, отличный от постоянной. Это противоречит предположению о взаимной простоте многочленов $P_3(x, y)$ и $Q_3(x, y)$. Таким образом, система (7) имеет не более четырех решений относительно углового коэффициента m инвариантной прямой. Этим и доказано, что через особую точку кубической дифференциальной системы (1) проходит не более четырех инвариантных прямых.

Одним из важных свойств автономной дифференциальной системы является следующее: если ℓ: $y = mx + n$ — инвариантная прямая системы (4), то в результате аффинного преобразования

$$x = \alpha\overline{x} + \beta\overline{y} + \omega, \; y = \gamma\overline{x} + \delta\overline{y} + \eta, \\ \Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \tag{8}$$

ℓ переходит в прямую $\overline{\ell}$, также являющуюся инвариантной для системы

$$\frac{d\overline{x}}{d\tau} = \tilde{P}(\overline{x}, \overline{y}), \qquad \frac{d\overline{y}}{d\tau} = \tilde{Q}(\overline{x}, \overline{y}), \tag{9}$$

где

$$\tilde{P}(\overline{x}, \overline{y}) = \delta \cdot P(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y} + \omega, \gamma\overline{x} + \delta\overline{y} + \eta) - \\ -\beta \cdot Q(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y} + \omega, \gamma\overline{x} + \delta\overline{y} + \eta),$$

$$\tilde{Q}(\overline{x}, \overline{y}) = -\gamma \cdot P(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y} + \omega, \gamma\overline{x} + \delta\overline{y} + \eta) + \\ +\alpha \cdot Q(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y} + \omega, \gamma\overline{x} + \delta\overline{y} + \eta),$$

$$d\tau = dt / \Delta.$$

Рассуждения проведем для случая $m \in \boldsymbol{R}$. Пусть ℓ — инвариантная прямая системы (4), тогда имеет место равенство:

$$\frac{Q(x, mx+n)}{P(x, mx+n)} \equiv m\,. \qquad (10)$$

Из (9) и (10) следует, что

$$\left(\frac{\tilde{Q}(\bar{x}, \bar{y})}{\tilde{P}(\bar{x}, \bar{y})}\right)_{(\bar{x},\bar{y})\in\bar{\ell}} = \frac{-\gamma+\alpha m}{\delta-\beta m} = \bar{m}\,. \qquad (11)$$

Легко видеть, что правая часть равенства (11) есть угловой коэффициент прямой $\bar{\ell}$, т.е. $\bar{\ell}$ — инвариантная прямая системы (9), в которую перешла система (4) в результате преобразования (8). Впрочем, из равенства (11) следует, что прямая ℓ переходит в изоклину нуля $\bar{y} = \dfrac{m\omega+n-\eta}{\delta-\beta m} = \bar{y}_0$ системы (9), т.е. $\tilde{Q}(\bar{x}, \bar{y}_0) \equiv 0$, если $\gamma = \alpha m$ и в изоклину бесконечности $\bar{x} = \dfrac{m\omega+n-\eta}{\gamma-\alpha m} = \bar{x}_0$, то есть $\tilde{P}(\bar{x}_0, \bar{y}) \equiv 0$, если $\delta = \beta m$.

Если $m=\infty$, то ℓ задается уравнением $x-\mu=0$, причем $P(\mu, y)\equiv 0$ и $\left(\dfrac{\tilde{Q}(\bar{x}, \bar{y})}{\tilde{P}(\bar{x}, \bar{y})}\right)_{(\bar{x},\bar{y})\in\bar{\ell}} = -\dfrac{\alpha}{\beta}$, если $\beta\neq 0$.

