УДК 517.955

О НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ*

Г. Г. Петросян

Воронежский государственный педагогический университет

Поступила в редакцию 26.03.2012 г.

Аннотация: в настоящей работе доказывается теорема о существовании решения для функционально-дифференциального уравнения с дробной производной и нелокальным начальным условием в банаховом пространстве.
Ключевые слова: дробная производная, функционально-дифференциальное уравнение, задача Коши, мера некомпактности, неповижная точка, уплотняющее отображение.

Abstract: in this paper we prove the existence of solutions for functional differential equations with fractional derivative and nonlocal initial condition in Banach space.
Key words: Fractional derivative, functional differential equation, Cauchy problem, measure of noncompactness, fixed point, condensing map.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе доказывается теорема о существовании решения для функционально-дифференциального уравнения с дробной производной и нелокальным начальным условием в банаховом пространстве.

Задачи теории дифференциальных уравнений и включений с дробной производной в настоящее время привлекают внимание многих исследователей, они находят применения в физике, инженерии, биологии и других областях знаний (см. [6, 7]).

Полученная в работе теорема существования опирается на теорию уплотняющих отображений (см. например [1, 4]) и развивает результат работы [5].

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть E — банахово пространство. Напомним некоторые понятия, которые будут использоваться в дальнейшем.

Определение 1 (см. например [7]). *Дробной первообразной Римана—Лиувилля* порядка $\alpha \in (0,1)$ от непрерывной функции $g:[0,d]\to E$, называется функция $I_{\alpha}^{0} g$ следующего вида:

$$I_0^{\alpha} g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s)\,ds,$$

где Γ — гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Определение 2. *Дробной производной Римана— Лиувилля* порядка $\alpha \in (0,1)$ от непрерывной функции $g:[0,d]\to E$, называется функция $D_0^{\alpha} g$ следующего вида:

$$D_0^{\alpha} g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} g(s)\,ds.$$

Определение 3 (см. например [1, 4]). Пусть E банахово пространство и $(\mathcal{A},\geqslant)$ — некоторое частично упорядоченное множество, $Pb(E)$ — совокупность всех непустых ограниченных подмножеств E. Функция $\beta : Pb(E) \to \mathcal{A}$ называется *мерой некомпактности* в E, если для любого $\Omega \in Pb(E)$ выполняется:

$$\beta(\overline{\mathrm{co}}\,\Omega) = \beta(\Omega),$$

где $\overline{\mathrm{co}}\,\Omega$ обозначает замыкание выпуклой оболочки Ω.

Мера некомпактности β называется:

1) *Монотонной*, если для любых $\Omega_0, \Omega_1 \in \mathrm{Pb}(E)$, из $\Omega_0 \subseteq \Omega_1$ следует, что $\beta(\Omega_0) \leqslant \beta(\Omega_1)$.

2) *Несингулярной*, если для любого $a \in E$ и любого $\Omega \in \mathrm{Pb}(E)$ выполнено $\beta(\{a\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$.

3) *Инвариантной относительно добавления компактного множества*, если для любого компактного множества $K \subset E$ и любого

* Работа поддержана грантом РФФИ 11-01-00328.

$\Omega \in \mathrm{Pb}(E)$, $\beta(\{K\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$.

Если $\mathcal{A}$ — конус в банаховом пространстве, то β называется:

4) *Алгебраически полуаддитивной*, если для любых $\Omega_0, \Omega_1 \in \mathrm{Pb}(E), \beta(\Omega_0 + \Omega_1) \leqslant \beta(\Omega_0) + \beta(\Omega_1)$.

5) *Правильной*, если для любого относительно компактного множества $\Omega \in \mathrm{Pb}(E), \beta(\Omega) = 0$.

6) *Вещественной*, если $\mathcal{A}$ — множество вещественных чисел $\mathbb{R}$, с естественным упорядочением.

