УДК 517.911

ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ВЕКТОРНО-ОПЕРАТОРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ n-го ПОРЯДКА, НЕ РАЗРЕШЁННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

А. И. Перов, Е. В. Иванова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 29.02.2012 г.

Аннотация. В данной статье рассматривается векторно-операторное нелинейное дифференциальное уравнение n-го порядка в комплексном банаховом пространстве. Введено основное интегральное условие, на основании которого получен главный результат статьи в виде четырех теорем о свойствах единственного решения рассматриваемого уравнения. Также описан метод последовательных приближений для решения и его производных до n-го порядка включительно; получены оценки погрешности приближения.
Ключевые слова. Ограниченное решение, нелинейное дифференциальное уравнение, почти периодичность, абсолютная устойчивость, метод интегральных уравнений, метод последовательных приближений.

Abctract. In this paper are considered the vector-operator nonlinear differential equation of the n-th order of a certain type in a complex Banach space. We introduce fundamental integral condition based on which the main result of this paper is obtained. It represents four theorems about properties of a unique solution of the nonlinear differential equation. Also is described the method of successive approximations for the solution and its derivations up to n-th order. Also we obtain estimates of the approximation error.
Keywords. Bounded solution, nonlinear differential equation, almost periodicity, absolute stability, the method of integral equations, the method of successive approximations.

Пусть $\mathcal{B}$ — комплексное банахово пространство, норма элемента $\mathbf{x}$ в котором обозначается $|\mathbf{x}|$, а норма линейного ограниченного оператора $\mathbf{A}$, действующего в этом пространстве (их совокупность обозначается $\mathrm{End}\mathcal{B}$) через $|\mathbf{A}|$.

Рассмотрим в банаховом пространстве $\mathcal{B}$ векторно-операторное нелинейное дифференциальное уравнение n-го порядка, не разрешённое относительно старшей производной, которое имеет следующий вид

$$\mathbf{A}_0\mathbf{x}^{(n)}+\mathbf{A}_1\mathbf{x}^{(n-1)}+\ldots+\mathbf{A}_{n-1}\dot{\mathbf{x}}+\mathbf{A}_n\mathbf{x}= =\mathbf{f}(t,\ \mathbf{x},\ \dot{\mathbf{x}},\ldots,\mathbf{x}^{(n-1)},\mathbf{x}^{(n)}). \quad (1)$$

Здесь коэффициенты уравнения $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1,\ldots, \mathbf{A}_{n-1}, \mathbf{A}_n$ — линейные ограниченные операторы, действующие в банаховом пространстве $\mathcal{B}$, то есть элементы банаховой алгебры $\mathrm{End}\mathcal{B}$, причём оператор $\mathbf{A}_0$ обратим. Относительно нелинейной векторной функции $\mathbf{f}(t,\ \mathbf{x}_0,\ \mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{n-1},\ \mathbf{x}_n)$: $\mathcal{R}\times\mathcal{B}\times\ldots\times\mathcal{B}$ (n+1раз) $\to \mathcal{B}$ сделаем следующие простые предположения: она непрерывна по времени t и удовлетворяет *условию Липшица* по пространственным переменным

$$|\mathbf{f}(t,\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{n-1},\mathbf{x}_n)-\mathbf{f}(t,\mathbf{y}_0,\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_{n-1},\mathbf{y}_n)| \le \le \sum_{j=0}^{n} l_j\, |\mathbf{x}_j-\mathbf{y}_j|, \quad (2)$$

где $l_0, l_1, \ldots, l_{n-1}, l_n$ — некоторые неотрицательные постоянные (*липшицевы постоянные* или *постоянные Липшица*). Отсюда вытекает, что рассматриваемая нелинейная функция непрерывна по совокупности переменных (сравни с [1, с. 50]). Особо выделим непрерывную векторную функцию $\mathbf{f}_0(t)$: $\mathcal{R}\to\mathcal{B}$, положив $\mathbf{f}_0(t)=\mathbf{f}(t,\mathbf{0},\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0},\mathbf{0})$. Из (2) вытекает, что

$$|\mathbf{f}(t,\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{n-1},\mathbf{x}_n)| \le \sum_{j=0}^{n} l_j\, |\mathbf{x}_j|+|\mathbf{f}_0(t)|. \quad (3)$$

Нас интересуют такие решения уравнения (1), для которых

$$|\mathbf{x}(t)|\le c,\ -\infty<t<+\infty, \quad (4)$$

где c — некоторая неотрицательная постоянная. Такие векторные функции будем называть *ограниченными*; иногда их называют также *равномерно-ограниченными*.

Ограниченные решения скалярных уравнений изучались в статье [2]. Подробное изложение аналогичной теории для векторно-матричных уравнений можно найти в [3] и [4]. Отметим, что во всех упомянутых здесь работах изучались лишь уравнения, разрешённые относительно старшей производной.

Для нас важным является нерезонансное условие, состоящее в том, что

$$\mathbf{L}(i\theta) \text{ обратим при } -\infty<\theta<+\infty, \tag{5}$$

где $\mathbf{L}(\lambda) \equiv \lambda^n\mathbf{A}_0 + \lambda^{n-1}\mathbf{A}_1 + \ldots + \lambda\mathbf{A}_{n-1} + \mathbf{A}_n : \mathcal{C} \to \mathrm{End}\mathcal{B}$ есть *операторный характеристический многочлен*. Если выполнено условие (5), то операторный многочлен называется *нерезонансным*.

Отметим, что при $\theta=0$ из (5) вытекает, что оператор $\mathbf{A}_n$ обратим.