Правая часть последнего равенства и есть угловой коэффициент прямой $\bar{\ell}$: $\alpha\bar{x}+\beta\bar{y}+\omega-\mu=0$, т.е. $\bar{\ell}$ — инвариантная прямая системы (9). Если $\alpha=0$ $(\beta=0)$, то для системы (9) $\bar{\ell}$ — изоклина нуля (бесконечности). Если $\alpha\beta\neq 0$, то угловой коэффициент инвариантной прямой $\bar{\ell}$ формально можно найти как $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{-\gamma+\alpha m}{\delta-\beta m}$. Тем самым доказано, что аффинное преобразование, примененное к системе (4), имеющей инвариантную прямую ℓ, переводит (4) в систему, для которой $\bar{\ell}$ — образ прямой ℓ непременно является инвариантной прямой.

Отметим, что точка пересечения двух инвариантных прямых системы (4) является ее особой точкой.

Пусть ℓ_1: $a_1x+b_1y+c_1=0$ и ℓ_2: $a_2x+b_2y+c_2=0$ — две инвариантные прямые системы (4), пересекающиеся в точке $M_0(x_0, y_0)$. Из системы

$$\begin{cases} a_1P(x,y)+b_1Q(x,y) \equiv (a_1x+b_1y+c_1)R_1(x,y), \\ a_2P(x,y)+b_2Q(x,y) \equiv (a_2x+b_2y+c_2)R_2(x,y) \end{cases}$$

следует система

$$\begin{cases} a_1P(x_0,y_0)+b_1Q(x_0,y_0)=0, \\ a_2P(x_0,y_0)+b_2Q(x_0,y_0)=0. \end{cases}$$

Так как $\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то из последней системы получаем равенства $P(x_0, y_0)=0$, $Q(x_0, y_0)=0$, т.е. по определению $M_0(x_0, y_0)$ — особая точка системы (4).

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть система (1) имеет инвариантные прямые шести различных направлений. Обозначим через Ω множество этих прямых и покажем, что во множестве Ω нет параллельных прямых.

Лемма 1. Множество Ω содержит ровно шесть прямых.

Доказательство. Как показано выше, через особую точку системы (1) проходит не более четырех инвариантных прямых.

Пусть Ω_A — множество, состоящее из четырех инвариантных прямых, пересекающихся в особой точке A системы (1), и ℓ — инвариантная прямая этой системы, причем $\ell\notin\Omega_A$. Тогда ℓ параллельна одной из прямых множества Ω_A. Отсюда следует, что система (1), обладающая действительными инвариантными прямыми не менее чем пяти различных направлений, не может иметь особую точку, в которой пересекаются более трех инвариантных прямых.

Рассмотрим множество Ω_0, состоящее из шести попарно пересекающихся инвариантных прямых системы (1). Пусть ω_1 — произвольная прямая из множества Ω_0. Учитывая, что на прямой ω_1 система (1) имеет не более трех особых точек и через особую точку, лежащую на ω_1, проходит не более трех инвариантных прямых, приходим к выводу: на прямой ω_1 система (1) имеет ровно три особые точки. Обозначим эти особые точки B, C, D. Через одну из них, например D, проходят две инвариантные прямые, а через каждую из точек B и C — три инвариантные прямые из множества Ω_0.

Покажем, что $\Omega=\Omega_0$. Допустим противное. Тогда существует прямая $\ell_1\in\Omega\setminus\Omega_0$, и значит ℓ_1 параллельна одной из прямых множества Ω_0. Не уменьшая общности, считаем, что ℓ_1 параллельна одной из инвариантных прямых, пересекающих прямую ω_1. Так как через каждую из особых точек B и C проходят три инвариантные прямые из множества Ω_0, то ℓ_1 пересекает прямую ω_1 в точке D. Следовательно, ℓ_1 параллельна одной из инвариантных прямых, проходящих через B или C. Ради определенности предположим, что $\ell_1 // \omega_2$, $C \in \omega_2$.

Введем обозначения: ω_3 — третья прямая из множества Ω_0, проходящая через особую точку C, ω_4 и ω_5 — инвариантные прямые, отличные от ω_1 и проходящие через особую точку B, $F = \omega_4 \cap \omega_2$, $G = \omega_5 \cap \omega_2$, $M = \omega_4 \cap \ell_1$, $N = \omega_5 \cap \ell_1$.