Примером вещественной меры некомпактности, обладающей всеми выше перечисленными свойствами, является мера некомпактности Хаусдорфа $\chi(\Omega)$:

$$\chi(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0, \text{ при которых } \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon\text{-сеть в } E\}.$$

Отметим, что мера некомпактности Хаусдорфа удовлетворяет условию полуоднородности, т. е.:

$$\chi(\lambda\Omega) = |\lambda|\,\chi(\Omega),$$

для любого $\lambda \in R$, и любого $\Omega \in \mathrm{Pb}(E)$.

Нам понадобятся следующие примеры мер некомпактности в пространстве $C([a,b];E)$ всех непрерывных функций на отрезке $[a,b]$ со значениями в E:

(1) модуль послойной некомпактности

$$\varphi(\Omega) = \sup_{t\in[a,b]} \chi(\Omega(t))$$

где χ — Хаусдорфова мера некомпактности в E и $\Omega(t) = \{x(t), x \in \Omega\}$,

(2) модуль равностепенной непрерывности

$$\mathrm{mod}_C(\Omega) = \lim_{\delta\to 0} \sup_{x\in\Omega} \max_{|t_1-t_2|\leq\delta} \left\|x(t_1) - x(t_2)\right\|.$$

Пусть $L : E \to E$ — ограниченный линейный оператор, тогда χ-норма L определяется как

$$\left\|L\right\|^{(\chi)} = \chi(L(B)),$$

где $B \subset E$ — единичный шар E, нетрудно видеть, что $\left\|L\right\|^{(\chi)} \leqslant \left\|L\right\|$.

Пусть $G : [0,d] \to \mathrm{Pb}(E)$ — многозначная функция (мультифункция) (см. [2]), она называется:

(i) *интегрируемой*, если она допускает интегрируемое по Бохнеру сечение $g(t) \in G(t)$, п. в. $t \in [0,d]$.

(ii) *интегрально ограниченной*, если существует функция $\sigma \in L^1_+[0,d]$, такая что

$$\left\|G(t)\right\| := \sup\{\left\|q\right\|, q \in G(t)\} \leqslant \sigma(t),$$

п. в. $t \in [0,d]$.

Пусть G интегрируема и S_G — множество всех интегрируемых сечений G, тогда для любого $t \in [0,d]$, интеграл от мультифункции G определяется следующим образом

$$\int_0^t G(s)ds = \left\{\int_0^t q(s)ds; q \in S_G\right\}.$$

Теорема 1 (см. [4], теорема 4.2.3). *Пусть E — сепарабельное банахово пространство, $G : [0,d] \to \mathrm{Pb}(E)$ — интегрируемая и интегрально ограниченная мультифункция и пусть*

$$\chi(G(t)) \leqslant r(t)$$

выполняется п. в. $t \in [0,d]$, где $r \in L^1_+[0,d]$. Тогда

$$\chi\left(\int_0^t G(s)\,ds\right) \leqslant \int_0^t r(s)\,ds, \forall t \in [0,d].$$

Определение 4. Пусть E — банахово пространство и β — монотонная несингулярная мера некомпактности в E, тогда непрерывное отображение $F : X \subseteq E \to E$ называется уплотняющим относительно меры некомпактности β (β-уплотняющим), если для любого ограниченного множества $\Omega \subseteq X$, не являющегося относительно компактным множеством, выполнено:

$$\beta(F(\Omega)) \ngeqslant \beta(\Omega).$$

Мы будем использовать следующую теорему о неподвижной точке типа Б. Н. Садовского (см. например [1]).

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{M}$ — ограниченное замкнутое выпуклое подмножество E, и пусть $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ — непрерывное β-уплотняющее отображение. Тогда множество неподвижных точек F: $\mathrm{Fix}F = \{x : x = F(x)\}$ — есть непустое компактное множество.*

Теорема 3 (см., например [4]). *Пусть $\mathcal{U} \subset E$ — ограниченная открытая окрестность нуля и $F : \mathcal{U} \to E$ — непрерывное β-уплотняющее отображение, удовлетворяющее граничному условию $x \neq \lambda F(x)$, для любого $x \in \partial\mathcal{U}$, $0 < \lambda \leqslant 1$. Тогда множество $\mathrm{Fix}\,F$ непустое компактное множество.*