Если выполнено нерезонансное условие (5), то линейное неоднородное векторно-операторное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$\mathbf{A}_0\mathbf{x}^{(n)}+\mathbf{A}_1\mathbf{x}^{(n-1)}+\ldots+\mathbf{A}_{n-1}\dot{\mathbf{x}}+\mathbf{A}_n\mathbf{x}=\mathbf{f}(t) \tag{6}$$

при любой непрерывной ограниченной векторной функции $\mathbf{f}(t)$: $\mathcal{R} \to \mathcal{B}$ имеет единственное ограниченное решение; у этого решения оказываются ограниченными все производные до n-го порядка включительно и имеют место следующие формулы

$$\mathbf{x}^{(j)}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(j)}(t-s)\,\mathbf{f}(s)ds,\ j=0,1,\ldots,n-1,$$

$$\mathbf{x}^{(n)}(t)=\mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{f}(t)+\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(n)}(t-s)\,\mathbf{f}(s)ds. \tag{7}$$

Здесь $\mathbf{G}(t)$: $\mathcal{R}\to\mathrm{End}\mathcal{B}$ — это операторная ограниченная функция Грина задачи об ограниченных решениях для уравнения (6).

Операторная функция $\mathbf{G}(t)$ как при $0<t<+\infty$, так и при $-\infty<t<0$ удовлетворяет однородному операторному уравнению

$$\mathbf{A}_0\mathbf{G}^{(n)}(t)+\mathbf{A}_1\mathbf{G}^{(n-1)}(t)+\ldots+ +\mathbf{A}_{n-1}\dot{\mathbf{G}}(t)+\mathbf{A}_n\mathbf{G}(t)=0, \tag{8}$$

а также условиям в точке $t=0$

$$\mathbf{G}^{(j)}(+0)-\mathbf{G}^{(j)}(-0)=0,\ j=0,1,\ldots,n-2,$$
$$\mathbf{G}^{(n-1)}(+0)-\mathbf{G}^{(n-1)}(-0)=\mathbf{A}_0^{-1}. \tag{9}$$

Кроме того, операторная ограниченная функция Грина и её производные подчинены оценке

$$|\mathbf{G}^{(j)}(t)|\le Me^{-\gamma|t|},\ j=0,1,\ldots,n-1,n;$$
$$-\infty<t<+\infty, \tag{10}$$

где M и γ — некоторые положительные постоянные.

Оценки (10) показывают, что все несобственные интегралы в формулах (7) абсолютно и равномерно сходятся. Материал по функции Грина можно найти в [5, с. 118—121], [6, с. 358—365] и [7, § 4].

Введём следующие постоянные, которые определяют лицо развиваемой в этой статье теории

$$æ_j=\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{G}^{(j)}(t)|dt,\ j=0,1,\ldots,n-1,$$

$$æ_n=|\mathbf{A}_0^{-1}|+\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{G}^{(n)}(t)|dt. \tag{11}$$

Эти постоянные назовём *интегральными*. Отметим, что при n=2 и $\mathcal{B}=\mathcal{C}$ явные формулы для интегральных постоянных указаны в [8] и [3]. Прозрачный геометрический смысл интегральных постоянных раскрывает приводимая ниже оценка (15).

Обозначим через $\mathbf{K}_j$ интегральный оператор, определяемый формулой (7):

$$\mathbf{K}_j\mathbf{f}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(j)}(t-s)\,\mathbf{f}(s)ds,\ j=0,1,\ldots,n-1,$$

$$\mathbf{K}_n\mathbf{f}(t)=\mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{f}(t)+\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(n)}(t-s)\,\mathbf{f}(s)ds. \tag{12}$$

Интегральные выражения $\mathbf{K}_j\mathbf{f}(t)$ при j=0, 1, ..., n-1 есть свёртки $\mathbf{G}^{(j)}\times\mathbf{f}$ операторной функции $\mathbf{G}^{(j)}(t)$ и векторной функции $\mathbf{f}(t)$. Введём в рассмотрение банахово пространство $C=C(-\infty<t<+\infty)$ всех непрерывных и ограниченных векторных функций $\mathbf{f}(t)$: $\mathcal{R}\to\mathcal{B}$, положив

$$||\mathbf{f}||_c=\sup\{|\mathbf{f}(t)|:-\infty<t<+\infty\}. \tag{13}$$

Из (7) согласно (13) вытекает важная оценка

$$||\mathbf{x}^{(j)}||_c\le æ_j||\mathbf{f}||_c,\ j=0,1,\ldots,n-1,n. \tag{14}$$

Действительно, если j=0, 1, ..., n-1, то согласно (7)

$$|\mathbf{x}^{(j)}(t)|=|\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(j)}(t-s)\,\mathbf{f}(s)ds|\le$$

$$\le\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{G}^{(j)}(t-s)\,\mathbf{f}(s)|ds\le\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{G}^{(j)}(t-s)||\mathbf{f}(s)|ds\le$$

$$\le\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{G}^{(j)}(t-s)|\,|\mathbf{f}|_c ds=æ_j||\mathbf{f}||_c,$$

откуда вытекает оценка (14) для указанных значений j; если j=n, то опять-таки согласно (7)

$$|\mathbf{x}^{(n)}(t)| = |\mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{f}(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(n)}(t\text{-}s)\ \mathbf{f}(s)ds\ | \le$$

$$\le |\mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{f}(t)| + |\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(n)}(t\text{-}s)\ \mathbf{f}(s)ds\ | \le$$

$$\le |\mathbf{A}_0^{-1}||\mathbf{f}(t)| + \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{G}^{(n)}(t\text{-}s)\ \mathbf{f}(s)|ds \le$$

$$\le |\mathbf{A}_0^{-1}|||\mathbf{f}||_c + \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{G}^{(n)}(t\text{-}s)|\ ||\mathbf{f}||_c\,ds = æ_n||\mathbf{f}||_c.$$