Очевидно, ω_3 пересекает прямую ℓ_1, причем в точке M или N (в противном случае на прямой ℓ_1 система (1) имеет четыре особые точки). Если ω_3 проходит через точку M, то ω_3 пересекает прямую ω_5 в точке, отличной от особых точек B, G, N. Если ω_3 пересекает ℓ_1 в точке N, то ω_3 пересекает прямую ω_4 в точке, отличной от особых точек B, F, M. Приходим к противоречию с тем, что на прямой система (1) имеет не более трех особых точек.

Из рассуждений, проведенных нами, следует, что они не зависят от конфигурации точек B, C, D. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 2. Множество Ω можно разбить на два непересекающихся подмножества $\Omega_1 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ и $\Omega_2 = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, где $\omega_1 \cap \omega_2 \cap \omega_3 \neq \emptyset$, $\omega_4 \cap \omega_5 \cap \omega_6 = \emptyset$.

Доказательство. В процессе доказательства предыдущей леммы установлено, что система (1) имеет особые точки, через каждую из которых проходят три инвариантные прямые из множества Ω. Для определенности положим, что $A = \omega_1 \cap \omega_2 \cap \omega_3$. Тогда остальные три инвариантные прямые $\omega_4, \omega_5, \omega_6$ не могут пересекаться в одной точке. В самом деле, если бы существовала такая особая точка $B \in \omega_4 \cap \omega_5 \cap \omega_6$, то любая прямая из множества Ω_1 (Ω_2) пересекала бы все три прямые из множества Ω_2 (Ω_1). Так как $A \notin \omega_i, i = 4,5,6$ ($B \notin \omega_j, j = 1,2,3$), то на каждой прямой множества Ω расположены четыре особые точки, что невозможно для кубической системы (1). Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть система (1) имеет ровно шесть инвариантных прямых различных направлений. Тогда эта система имеет семь и только семь особых точек, в том числе четыре особые точки, через каждую из которых проходят три инвариантные прямые, и три особые точки, через каждую из которых проходят две инвариантные прямые.

Доказательство. В силу леммы 2 множество Ω всех инвариантных прямых системы (1) можно разбить на два непересекающихся подмножества Ω_1 и Ω_2, где Ω_1 состоит из трех инвариантных прямых, инцидентных одной и той же особой точке системы (1), а Ω_2 состоит из трех инвариантных прямых, образующих треугольник.

Пусть $\Omega_1 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $\Omega_2 = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, $Q = \omega_1 \cap \omega_2 \cap \omega_3$, треугольник MNP образован прямыми из множества Ω_2. Так как $Q \notin \omega_i$, $i = 4,5,6$, то Q расположена либо внутри треугольника MNP, либо вне его. Рассмотрим случай, когда точка Q расположена внутри MNP (рис. 1).

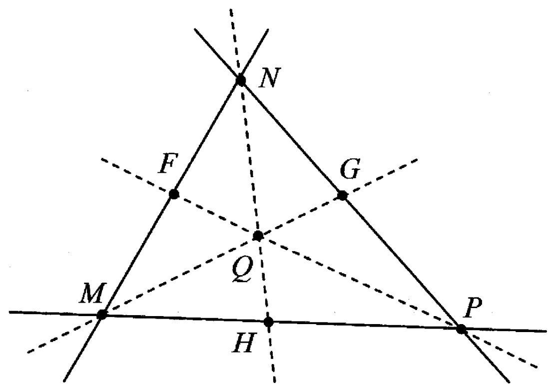

Рис. 1. Пример расположения точки Q внутри треугольника MNP

Каждая прямая ω_j, $j = 1,2,3$, непременно проходит через вершину треугольника MNP, так как в противном случае на такой прямой расположены четыре особые точки. Это противоречит свойству системы (1) иметь на прямой не более трех особых точек.