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ

Мы будем рассматривать существование решения для полулинейного функционально-дифференциального уравнения с дробной производной в сепарабельном банаховом пространстве E следующего вида:

$$D^{\alpha}x(t) = Ax(t) + f(t, x(t), x_t), \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

с нелокальным начальным условием:

$$x(s) + g(x(s)) = \vartheta(s), \quad s \in [-h, 0] \quad (2)$$

где $D^{\alpha}, 0 < \alpha < 1,$ — дробная производная Римана—Лиувилля, $g: E \to E$ и $\vartheta : [-h, 0] \to E$ — заданные функции, $x_t \in C([-h, 0]; E), h > 0,$ x_t определено как $x_t(\theta) = x(t + \theta), -h < \theta \leqslant 0.$

Предполагаются выполненными следующие условия.

(A) $A: D(A) \subset E \to E$ — линейный замкнутый оператор в E, порождающий сильно непрерывную полугруппу e^{At}, где $t \geqslant 0$.

$f: [0, T] \times E \times C([-h, 0]; E) \to E$ — нелинейное отображение, удовлетворяющее условиям:

(f_1) $f(\cdot, \varphi, \psi)$ — измеримая функция на $[0, T]$, для всех $(\varphi, \psi) \in E \times C([-h, 0]; E)$;

(f_2) $f(t, \cdot, \cdot)$ — непрерывная функция на $E \times C([-h, 0]; E)$, для п. в. $t \in [0, T]$;

(f_3) условие подлинейного роста:

$$\left\|f(t, x, \psi)\right\| \leq \eta(t)(1 + \left\|x\right\|_E + \left\|\psi\right\|_C), \text{п. в.} \quad t \in [0, T],$$

где $\eta : [0, T] \to \mathbb{R}_+$ — суммируемая функция, $\mathcal{C} = C([-h, 0], E)$.

(f_4) условие регулярности: существует суммируемая функция $k: [0, T] \to \mathbb{R}_+$, такая что для любого непустого ограниченного множества $Q \subset E$ и для любого непустого ограниченного множества $\Omega \subset C([-h, 0]; E)$ выполненно

$$\chi(f(t, Q, \Omega)) \leqslant k(t)(\chi(Q) + \varphi(\Omega)),$$

где $\varphi(\Omega)$ — модуль послойной некомпактности в пространстве $\mathcal{C}$.

(g_1) $g: C([-h, T]; E) \to C([-h, 0]; \overline{D(A)})$ — непрерывное отображение, преобразующее ограниченное множество в ограниченное.

(g_2) существует суммируемая функция $l: [-h, 0] \to \mathbb{R}_+$, такая что:

$$\chi(g(D(t)) \leqslant l(t)\chi(D(t)),$$

для любого $t \in [-h, 0]$, и для любого ограниченного множества $D \subset C([-h, 0]; E)$.

(g_3) для любого ограниченного множества $D \subset C([-h, T]; E)$, $\{g(\psi(\cdot)); \psi \in D\}$ — равностепенно непрерывное множество функций и семейство функций

$$\{e^{At}x, \quad x \in g(D(0))\}$$

также равностепенно непрерывно.

(g_4)

$$\lim_{\left\|x(t)\right\| \to \infty} \frac{\left\|g(x(t))\right\|}{\left\|x(t)\right\|} < 1.$$

(ϑ) $\vartheta \in C([-h, 0]; E)$ — заданная функция.

Определение 5. *Интегральным решением* задачи (1)—(2), мы будем называть функцию $x \in C([-h, T]; E)$ вида:

$$x(t) = \begin{cases} \vartheta(t) - g(x(t)), t \in [-h, 0]; \\ e^{At}(\vartheta(0) - g(x(0)) + \\ + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{A(t-s)} f(s, x(t), x_s) ds, t \in [0, T]. \end{cases}$$

В пространстве $C([-h, T]; E)$ рассмотрим следующий оператор

$$F: C([-h, T]; E) \to C([-h, T]; E)$$

вида:

$$F(x)(t) =$$

$$= \begin{cases} \vartheta(t) - g(x(t)), t \in [-h, 0]; \\ e^{At}(\vartheta(0) - g(x(0)) + \\ + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{A(t-s)} f(s, x(t), x_s)\, ds, t \in [0, T]. \end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что неподвижные точки этого оператора совпадают с решениями задачи (1)—(2). Рассмотрим основные свойства оператора F.