Оценка (14) показывает, что

$$||\mathbf{K}_j||_c \le æ_j,\ j=0,\ 1,\ \ldots,\ n\text{-}1,\ n. \tag{15}$$

Пусть $\mathbf{x}(t)$ есть ограниченное решение нелинейного уравнения (1), т.е.

$$\mathbf{A}_0\mathbf{x}^{(n)}(t)+\mathbf{A}_1\mathbf{x}^{(n-1)}(t)+\ldots+\mathbf{A}_{n-1}\dot{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{A}_n\mathbf{x}(t)=$$
$$=\mathbf{f}(t,\ \mathbf{x}(t),\ \dot{\mathbf{x}}(t),\ \ldots,\ \mathbf{x}^{(n-1)}(t),\ \mathbf{x}^{(n)}(t)). \tag{16}$$

Из теоремы Эсклангона, перенесённой на нелинейные уравнения с липшицевой правой частью [9], вытекает, что $\dot{\mathbf{x}}(t)$, …, $\mathbf{x}^{(n-1)}(t)$ и $\mathbf{x}^{(n)}(t)$ также являются ограниченными. Но тогда $\mathbf{x}(t)$ согласно (16) можно трактовать как ограниченное решение линейного неоднородного уравнения (6), в котором $\mathbf{f}(t) \equiv \mathbf{f}(t,\ \mathbf{x}(t),\ \dot{\mathbf{x}}(t),\ \ldots,\ \mathbf{x}^{(n-1)}(t),\ \mathbf{x}^{(n)}(t))$ есть известная непрерывная ограниченная функция (ограниченность её вытекает из оценки (3) и дополнительно предполагаемой ограниченности векторной функции $\mathbf{f}_0(t)$). Воспользовавшись формулами (7), в рассматриваемом случае находим

$$\mathbf{x}^{(j)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(j)}(t\text{-}s)\mathbf{f}(s,\ \mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s),\ \ldots,$$
$$\mathbf{x}^{(n-1)}(s),\ \mathbf{x}^{(n)}(s))ds,\ j=0,\ 1,\ldots,\ n\text{-}1;$$

$$\mathbf{x}^{(n)}(t) = \mathbf{A}_0^{-1}\ \mathbf{f}(t,\ \mathbf{x}(t),\ \dot{\mathbf{x}}(t),\ldots,\ \mathbf{x}^{(n-1)}(t),\ \mathbf{x}^{(n)}(t)) +$$
$$+\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(n)}(t\text{-}s)\ \mathbf{f}(s,\ \mathbf{x}(s),\ \dot{\mathbf{x}}(s),\ \ldots,$$
$$\mathbf{x}^{(n-1)}(s), \mathbf{x}^{(n)}(s))ds. \tag{17}$$

Таким образом, для нахождения решения ограниченного решения нелинейного дифференциального уравнения (1) и его производных до n-го порядка включительно, т.е. n+1 векторных функций, мы получим систему из n+1 нелинейных интегральных векторно-операторных уравнений. Этот путь исследования ограниченных решений получил название **метода интегральных уравнений** [6], [10].

Для приближённого нахождения ограниченного решения уравнения (1) и его производных до порядка n включительно можно использовать **метод последовательных приближений**, к описанию которого мы и переходим. В качестве нулевого приближения $\mathbf{x}^{[0]}(t)$ берётся любая векторная функция, обладающая непрерывными и ограниченными производными вплоть до n-го порядка включительно. После этого в качестве первого приближения $\mathbf{x}^{[1]}(t)$ принимается единственное ограниченное вместе с производной до n-го порядка включительно решение линейного неоднородного уравнения типа (6)

$$\mathbf{A}_0\mathbf{x}^{[1](n)} + \mathbf{A}_1\mathbf{x}^{[1](n-1)} + \ldots + \mathbf{A}_{n-1}\mathbf{x}^{[1]\bullet} + \mathbf{A}_n\mathbf{x}^{[1]} =$$
$$= \mathbf{f}(t,\ \mathbf{x}^{[0]}(t),\ \mathbf{x}^{[0]\bullet}(t),\ \ldots,\ \mathbf{x}^{[0]\ (n-1)}(t),\ \mathbf{x}^{[0]\ (n)}(t))$$

с известной правой частью. После этого все последующие приближения $\mathbf{x}^{[2]}(t)$, $\mathbf{x}^{[k]}(t)$ находятся по рекуррентным формулам

$$\mathbf{A}_0\mathbf{x}^{[k](n)} + \mathbf{A}_1\mathbf{x}^{[k](n-1)} + \ldots + \mathbf{A}_{n-1}\mathbf{x}^{[k]\bullet} + \mathbf{A}_n\mathbf{x}^{[k]} =$$
$$= \mathbf{f}(t,\ \mathbf{x}^{[k-1]}(t),\ \mathbf{x}^{[k-1]\bullet}(t),\ \ldots,\ \mathbf{x}^{[k-1]\ (n-1)}(t),$$
$$\mathbf{x}^{[k-1]\ (n)}(t)), \tag{18}$$

где $\mathbf{x}^{[k]}(t)$ есть единственное ограниченное (вместе с производными до n-го порядка включительно) решение написанного линейного неоднородного векторно-операторного дифференциального уравнения n-го порядка (18) с известной непрерывной и ограниченной правой частью.