Таким образом, каждой из точек M, N, P, Q инцидентны три инвариантные прямые, а через остальные особые точки F, G, H проходят ровно по две инвариантные прямые.

К такому же выводу приходим и в случае, когда точка Q расположена вне треугольника MNP (рис. 2), то есть точка Q принадлежит либо трапециевидной области, примыкающей к стороне треугольника MNP, либо одной из треугольных областей. Теорема доказана.

Примечание. На рисунках 1 и 2 сплошными линиями изображены прямые множества $\mathbf{\Omega}_2$, а пунктирными — прямые множества $\mathbf{\Omega}_1$. В случае, когда особая точка Q расположена внутри одной из четырех треугольных областей, ограниченных прямыми *MN*, *MP*, *NP* (вне треугольных областей), особые точки *M*, *N*, *P*, *Q* образуют невыпуклый (выпуклый) четырехугольник.

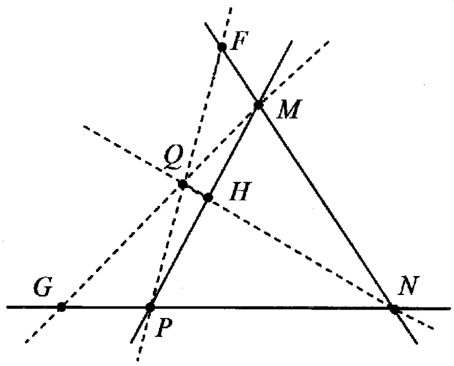

Рис. 2. Пример расположения точки Q в трапециевидной области

Теорема 2. Если система (1) имеет действительные инвариантные прямые шести различных направлений, то эта система может быть записана в виде одной из двух систем:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x[k(y - k_1x - b_1)(y - k_2x - b_1) - \\ \qquad - (k_2 - k_1)y(y - kx)], \\ \dfrac{dy}{dt} = y[k(y - k_1x - b_1)(y - k_2x - b_1) - \\ \qquad - (k_2 - k_1)(y - kx)(y - b_1)], \end{cases} \tag{12}$$

где $k_2 > k > 0$, $k_1 < 0$, $b_1 > 0$, $k_3 = kk_1 / (k_1 - k_2 + k)$, $b_3 = b_1k / (k_1 - k_2 + k)$, а инвариантными являются прямые: $x = 0$, $y = 0$, $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_1$, $y = kx$, $y = k_3x + b_3$;

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y - k_3x - b_3)(k_1k_3x^2 - y^2 + k_3b_1x + b_1y) - \\ \qquad - (y - k_4x - b_3)(k_2k_4x^2 - y^2 + k_4b_1x + b_1y), \\ \dfrac{dy}{dt} = k_4(y - k_3x - b_3)(k_1k_3x^2 - y^2 + k_3b_1x + b_1y) - \\ \qquad - k_3(y - k_4x - b_3)(k_2k_4x^2 - y^2 + k_4b_1x + b_1y), \end{cases} \tag{13}$$

где $b_1 > 0$, $b_3 = b_1k_3 / k_2$, $k_4 = k_1k_3 / k_2$, $k_1 < k_3 < 0$, $k_2 > 0$, $k_2^2 > k_1k_3$, а инвариантными являются прямые: $x = 0$, $y = 0$, $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_1$, $y = k_3x + b_3$, $y = k_4x + b_3$.

В справедливости теоремы можно убедиться следующим образом. Для случая, когда особые точки Q, M, N, P образуют невыпуклый четырехугольник реализуем следующий алгоритм:

1. Переносим начало координат в особую точку Q (см. рис. 1).