Теорема 4. *Оператор F преобразует каждое ограниченное множество в равностепенно непрерывное.*

Доказательство. Пусть $\Omega \subset C([-h, T]; E)$ — непустое ограниченное множество. Для $t \in [-h, 0]$ предложение очевидно в силу свойства (g_3).

Для $x \in \Omega$, $t \in [0, T]$ $F(x)(t)$ представляет из себя сумму:

$$F(x)(t) = F_1(x)(t) + F_2(x)(t),$$

где

$$F_1(x)(t) = e^{At}(\vartheta(0) - g(x(0))),$$

а

$$F_2(x)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{A(t-s)} f(s, x(t), x_s) ds.$$

Множество функций $\{F_1(x)(\cdot), x \in \Omega\}$ равностепенно непрерывно по свойству (g_3). Рассмотрим оператор $F_2(x)$. Заметим, что из условия (A) следует, что существует константа $C \geqslant 1$, такая что $\left\|e^{At}\right\|_{L(E)} \leqslant C$, для любого $t \in [0, T]$. Возьмем $t_1, t_2 \in [0, T]$, такие что $0 < t_1 < t_2 \leqslant T$

и $\varepsilon > 0$, причем $\varepsilon < t_1$. Тогда имеем

$$\left\|F_2(x)(t_2) - F_2(x)(t_1)\right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\|\int_0^{t_2}(t_2 - s)^{\alpha-1}e^{A(t_2-s)}f(s,x(s),x_s)\,ds -\right.$$

$$\left.-\int_0^{t_1}(t_1 - s)^{\alpha-1}e^{A(t_1-s)}f(s,x(s),x_s)\,ds\right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\|\int_0^{t_1-\varepsilon}[(t_2 - s)^{\alpha-1}e^{A(t_2-s)} - (t_1 - s)^{\alpha-1}e^{A(t_1-s)}]\times\right.$$

$$\left.\times f(s,x(s),x_s)ds\right\|_E +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\|\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1}[(t_2 - s)^{\alpha-1}e^{A(t_2-s)} - (t_1 - s)^{\alpha-1}e^{A(t_1-s)}]\times\right.$$

$$\left.\times f(s,x(s),x_s)\,ds\right\|_E +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\|\int_{t_1}^{t_2}(t_2 - s)^{\alpha-1}e^{A(t_2-s)}f(s,x(s),x_s)\,ds\right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\|\int_0^{t_1-\varepsilon}[(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}]e^{A(t_1-s)}\times\right.$$

$$\left.\times f(s,x(s),x_s)\,ds\right\|_E +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\|\int_0^{t_1-\varepsilon}(t_2 - s)^{\alpha-1}e^{A(t_1-\varepsilon-s)}[e^{A(t_2-t_1+\varepsilon)} - e^{A\varepsilon}]\times\right.$$

$$\left.\times f(s,x(s),x_s)\,ds\right\|_E +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\|\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1}[(t_2 - s)^{\alpha-1}e^{A(t_2-s)} - (t_1 - s)^{\alpha-1}e^{A(t_1-s)}]\times\right.$$

$$\left.\times f(s,x(s),x_s)\,ds\right\|_E +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\|\int_{t_1}^{t_2}(t_2 - s)^{\alpha-1}e^{A(t_2-s)}f(s,x(s),x_s)\,ds\right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{\Gamma(\alpha)}\eta(t)(1 + \|x\| + \|x_s\|)\times$$

$$\times\left(\int_0^{t_1-\varepsilon}[(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}]\,ds +\right.$$

$$+\left\|e^{A(t_2-t_1+\varepsilon)} - e^{A\varepsilon}\right\|_{L(E)}\int_0^{t_1-\varepsilon}(t_2 - s)^{\alpha-1}\,ds +$$

$$+\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1}(t_2 - s)^{\alpha-1}\,ds + \int_{t_1-\varepsilon}^{t_1}(t_1 - s)^{\alpha-1}\,ds +$$

$$\left.+\int_{t_1}^{t_2}(t_2 - s)^{\alpha-1}\,ds)\right).$$

Из получившегося выражения, в силу малости ε, видно, что множество $F_2(\Omega)$ равностепенно непрерывно. Значит и множество $F(\Omega)$ равностепенно непрерывно. Теорема доказана.