Используя формулы (7), описанный итерационный процесс можно записать также и в интегральном виде

$$\mathbf{x}^{[k](j)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(j)}(t\text{-}s)\mathbf{f}(s,\mathbf{x}^{[k-1]}(s),\mathbf{x}^{[k-1]\bullet}(s),\ldots,$$
$$\mathbf{x}^{[k-1]\ (n-1)}(s),\mathbf{x}^{[k-1]\ (n)}(s))ds,\ \ j=0,1,\ldots,\ n\text{-}1;$$
$$\mathbf{x}^{[k](n)}(t) = \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{f}(t,\ \mathbf{x}^{[k-1]}(t),\ \mathbf{x}^{[k-1]\bullet}(t),\ \ldots,$$
$$\mathbf{x}^{[k-1](n-1)}(t),\ \mathbf{x}^{[k-1](n)}(t)) + \tag{19}$$
$$+\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(n)}(t\text{-}s)\ \mathbf{f}(s,\ \mathbf{x}^{[k-1]}(s),\ \mathbf{x}^{[k-1]\bullet}(s),\ \ldots,$$
$$\mathbf{x}^{[k-1]\ (n-1)}(s),\ \mathbf{x}^{[k-1]\ (n)}(s))ds.$$

Во всей статье предполагается, что выполнено условие

$$q \equiv \sum_{j=0}^{n} æ_j l_j < 1, \tag{20}$$

где $æ_j$ — интегральные постоянные, а l_j— липшицевы постоянные, которое мы назовём *основным интегральным условием.*

Основное содержание статьи составляют следующие четыре теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполнено нерезонансное условие* (5) *и тем самым определены положительные интегральные постоянные* $æ_0$, $æ_1,\ldots,æ_{n-1}$, $æ_n$ (11).

Пусть нелинейная векторная функция $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1,\ldots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n)$ *непрерывна по времени* t *и удовлетворяет условиям Липшица по пространственным переменным* (2)*; тем самым определены неотрицательные липшицевы постоянные* $l_0, l_1, \ldots, l_{n-1}, l_n$ *. Пусть непрерывная векторная функция* $\mathbf{f}_0(t)$ *является ограниченной. Пусть выполнено основное интегральное условие* (20). *Тогда нелинейное дифференциальное уравнение* (1) *имеет единственное ограниченное решение* $\mathbf{x}(t)$. *У этого решения ограниченными оказываются все производные до n-го порядка включительно и справедливы следующие оценки*

$$\left\|\mathbf{x}^{(j)}\right\|_c \le \frac{æ_j}{1-q}\left\|\mathbf{f}_0\right\|_c,\ j=0,\ 1,\ldots,\ n-1,\ n \qquad (21)$$

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *единственное ограниченное решение* $\mathbf{x}(t)$ *и его производные* $\dot{\mathbf{x}}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t)$ *до n-го порядка включительно могут быть получены методом последовательных приближений* (18) *или* (19), *причём погрешность приближения характеризуется следующими оценками*

$$||\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x}^{[k]\,(j)}\ ||_c \le \frac{q^{k-1}}{1-q}æ_j\sum_{i=0}^{n} l_i\ ||\mathbf{x}^{[1](i)}- \mathbf{x}^{[0]\ (i)}||_c,$$
$$j=0,\ 1,\ldots,n-1,\ n;\ k=1,\ 2,\ \ldots . \qquad (22)$$

Теорема 3. *Если в условиях теоремы* 1 *нелинейная векторная функция* $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1,\ldots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n)$ *по времени* t *является стационарной, периодической или почти периодической, то единственное ограниченное решение* $\mathbf{x}(t)$ *(и его производные до n-го порядка включительно) также является стационарным, периодическим или почти периодическим, причём имеет место включение*

группа частот решения $\mathbf{x}(t)$ $\subseteq$ *группе частот*

$$\textit{функции}\ \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1,\ldots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n). \qquad (23)$$

Теорема 4. *Пусть операторный характеристический многочлен* $\mathbf{L}(\lambda)$ *является гурвицевым. Тогда выполнено нерезонансное условие* (5). *Пусть выполнены все основные требования теоремы* 1. *Тогда единственное ограниченное решение* $\mathbf{x}(t)$ *нелинейного дифференциального уравнения* (1) *является асимптотически устойчивым в целом, т.е.*

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)|,\ \ldots,\ |\mathbf{x}^{(n-1)}(t) - \mathbf{y}^{(n-1)}(t)|\to 0 \quad \text{при } t\to+\infty, \qquad (24)$$

где $\mathbf{y}(t)$ *—любое другое решение того же самого уравнения* (1).

Доказательство теоремы 1.

□ Прежде всего докажем справедливость оценок (21). Пусть $\mathbf{x}(t)$ есть ограниченное решение уравнения (1). Как мы об этом уже говорили выше, в условиях теоремы все производные $\dot{\mathbf{x}}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t)$ до n-го порядка включительно также являются ограниченными. Из оценки (8) получаем

$$|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t))| \le$$
$$\le \sum_{j=0}^{n} l_j\ ||\mathbf{x}^{(j)}||_c + ||\mathbf{f}_0||_c. \qquad (25)$$

Поэтому из уравнений системы (17) в силу оценок (14) находим

$$||\mathbf{x}^{(j)}||_c \le æ_j\Big(\sum_{k=0}^{n} l_k\ ||\mathbf{x}^{(k)}||_c + ||\mathbf{f}_0||_c\Big),$$
$$j=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,\ n. \qquad (26)$$

Умножив j-тое неравенство почленно на неотрицательные l_j и сложив все так полученные неравенства, получаем

$$\sum_{j=0}^{n} l_j\ ||\mathbf{x}^{(j)}||_c \le q\Big(\sum_{k=0}^{n} l_k\ ||\mathbf{x}^{(k)}||_c + ||\mathbf{f}_0||_c\Big),$$

Откуда в силу условия (20) вытекает промежуточная оценка

$$\sum_{j=0}^{n} l_j\ ||\mathbf{x}^{(j)}||_c \le \frac{q}{1-q}\ ||\mathbf{f}_0||_c, \qquad (27)$$

подставляя которую в (26), имеем

$$||\mathbf{x}^{(j)}||_c \le æ_j\Big(\frac{q}{1-q}\ ||\mathbf{f}_0||_c + ||\mathbf{f}_0||_c\Big) = \frac{æ_j}{1-q}\left\|\mathbf{f}_0\right\|_c,$$

и оценки (21) установлены.