2. Осуществляем аффинное преобразование $x = \alpha\overline{x} + \beta\overline{y}$, $y = \gamma\overline{x} + \delta\overline{y}$ и замену времени $\tau = t / (\alpha\delta - \beta\gamma)$, переводящие прямые QN и QP в прямые $\overline{x} = 0$ и $\overline{y} = 0$ соответственно, а систему (1) в систему:

$$\frac{d\overline{x}}{d\tau} = \overline{x}P_2(\overline{x}, \overline{y}), \ \frac{d\overline{y}}{d\tau} = \overline{y}Q_2(\overline{x}, \overline{y}), \tag{14}$$

где $P_2(\overline{x}, \overline{y})$, $Q_2(\overline{x}, \overline{y})$ — многочлены второй степени.

3. Учитывая, что прямые: $MN: \overline{y} = k_2\overline{x} + b_1$, $NP: \overline{y} = k_1\overline{x} + b_1$, $MG: \overline{y} = k\overline{x}$, $MP: \overline{y} = k_3\overline{x} + b_3$ являются инвариантными для системы (14), записываем (14) в виде (12) с соответствующими ограничениями на коэффициенты.

Алгоритм, с помощью которого система (1) приводится к системе (13), в случае, когда особые точки M, N, P, Q образуют выпуклый четырехугольник:

1. Переносим начало координат в особую точку H (см. рис. 2).

2. Второй шаг данного алгоритма отличается от второго шага приведенного выше алгоритма только тем, что в прямые $\overline{x} = 0$, $\overline{y} = 0$ переводятся прямые HM и HN соответственно.

3. Учитывая, что прямые: $MN: \overline{y} = k_1\overline{x} + b_1$, $QM: \overline{y} = k_2\overline{x} + b_1$, $QP: \overline{y} = k_3\overline{x} + b_3$, $PN: \overline{y} = k_4\overline{x} + b_3$, являются инвариантными для системы (14), записываем (14) в виде системы (13) с соответствующими ограничениями на коэффициенты.

Теорема 3. Если система (1) имеет действительные инвариантные прямые шести различных направлений, то эта система не имеет бесконечно удаленных особых точек.

Доказательство. После тождественных преобразований правых частей уравнений системы (13) она примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x[-b_1b_3 - b_1(k_4 + k_3)x - k_1k_3x^2 + y^2] \\ \dfrac{dy}{dt} = y[b_1b_3 - (b_1 + b_3)y - k_1k_3x^2 + y^2]. \end{cases} \tag{15}$$

Применим к системе (15) преобразование Пуанкаре $x = 1/z$, $y = u/z$ [9]:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = b_1(k_4 + k_3)u - (b_1 + b_3)u^2 + 2b_1b_3uz, \\ \dfrac{dz}{dt} = k_1k_3 + b_1(k_4 + k_3)z - u^2 + b_1b_3z^2. \end{cases} \tag{16}$$

Если система (16) имеет особую точку, то ее координаты удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} z = 0, \\ b_1(k_4 + k_3)u - (b_1 + b_3)u^2 = 0, \\ k_1k_3 - u^2 = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Если $b_1 + b_3 = 0$, то очевидно, что система (17) не совместна, так как $k_1k_3 \neq 0$. Поэтому пусть $b_1 + b_3 \neq 0$ Тогда должно быть выполнено равенство $k_1k_3 - \left[\dfrac{b_1(k_4 + k_3)}{b_1 + b_3}\right]^2 = 0$. С учетом ограничений на коэффициенты системы (13) последнее равенство преобразуется к виду $\dfrac{(k_1 - k_3)(k_2 - k_1k_3)}{(k_3 + k_2)^2} = 0.$ Но это равенство невыполнимо в силу условий: $k_1 < k_3 < 0$, $k_2 > k_1k_3$.