Введем в пространстве $C([-h,T];E)$ меру некомпактности ν со значениями в конусе $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$:

$$\nu(\Omega) = (\varphi(\Omega), \mathrm{mod}_C(\Omega)),$$

где $\varphi(\Omega)$ — модуль послойной некомпактности Ω, , $\mathrm{mod}_C(\Omega)$ — модуль равностепенной непрерывности Ω.

Пусть

$$\tilde{k} = \max_{t\in[0,T]} k(t),$$

где $k(\cdot)$ — функция, заданная в условии (f_4),

$$\tilde{l} = \max_{t\in[-h,0]} l(t),$$

где $l(\cdot)$ — функция, заданная в условии (g_2) и $C^{(\chi)} \geqslant 0$ — константа, такая что выполняется: $\left\|e^{At}\right\|^{\chi} \leqslant C^{(\chi)} \leqslant C$.

Теорема 5. *Для того чтобы оператор F был уплотняющим относительно меры некомпактности ν, достаточно чтобы*

$$m := \max\left\{\tilde{l}, \left(\tilde{l} + \frac{2T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\tilde{k}\right)C^{(\chi)}\right\} < 1. \quad (3)$$

Доказательство. Пусть $\Omega \subset C([-h,T];E)$ — непустое ограниченное множество и

$$\nu(F(\Omega)) \geqslant \nu(\Omega), \quad (4)$$

покажем, что Ω — относительно компактное множество.

Если $t \in [-h,0]$, то

$$\chi(F(\Omega)(t)) \leqslant \chi(g(x(t)),$$
$$x \in \tilde{\Omega}) \leqslant l(t)\varphi(\tilde{\Omega}) \leqslant \tilde{l}\,\varphi(\tilde{\Omega}) \leqslant m\varphi(\Omega),$$

где $\tilde{\Omega} = \Omega\,|_{[-h,0]}$.

Пусть теперь $t \in [0,T]$, и пусть $\Omega_t = \{x_t; x \in \Omega\}$. Рассмотрим многозначную функцию $s \in [0,T] \multimap G(s) \subset E$,

$$G(s) = \{(t-s)^{\alpha-1}e^{A(t-s)}f(s,x(s),x_s), x \in \Omega\}.$$

Она интегрально ограничена функцией:

$$s \to (t-s)^{\alpha-1}C\eta(t)(1 + \|x\| + \|x_s\|), x_s \in \Omega_s.$$

Оценим $\chi(G(s))$:

$$\chi(G(s)) \leqslant$$
$$\leqslant (t-s)^{\alpha-1}\left\|e^{A(t-s)}\right\|^{(\chi)}\chi(\{f(s,x(s),x_s), x \in \Omega\}) \leqslant$$
$$\leqslant (t-s)^{\alpha-1}C^{(\chi)}\chi(\{f(s,\Omega(s),\Omega_s)\}) \leqslant$$
$$\leqslant (t-s)^{\alpha-1}C^{(\chi)}k(s)(\chi(\Omega(s)) + \varphi(\Omega_s)) \leqslant$$
$$\leqslant 2(t-s)^{\alpha-1}C^{(\chi)}\tilde{k}\varphi(\Omega).$$

Оценим $\chi(\{F_1(x)(t), x \in \Omega\}),\ \ t \in [0,T]$.

$$\chi(\{F_1(\Omega)(t)\}) \leqslant \left\|e^{At}\right\|^{(\chi)} \chi(\{g(x(0))\}) \leqslant$$
$$\leqslant C^{(\chi)} l(t)\varphi(\{x(0)\}) \leqslant C^{(\chi)} \tilde{l}\,\varphi(\Omega).$$