Для доказательства существования решения системы нелинейных интегральных уравнений (17) применим обобщённый принцип сжимающих отображений [11, с. 414-415], [12]. Обозначим через $C^{(n)} = C^{(n)}(-\infty,+\infty)$ банахово пространство всех векторных функций $\mathbf{f}(t)$: $\mathcal{R}\to\mathcal{B}$, имеющих непрерывные и ограниченные производные вплоть до n-го порядка включительно, положив $||\mathbf{f}||_{C^{(n)}} = ||\mathbf{f}||_c + ||\dot{\mathbf{f}}||_c + ||\mathbf{f}^{(n-1)}||_c + ||\mathbf{f}^{(n)}||_c$.

Систему нелинейных интегральных уравнений (17), которую естественно изучать в банаховом пространстве $C^{(n)}$, коротко запишем в виде

$$\mathbf{x}=\mathbf{F}\mathbf{x},\quad \mathbf{x}\in C^{(n)}, \tag{28}$$

где нелинейный интегральный оператор $\mathbf{F}$ определяется правыми частями системы (17), $\mathbf{F}\mathbf{x}=\{\mathbf{F}_0\mathbf{x},\ldots,\mathbf{F}_n\mathbf{x}\}$. В силу условия Липшица (2) и оценок (14) получаем

$$||\mathbf{F}_j\mathbf{x} - \mathbf{F}_i\mathbf{y}||_c \le æ_j \sum_{k=0}^{n} l_k\, ||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{y}^{(k)}||_c,$$

$$j=0,\ 1,\ \ldots,\ n\text{-}1,\ n. \tag{29}$$

Превратим пространство $C^{(n)}$ в обобщённое банахово пространство, положив обобщённую норму элемента $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t),\ \ldots,\ \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t)\}$ равной

$$“\mathbf{x}” = \mathrm{col}\,\{||\mathbf{x}||_c,\ ||\dot{\mathbf{x}}||_c,\ \ldots, ||\mathbf{x}^{(n-1)}||_c,\ ||\mathbf{x}^{(n)}||_c\}. \tag{30}$$

Обобщённая норма позволяет записать систему неравенств (29) в векторно-матричном виде

$$“\mathbf{F}\mathbf{x} - \mathbf{F}\mathbf{y}” \le \mathbf{Q}“\mathbf{x}\text{-}\mathbf{y}”,\ \mathbf{x},\mathbf{y}\in C^{(n)}, \tag{31}$$

где $\mathbf{Q}=(æ_j l_j)$ есть неотрицательная $(n+1)\times(n+1)$-матрица вида $\mathbf{æl}$ (произведение столбца на строку), где $\mathbf{æ}$ есть столбец $\mathrm{col}(æ_0,\ æ_1,\ \ldots,\ æ_{n-1},\ æ_n)$, а $\mathbf{l}$ есть строка $(l_0,\ l_1,\ \ldots,\ l_{n-1},\ l_n)$, причём

$$\mathbf{0} \le \mathbf{Q} = \mathbf{æl},\ \mathrm{spr}\mathbf{Q} = \mathbf{læ} = q < 1. \tag{32}$$

Неотрицательность квадратной матрицы $\mathbf{Q}$ очевидна, и последующее неравенство для *спектрального радиуса* этой матрицы имеют место в силу основного интегрального условия (20), так как $\mathbf{læ} = l_0æ_0 + l_1æ_1 + \ldots + l_{n-1}æ_{n-1} + l_næ_n$ (произведение строки на столбец).

Из условия Липшица (30) и условия (32) в силу обобщённого принципа сжимающих отображений вытекает, что нелинейный интегральный оператор $\mathbf{F}$ в пространстве $C^{(n)}$ имеет единственную неподвижную точку, т.е. уравнение (28) имеет единственное решение. ■

Доказательство теоремы 2.

□ Метод последовательных приближений (19) коротко может быть записан как

$$\mathbf{x}^{[k]}=\mathbf{F}\mathbf{x}^{[k-1]},\ k=1,\ 2,\ \ldots,\quad \mathbf{x}^{[0]}\in C^{(n)}, \tag{33}$$

причём оценка погрешности в терминах обобщённой нормы (30) записывается в виде

$$“\mathbf{x} - \mathbf{x}^{[k]}” \le \mathbf{Q}^k(\mathbf{I}\text{-}\mathbf{Q})^{-1}“\mathbf{x}^{[1]} - \mathbf{x}^{[0]}”,\ k=1,\ 2,\ \ldots. \tag{34}$$

В нашем случае $\mathbf{Q} = \mathbf{æl}$, что позволяет написать

$$\mathbf{Q}^k = q^{k-1}\mathbf{Q},\ (\mathbf{I}\text{-}\mathbf{Q})^{-1} =$$

$$= \mathbf{I} + \frac{1}{1-q}\mathbf{Q},\ \mathbf{Q}^k(\mathbf{I}\text{-}\mathbf{Q})^{-1} = \frac{q^{k-1}}{1-q}\mathbf{Q}. \tag{35}$$

Потому оценка (34) принимает вид

$$“\mathbf{x}\text{-}\mathbf{x}^{[k]}” \le \frac{q^{k-1}}{1-q}\mathbf{Q}“\mathbf{x}^{[1]}\text{-}\mathbf{x}^{[0]}”,$$

покомпонентная запись которой в точности приводит к оценкам (22). ■

Доказательство теоремы 3.