Воспользовавшись вторым преобразованием Пуанкаре $x = \upsilon/z$, $y = 1/z$ [9], системе (15) придадим вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\upsilon}{dt} = (b_1 + b_3)\upsilon - b_1(k_4 + k_3)\upsilon^2 - 2b_1b_3\upsilon z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -1 + (b_1 + b_3)z + k_1k_3\upsilon^2 - b_1b_3z^2. \end{cases} \tag{18}$$

Так как $\upsilon = 0$, $z = 0$ не является особой точкой системы (18), то согласно [9] все бесконечно удаленные особые точки системы (13) определяются с помощью первого преобразования Пуанкаре, а именно удовлетворяют системе (17). Тем самым доказано отсутствие бесконечно удаленных особых точек системы (13). Покажем, что и система (12) не имеет особых точек на экваторе сферы Пуанкаре. Для этого применим к системе (12) преобразование Пуанкаре $x = 1/z$, $y = u/z$:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = b_1(k_1 - k_2)u(k - u), \\ \dfrac{dz}{dt} = -k_1k_2k + 2kk_1u + (kk_1b_1 - kk_2)z - \\ \qquad - (k_1 + k - k_2)u^2 + 2kb_1uz - kb_1^2z^2. \end{cases} \tag{19}$$

Так как $kk_1k_2 \neq 0$, то $z = 0$, $u = 0$ — не особая точка системы (19). Но и точка $z = 0$, $u = k$ также не является особой точкой системы (19). Действительно, полагая, что $z = 0$, $u = k$ — особая точка системы (19), по необходимости получаем равенство $(k_1 - k_2)(k_1 - k) = 0$, которое невыполнимо в силу ограничений на коэффициенты системы (12). Применяя к системе (12) второе преобразование Пуанкаре, нетрудно убедиться в том, что $\upsilon = z = 0$ («концы оси y») не является особой точкой системы (12) на экваторе сферы Пуанкаре. Теорема доказана.

Следует заметить, что экватор сферы Пуанкаре не состоит из траекторий систем (12) и (13). Для сравнения отметим, что в статье [11] изучаются бесконечно удаленные особые точки системы (1) в случае, когда экватор сферы Пуанкаре состоит из траекторий кубической системы.

Теорема 4. Если система (1) имеет действительные инвариантные прямые шести различных направлений, то среди её семи особых точек четыре являются дикритическими узлами, а три — простыми седлами.

Доказательство. Нетрудно показать, что при выполнении условий теоремы любая из семи особых точек системы (1) является простой. Следовательно, индекс Пуанкаре [9] каждой из них равен 1 или —1. Поскольку все особые точки системы расположены на инвариантных прямых, то исключаются случаи фокуса и центра. Те четыре особые точки, через которые проходят три инвариантные прямые (см. теорему 1) не могут быть седлами. Они не могут быть также обычными узлами (с различными действительными корнями характеристического уравнения), так как каждая траектория, входящая в особую точку типа «обычный узел», касается в этой точке одной из двух пересекающихся в узле прямых [9]. Учитывая, что сумма индексов Пуанкаре всех особых точек системы (1) равна 1 [12], приходим к выводу, что остальные три особые точки являются седлами. Теорема доказана.

Можно также доказать следующее

Утверждение. Пусть система (1) имеет инвариантные прямые шести различных направлений, причем M, N, P, Q — особые точки типа «дикритический узел». Если четырехугольник $MNPQ$ выпуклый, то две его противоположные вершины суть устойчивые узлы, а две другие — неустойчивые узлы. Если четырехугольник $MNPQ$ невыпуклый, причем

$Q \equiv (0;0)$, то начало координат (0,0) — устойчивый (неустойчивый) дикритический узел, а точки M, N, P — неустойчивые (устойчивые) дикритические узлы.

Данное утверждение является, в некотором смысле, аналогом хорошо известной теоремы А. Н. Берлинского [13] о распределении особых точек квадратичной системы.

Очевидно, система (1) при наличии действительных инвариантных прямых шести различных направлений не имеет изолированных периодических решений. Впрочем, это следует также из результатов работы [14].