Оценим теперь $\chi(F(\Omega)(t))$:

$$\chi(F(\Omega)(t)) \leqslant \chi(\{F_1(\Omega)(t)\}) + \chi(\{F_2(\Omega)(t)\}) \leqslant$$
$$\leqslant C^{(\chi)}\tilde{l}\,\varphi(\Omega) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\chi(\int_0^t G(s)ds) \leqslant$$
$$\leqslant C^{(\chi)}\tilde{l}\,\varphi(\Omega) + \frac{2}{\Gamma(\alpha)}C^{(\chi)}\tilde{k}\varphi(\Omega)\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds \leqslant$$
$$\leqslant C^{(\chi)}\tilde{l}\,\varphi(\Omega) + \frac{2}{\Gamma(\alpha)}C^{(\chi)}\tilde{k}\,\frac{t^\alpha}{\alpha}\,\varphi(\Omega) \leqslant$$
$$\leqslant C^{(\chi)}\tilde{l}\,\varphi(\Omega) + \frac{2T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}C^{(\chi)}\tilde{k}\varphi(\Omega) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\tilde{l} + \frac{2T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\tilde{k}\right)C^{(\chi)}\varphi(\Omega) \leqslant m\varphi(\Omega).$$

Таким образом, при всех $t \in [-h,T]$ получаем:

$$\chi(F(\Omega)(t)) \leqslant m\varphi(\Omega),$$

а следовательно,

$$\varphi(F(\Omega)) \leqslant m\varphi(\Omega). \tag{5}$$

Сравнивая (4) с (5) получаем, что $\varphi(\Omega) = 0$. Из теоремы 4 нам известно, что:

$$\mathrm{mod}_C(F(\Omega)) = 0,$$

значит $\nu(\Omega) = 0$, следовательно Ω — относительно компактное множество, а оператор F является уплотняющим относительно меры некомпактности ν. Теорема доказана.

Нам понадобится следующее утверждение, представляющее собой вариант леммы Гронуолла (см. [3]).

Лемма 1. Пусть $u, w : [0,b] \to [0,+\infty)$ непрерывные функции, причем $w(\cdot)$ неубывающая, и имеются константы a и $0 < \gamma < 1$, такие что выполнено

$$u(t) \leqslant w(t) + a\int_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^\gamma}\,ds,$$

тогда существует константа $q = q(\gamma)$, такая что $\forall t \in [0,b]$ выполняется

$$u(t) \leqslant w(t) + aq\int_0^t \frac{w(s)}{(t-s)^\gamma}\,ds.$$

Теорема 6. При выполнении условий (A), (ϑ), $(f_1)-(f_4)$, $(g_1)-(g_4)$, а также (3), множество Σ_ψ решений задачи (1)—(2) непустое и компактное подмножество пространства $C([-h,T];E)$.

Доказательство. Рассмотрим однопараметрическое семейство отображений $\Psi : [0,1]\times C([-h,T];E) \to C([-h,T];E)$

$$\Psi(\lambda, x) = \lambda F(x).$$

Докажем, что множество неподвижных точек семейства Ψ :

$$\mathrm{Fix}\Psi = \{x = \Psi(\lambda,x), \lambda \in (0,1]\},$$

априори ограничено.

Пусть $x \in \mathrm{Fix}\Psi$.

Если $t \in [-h,0]$, то

$$x(t) = \lambda(\vartheta(t) - g(x(t))). \tag{6}$$

Предположим, что совокупность функций $x(t),\quad t \in [-h,0]$, удовлетворяющих (6) неограничена, тогда существует последовательность $x_n(t_k)$, такая что $\left\|x_n(t_k)\right\| \to \infty$ и для нее имеем

$$\left\|x_n(t_k)\right\| \leqslant \left\|\vartheta(t_k)\right\| + \left\|g(x_n(t_k))\right\|.$$

Разделим обе части выражения на $\left\|x_n(t_k)\right\|$, получим неравенство:

$$1 \leqslant \frac{\left\|\vartheta(t_k)\right\|}{\left\|x_n(t_k)\right\|} + \frac{\left\|g(x_n(t_k))\right\|}{\left\|x_n(t_k)\right\|},$$

что противоречит условию (g_4).