□ Пусть нелинейная функция стационарна по t

$$\mathbf{f}(t,\ \mathbf{x}_0,\ \mathbf{x}_1,\ldots,\ \mathbf{x}_{n-1},\ \mathbf{x}_n) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0,\ \mathbf{x}_1,\ldots,\ \mathbf{x}_{n-1},\ \mathbf{x}_n). \tag{36}$$

Будем искать стационарное решение уравнения (1) в виде $\mathbf{x}(t)\equiv\mathbf{x}(=\mathrm{const})$.

Подставляем в (1), приходим к уравнению

$$\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{x}),\ \text{где}\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_n^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x},\ \mathbf{0},\ \ldots,\mathbf{0},\ \mathbf{0}). \tag{37}$$

(напомним, что в силу нерезонансного условия (5) оператор $\mathbf{A}_n$ имеет ограниченный обратный). В силу условия Липшица (2) имеем

$$|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})| \le q_0\,|\mathbf{x}\text{-}\mathbf{y}|,\ \text{где}\ q_0 = |\mathbf{A}_n^{-1}|\,l_0. \tag{38}$$

Так как $|\mathbf{A}_n^{-1}| \le æ_0$, то в силу интегрального условия (20) находим $q_0 \le æ_0 l_0 \le æ_0 l_0 + æ_1 l_1 + \ldots + æ_{n-1} l_{n-1} + æ_n l_n \equiv q < 1$, то есть

$$0 \le q_0 \le q < 1. \tag{39}$$

Согласно классическому принципу сжимающих отображений, уравнение (37) имеет единственное решение, которое и даёт стационарное решение исходного уравнения (1).

Пусть нелинейная функция периодична по t:

$$\mathbf{f}(t+\omega,\ \mathbf{x}_0,\ \mathbf{x}_1,\ldots,\ \mathbf{x}_{n-1},\ \mathbf{x}_n) =$$

$$= \mathbf{f}(t,\mathbf{x}_0,\ \mathbf{x}_1,\ldots,\ \mathbf{x}_{n-1},\ \mathbf{x}_n). \tag{40}$$

Пусть $\mathbf{x}(t)$ есть ограниченное решение уравнения (1). Проверим, что

$$\mathbf{x}(t+\omega) = \mathbf{x}(t). \tag{41}$$

Действительно, для функции $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t+\omega)$ в силу условия периодичности (40) получаем

$$\mathbf{A}_0\mathbf{y}^{(n)}(t) + \mathbf{A}_1\mathbf{y}^{(n-1)}(t) + \ldots + \mathbf{A}_{n-1}\dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{A}_n\mathbf{y}(t) =$$

$$= \mathbf{A}_0\mathbf{x}^{(n)}(t+\omega) + \mathbf{A}_1\mathbf{x}^{(n-1)}(t+\omega) + \ldots +$$

$$+ \mathbf{A}_{n-1}\dot{\mathbf{x}}(t+\omega) + \mathbf{A}_n\,\mathbf{x}(t+\omega) =$$

$$=\mathbf{f}(t+\omega,\mathbf{x}(t+\omega),\dot{\mathbf{x}}(t+\omega),\ldots,\mathbf{x}^{(n-1)}(t+\omega),\mathbf{x}^{(n)}(t+\omega)) =$$

$$=\mathbf{f}(t,\ \mathbf{y}(t),\dot{\mathbf{y}}(t),\ldots,\ \mathbf{y}^{(n-1)}(t),\mathbf{y}^{(n)}(t)).$$

Мы видим, что $\mathbf{y}(t)$ есть также решение уравнения (1), причём ограниченное. В силу единственности ограниченного решения, оно должно совпадать с исходным решением, то есть $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{x}(t)$, что и доказывает (41).

Почти периодичность ограниченного решения уравнения (1) в случае почти периодичности нелинейной векторной функции $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n)$ может быть доказана, например, следующим образом.

Возьмём вместо банахова пространства $C^{(n)}$ банахово пространство $P^{(n)}$, состоящее из тех же самых векторных функций, при условии, что $\mathbf{f}(t)$, $\dot{\mathbf{f}}(t)$, …, $\mathbf{f}^{(n-1)}(t)$, $\mathbf{f}^{(n)}(t)$ являются почти периодическими. Так как нелинейный интегральный оператор $\mathbf{F}$ действует в этом пространстве [5, с. 421—423], то на основании обобщённого принципа сжимающих отображений он имеет в этом пространстве единственную неподвижную точку, то есть уравнение (1) имеет решение, являющееся почти периодическим вместе с производными до n-го порядка включительно.

Перейдём к доказательству включения (23). Выпишем *ряд Фурье* почти периодического решения [13, с. 29]

$$\mathbf{x}(t) \sim \sum_k \mathbf{x}_k e^{i \lambda_k t}. \qquad (42)$$

Показатели Фурье иначе называются *частотами*; совокупность всех частот образует *спектр* $\lambda = \{\lambda_k\}$ векторной почти периодической функции $\mathbf{x}(t)$. Наименьшая подгруппа аддитивной группы $\mathcal{R}$, содержащая весь спектр λ, называется *группой частот* почти периодической функции $\mathbf{x}(t)$ и обозначается (λ). Она состоит из всех конечных линейных целочисленных комбинаций частот λ_k [14, с. 32] (сравни с [15, с. 125], где наша группа частот именуется *модулем*).

Предположим, что можно указать такое конечное или счётное множество частот $\mu = \{\mu_n\}$, что при любых фиксированных $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}$, $\mathbf{x}_n$ имеет место разложение в ряд Фурье

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n) \sim$$
$$\sim \sum_k \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n) e^{i \mu_k t}. \qquad (43)$$

(Так обстоять дело будет всегда, если дополнительно предполагают сепарабельность банахова пространства $\mathcal{B}$). Множество μ называется *спектром* рассматриваемой почти периодической функции, а (μ) служит для обозначения её *группы частот*.