Следуя работам [7, 8], можно убедиться в том, что общий интеграл в форме Дарбу систем (12) и (13) записывается в виде

$$\frac{y\left(y-k_2x-b_1\right)}{\left(y-k_1x-b_1\right)\left(y-kx\right)}=C \tag{20}$$

и

$$\frac{\left(y-k_2x-b_1\right)\left(y-k_4x-b_3\right)}{\left(y-k_1x-b_1\right)\left(y-k_3x-b_3\right)}=C, \tag{21}$$

соответственно. При этом в (20) инвариантным прямым $x=0$ и $y=k_3x+b_3$ соответствует значение $C=1$. Аналогично, инвариантным прямым $x=0$ и $y=0$ в (21) соответствует значение $C=1$.

В заключение приведем примеры систем (1), имеющих шесть действительных инвариантных прямых попарно различных направлений.

Пример 1.

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x\Big[\left(y+x-2\right)\left(y-2x-2\right)-3y\left(y-x\right)\Big],\\ \dfrac{dy}{dt}=y\Big[\left(y+x-2\right)\left(y-2x-2\right)-3\left(y-x\right)\left(y-2\right)\Big].\end{cases}$$

Данная система имеет инвариантные прямые: $x=0, y=0$, $y=-x+2$, $y=2x+2$, $y=x$, $y=(1/2)x-1$ и является примером системы (12). На рис. 3 изображен фазовый портрет системы.

Пример 2.

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\left(y+x+1\right)\left(4x^2-y^2-8x+8y\right)-\\ \qquad -\left(y-\dfrac{1}{2}x+1\right)\left(4x^2-y^2+4x+8y\right),\\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{2}\left(y+x+1\right)\left(4x^2-y^2-8x+8y\right)+\\ \qquad +\left(y-\dfrac{1}{2}x+1\right)\left(4x^2-y^2+4x+8y\right).\end{cases}$$

Это система вида (13), и она имеет шесть инвариантных прямых: $x=0$, $y=0$, $y=-x-1$, $y=(1/2)x-1$, $y=-4x+8$, $y=8x+8$. На рис. 4 изображен фазовый портрет данной системы.

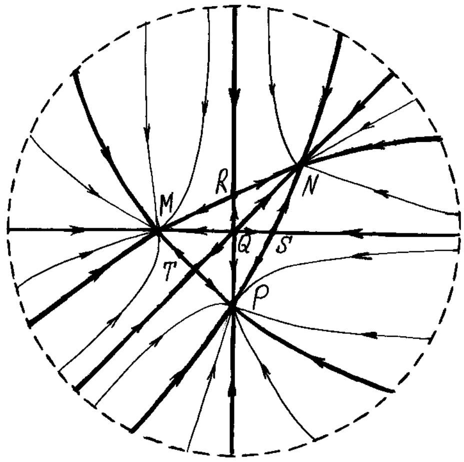

Рис. 3. Фазовый портрет динамической системы, у которой особые точки $MNPQ$ образуют невыпуклый четырехугольник

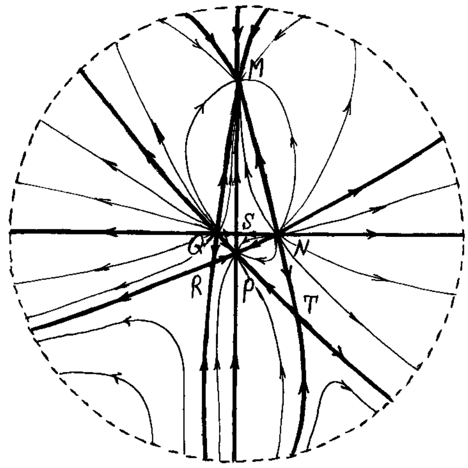

Рис. 4. Фазовый портрет динамической системы, у которой особые точки $MNPQ$ образуют выпуклый четырехугольник

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Установлено, что кубическая дифференциальная система (1), имеющая инвариантные прямые шести различных направлений, может быть приведена к системе специального вида, что существенно облегчает ее качественное исследование в целом. Кроме этого показано, что такая система интегрируется в форме Дарбу и полностью решен вопрос о поведении траекторий кубической системы на всей фазовой плоскости.