Пусть теперь $t \in [0,T]$, тогда

$$x(t) = \lambda e^{At}(\vartheta(0) - g(x(0))) +$$
$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}e^{A(t-s)}f(s,x,x_s)\,ds.$$

Если мы возмем $t = 0$, то получим $x(0) = \lambda(\vartheta(0) - g(x(0)))$.

По доказаному выше, множество $x(0)$ априори ограничено, значит по условию (g_1) существует константа M, такая что $\left\|g(x(0))\right\| \leqslant M$.

Тогда имеем:

$$\left\|x(t)\right\| \leq C(\left\|\vartheta\right\| + M) +$$
$$+\frac{C}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\eta(t)(1 + \left\|x\right\| + \left\|x_s\right\|)\,ds \leqslant$$
$$\leqslant C(\left\|\vartheta\right\| + M) + +$$
$$\frac{C\tilde{\eta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}(1 + \left\|x\right\| + \max_{0\leqslant v\leqslant s}\left\|x_v\right\|)\,ds \leqslant$$
$$\leqslant C(\left\|\vartheta\right\| + M) + \frac{C\tilde{\eta}}{\Gamma(\alpha+1)}T^\alpha(1 + \left\|x\right\|) +$$
$$+\frac{C\tilde{\eta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\max_{0\leqslant v\leqslant s}\left\|x_v\right\|)\,ds,$$

где

$$\tilde{\eta} = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \eta(t).$$

Обозначим

$$u(t) = \max_{0 \leqslant v \leqslant t} \left\| x_v \right\|.$$

В силу того, что правая часть полученного неравенства представляет собой неубывающую функцию от t, а также используя оценку функции $x(t)$ при $t \in [-h, 0]$, имеем оценку:

$$u(t) \leqslant C(\left\|\vartheta\right\| + M) + \frac{C\tilde{\eta}}{\Gamma(\alpha+1)} T^{\alpha}(1 + \left\|x\right\|) + \\ + \frac{C\tilde{\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} u(s)\, ds.$$

Обозначим $K = C(\left\|\vartheta\right\| + M) + \frac{C\tilde{\eta}}{\Gamma(\alpha+1)} T^{\alpha}(1 + \left\|x\right\|)$. Воспользовавшись леммой 1, мы получим

$$u(t) \leqslant K\left(1 + \frac{qC\tilde{\eta}T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right).$$

Следовательно, множество всех решений задачи (1)—(2) априори ограничено, это значит, что мы можем взять шар достаточно большого радиуса R в пространстве $C([-h, T]; E)$, который будет априори содержать все неподвижные точки оператора F, более того справедливо $x \neq \lambda F(x), \lambda \in (0, 1]$ на границе шара ∂B. Утверждение теперь вытекает из теоремы 3. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ахмеров Р. Р., Каменский М. И., Потапов А. С., Родкина А. Е., Садовский Б. Н.* Меры некомпактности и уплотняющие операторы. Новосибирск: Наука, 1986.

2. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Введение в теорию многозначных оторбажений и дифференциальных включений. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: Книжный дом «Либроком», 2011.

3. *Henry D.* Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lecture Notes in Math., 840, Springer-Verlag, Berlin — New York, 1981.

4. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P.* Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Speces, de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 7, Walter de Gruyter, Berlin — New-York, 2001.

5. *Obukhovskii V., Yao J.-C.* Some existence results for fractional functional differential equations. Fixed Point Theory, 11(2010) No. 1, 85-96.

6. *Podlubny I.* Fractional differential equations. Academic press, San Diego, 1999.

7. *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications, Gordon and Breach Sci. Publishers, Yverdon, 1993.

Петросян Г. Г., аспирант кафедры высшей математики, Воронежский государственный педагогический университет

E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

Тел.: +7-(950)-761-93-66

Petrosyan G., Faculty of Physics and Mathematics, Voronezh State Pedagogical University

E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

Tel.: +7-(950)-761-93-66