Вместо банахова пространства $P^{(n)}$ рассмотрим более узкое пространство $P^{(n)}_{(\mu)}$, состоящее из всех векторных функций $\mathbf{f}(t)$ из $P^{(n)}$, спектр которых лежит в (μ). Опираясь на теорему аппроксимации теории почти периодических векторных функций со значениями в банаховом пространстве [16, с. 22] и на теорему Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций на компактных множествах многочленами, можно показать, что нелинейный интегральный оператор $\mathbf{F}$ действует в банаховом пространстве $P^{(n)}_{(\mu)}$. Рассматривая $P^{(n)}_{(\mu)}$ как обобщённое банахово пространство с обобщённой нормой типа (30), мы видим, что уравнение (28) имеет единственное решение $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t)\}$, где $\mathbf{x}^{(j)}(t) \in P(\mu)$ для $j=0, 1, \ldots, n-1, n$. Включение (23) установлено. ■

Доказательство теоремы 4.

Доказательство проводится по той же схеме, что и в препринте [4, с. 34—38].

□ Обозначим через $\mathbf{z}(t)$ разность $\mathbf{x}(t)-\mathbf{y}(t)$ и покажем, что

$$|z^{(j)}(t)| \to 0 \text{ при } t \to +\infty \text{ для } j=0, 1, \ldots, n-1, n \qquad (44)$$

Из общей теории линейных дифференциальных уравнений n-го порядка известно, что

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{h}(t) + \int_0^t \mathbf{K}(t-s)\mathbf{g}(s)ds. \qquad (45)$$

Здесь $\mathbf{h}(t)$ — решение линейного дифференциального уравнения (6), в котором $\mathbf{f}(t) \equiv \mathbf{0}$, для которой $\mathbf{h}(0) = \mathbf{z}(0)$, $\dot{\mathbf{h}}(0) = \dot{\mathbf{z}}(0)$, …, $\mathbf{h}^{(n-1)}(0) = \mathbf{z}(0)^{(n-1)}$, а $\mathbf{K}(t)$ — это *операторная приведённая функция Коши*, то есть $\mathbf{K}(t,s) = \mathbf{K}(t-s)$ есть *операторная функция Коши* для уравнения (6) и

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t)) -$$
$$- \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), \dot{\mathbf{y}}(t), \ldots, \mathbf{y}^{(n-1)}(t), \mathbf{y}^{(n)}(t)). \qquad (46)$$

Из формулы (45) дифференцированием получаем

$$\mathbf{z}^{(j)}(t) = \mathbf{h}^{(j)}(t) + \int_0^t \mathbf{K}^{(j)}(t-s)\mathbf{g}(s)ds, \; j=1, 2, \ldots, n-1,$$

$$\mathbf{z}^{(n)}(t) = \mathbf{h}^{(n)}(t) + \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{g}(t) + \int_0^t \mathbf{K}^{(n)}(t-s)\mathbf{g}(s)ds. \qquad (47)$$

Из (46) в силу условия Липшица находим

$$|\mathbf{g}(t)| \le \sum_{j=0}^{n} l_j |\mathbf{z}^{(j)}(t)|. \qquad (48)$$

Оценивая по норме, из (45) и (47) согласно (48) имеем

$$|\mathbf{z}^{(j)}(t)| \le |\mathbf{h}^{(j)}(t)| + \int_0^t |\mathbf{K}^{(j)}(t-s)| \sum_{k=0}^{n} l_k |\mathbf{z}^{(k)}(s)| ds,$$

$$j=0,\ 1,\ \ldots,\ n\text{-}1$$

$$|\mathbf{z}^{(n)}(t)| \le |\mathbf{h}^{(n)}(t)| + |\mathbf{A}_0^{-1}|\sum_{k=0}^{n} l_k|\mathbf{z}^{(k)}(s)| + \\ + \int_0^t |\mathbf{K}^{(n)}(t\text{-}s)|\sum_{k=0}^{n} l_k|\mathbf{z}^{(k)}(s)|ds. \qquad (49)$$

Умножим почленно j-е неравенство на неотрицательное l_j и сложим все получившиеся вновь неравенства также почленно; после введения обозначений

$$u(t) = \sum_{j=0}^{n} l_j|\mathbf{z}^{(j)}(t)|,\ c(t) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} l_j|\mathbf{h}^{(j)}(t)|, \mathcal{K}(t) = \sum_{j=0}^{n} l_j|\mathbf{K}^{(j)}(t)|, \quad (50)$$

мы придём к скалярному линейному интегральному неравенству

$$u(t) \le c(t) + l_n|\mathbf{A}_0^{-1}|u(t) + \int_0^t \mathcal{K}(t\text{-}s)u(s)ds. \quad (51)$$

Отметим следующее важное обстоятельство, играющее в наших рассуждениях важную роль: в условиях гурвицевости операторного характеристического многочлена $\mathbf{L}(\lambda)$ операторная ограниченная функция Грина $\mathbf{G}(t)$ совпадает с операторной приведённой функцией Коши $\mathbf{K}(t)$ при $t>0$ (и равна 0 при $t<0$). Поэтому в силу интегрального условия (20) имеем

$$\int_0^t \mathcal{K}(t\text{-}s)ds = \int_0^t \sum_{j=0}^{n} l_j|\mathbf{K}^{(j)}(t\text{-}s)|ds =$$

$$= \int_0^t \sum_{j=0}^{n} l_j|\mathbf{G}^{(j)}(t)|dt < \int_0^{+\infty} \sum_{j=0}^{n} l_j|\mathbf{G}^{(j)}(t)|dt =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} l_j \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{G}^{(j)}(t)|dt =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} l_j\, æ_j + l_n(æ_n - |\mathbf{A}_0^{-1}|) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} l_j\, æ_j - l_n|\mathbf{A}_0^{-1}| = q - l_n|\mathbf{A}_0^{-1}|. \qquad (52)$$

Введём в рассмотрение банахово пространство $C_+=C[0,+\infty)$ всех непрерывных и ограниченных на неотрицательной полупрямой векторных функций $\mathbf{f}(t)$, положив

$$||\mathbf{f}||_+ = \sup_{0\le t+\infty} |\mathbf{f}(t)|. \qquad (53)$$

В условиях теоремы неотрицательная функция $c(t)$ стремится к нулю при $t\to+\infty$ и потому она является ограниченной на неотрицательной полупрямой.