Вопрос о максимальном числе инвариантных прямых полиномиальных дифференциальных систем на плоскости с многочленами произвольной степени n, $n \in \boldsymbol{N}$ в правых частях остается нерешенным до сих пор. Поэтому в контексте этой проблемы определенный интерес представляет изучение вопроса о числе различных направлений инвариантных прямых полиномиальной дифференциальной системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Любимова Р. А.* Об одном дифференциальном уравнении с интегральными прямыми / Р. А. Любимова // Дифференциальные и интегральные уравнения. Межвуз. сборник: Горький, 1977. — С. 19—22.

2. *Любимова Р. А.* Об одном дифференциальном уравнении с интегральными прямыми / Р. А. Любимова // Дифференциальные и интегральные уравнения. Межвуз. сборник: Горький, 1984. — С. 66-69.

3. *Xiang Zhang, Yanqian Ye.* On the number of invariant lines for polynomial systems // Proceeding of the AMS. — 1998. — Vol. 126. — No 8. — P. 2249—2265. (URL: http://www.ams.org/proc/)

4. *Putuntica V. M.* The cubic differential system with real invariant straight lines along six directions // Материалы международной конференции, посвященной столетию Н. Н. Боголюбова и 70-летию Н. И. Нагнибиды. Черновцы: Изд-во Черновицкого гос. ун-та, 2009. — С. 245—247.

5. *Ушхо А. Д.* Оценка числа различных направлений действительных инвариантных прямых кубичной дифференциальной системы на плоскости / В. Б. Тлячев, А. Д. Ушхо, Д. С. Ушхо/ Труды Физического общества Республики Адыгея. — 2009. — № 14. — С. 1—4. (URL: http://fora.adygnet.ru)

6. *Artes Joan C., Grunbaum B., Llibre J.* On the number of invariant straight lines for polynomial differential systems // Pacific journal of mathematics. — 1998. — Vol. 184. — No. 2. — P. 207—230.

7. *Дружкова Т. А.* Алгебраические дифференциальные уравнения с алгебраическими интегралами. Методическое пособие. Часть первая / Т. А. Дружкова. — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2005. — 37 с.

8. *Амелькин В. В.* Нелинейные колебания в системах второго порядка / В. В. Амелькин, Н. А. Лукашевич, А. П. Садовский. — Минск: Изд-во БГУ, 1982. — 208 с.

9. *Андронов А. А.* Качественная теория динамических систем второго порядка / А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер. — М.: Наука, 1966. — 568 с.

10. *Смогоржевский А. С.* Справочник по теории кривых третьего порядка / А. С. Смогоржевский, Е. С. Столова. — М.: Физматгиз, 1961. — 263 с.

11. *Шарипов Ш. Р.* О распределении особых точек на экваторе сферы Пуанкаре / Ш. Р. Шарипов // Труды Самаркандского госуниверситета имени Алишера Навои. — 1964. — Вып. 144. — С. 88—92.

12. *Баутин Н. Н.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович. — М.: Наука, 1976. — 496 с.

13. *Берлинский А. Н.* О поведении интегральных кривых одного дифференциального уравнения / А. Н. Берлинский // Известия высших учебных заведений. Сер. Математика. — 1960. — № 2(15). — С. 3—18.

14. *Горбузов В. Н.* Частные интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений / В. Н. Горбузов, В. Ю. Тыщенко // Математический сборник, 1992. — Т. 183, № 3. — С. 76—94.

Ушхо А. Д., старший преподаватель кафедры теоретической физики физического факультета Адыгейского государственного университета

Тел. (8772) 593908

E-mail: uschho76@rambler.ru

Ushkho A. D., the higher teacher of theoretical physics department of Adyghea State University

Tel. +7(8772) 593908

E-mail: uschho76@mail.ru