Покажем теперь, прежде всего, что из интегрального неравенства (51) вытекает ограниченность неотрицательной функции $u(t)$ на неотрицательной полупрямой и, более того, имеет место оценка

$$0 \le u(t) \le \frac{\|c\|_+}{1-q},\ 0 \le t < +\infty. \qquad (54)$$

При $t=0$, как это следует из неравенства $l_n|\mathbf{A}_0^{1}| < l_n æ_n \le q$, оценка (54) очевидна (и она выполнена со знаком строгого неравенства). Предположим, тем не менее, что оценка (54) где-то нарушается, и пусть $t_0>0$ — первое значение времени, когда в (54) имеет место знак равенства, то есть

$$0 \le u(t) \le \frac{\|c\|_+}{1-q},\ 0 \le t<t_0;\ \ u(t_0) = \frac{\|c\|_+}{1-q}.$$

Тогда из (51) в силу (52) имеем

$$u(t_0) \le c(t_0) + l_n|\mathbf{A}_0^{-1}|\, u(t_0) + \\ + \int_0^{t_0} \mathcal{K}(t_0\text{-}s)\frac{\|c\|_+}{1-q}ds <$$

$$< \|c\|_+ + l_n|\mathbf{A}_0^{-1}|\frac{\|c\|_+}{1-q} + (q - l_n|\mathbf{A}_0^{-1}|)\frac{\|c\|_+}{1-q} = \frac{\|c\|_+}{1-q},$$

что является противоречием. Оценка (54) установлена.

Покажем теперь, что $u(t)$ не только ограничена на неотрицательной полупрямой, но и стремится к нулю по экспоненциальному закону.

Положим

$$q(\varepsilon) = \int_0^{+\infty} \mathcal{K}(\sigma)e^{\varepsilon\sigma}d\sigma + |\mathbf{A}_0^{-1}|l_n,\ \varepsilon\ge 0, \quad (55)$$

Обозначим через $-\alpha < 0$ спектральную абсциссу оператора $\mathbf{A}$. В силу гурвицевости оператора $\mathbf{A}$ такое $\alpha > 0$ существует ($\mathrm{spa}\mathbf{A} = -\alpha < 0$). Ясно, что при $0\le \varepsilon < \alpha$ несобственный интеграл в (55) сходится, причём его сходимость абсолютная и равномерная на любом отрезке, лежащем целиком в полуинтервале $[0, \alpha)$. Поэтому $q(\varepsilon)$ — непрерывная положительная функция, определённая во всяком случае при $0\le \varepsilon < \alpha$. Так как, согласно (52), $q(0) = q<1$, то можно указать такое $\varepsilon > 0$, что $q(\varepsilon) < 1$.

Из (51) находим

$$u_\varepsilon(t) \le c_\varepsilon(t) + l_n|\mathbf{A}_0^{-1}|u_\varepsilon(t) + \int_0^t \mathcal{K}_\varepsilon(t\text{-}s)u_\varepsilon(s)ds, \quad (56)$$

где $u_\varepsilon(t)$, $c_\varepsilon(t)$ и $\mathcal{K}_\varepsilon(t)$ — это функции (50), помноженные на $\exp(\varepsilon t)$. В условиях теоремы 4 неотрицательная функция $c_\varepsilon(t)$ стремится к нулю при $t\to+\infty$, и поэтому является ограниченной на неотрицательной полупрямой. В силу (55)

$$\int_0^t \mathcal{K}_\varepsilon(t\text{-}s)\, ds = \int_0^t \mathcal{K}(\sigma)\, e^{\varepsilon\sigma}\, d\sigma <$$

$$< \int_0^{+\infty} \mathcal{K}(\sigma)\, e^{\varepsilon\sigma}\, d\sigma = q(\varepsilon) - |\mathbf{A}_0^{-1}|\, l_n. \quad (57)$$

Поэтому из интегрального неравенства (56) вытекает оценка

$$0 \le u_\varepsilon(t) \le \frac{\|c_\varepsilon\|_+}{1-q(\varepsilon)}, \;\; 0 \le t \le +\infty \quad (58)$$

Из полученной оценки следует, что $0 \le u(t) \le c_\varepsilon e^{-\varepsilon t}$, $0 \le t \le +\infty$, где c_ε — некоторая положительная постоянная, откуда и вытекает справедливость утверждения (44) (даже в более сильном смысле).

Все четыре теоремы сохраняют свою силу, если основное интегральное условие (20) заменить на менее ограничительное условие

$$\tilde{q} \equiv \sum_{j=0}^{n} \;||\mathbf{K}_j||_c\, l_j \;(\le q) < 1, \quad (59)$$

а в условиях теорем интегральные постоянные $æ_j$ заменить нормами $||\mathbf{K}_j||_c$.

Нужно заметить, однако, что доказательство теоремы 4 в том виде, в котором оно здесь приведено, уже не проходит. Здесь нужно сослаться на «принцип отсутствия ограниченных решений в проблеме абсолютной устойчивости» М. А. Красносельского и А. В. Покровского — из чего сразу же вытекает справедливость теоремы 4 для конечномерного банахова пространства $\mathcal{B}$. Общий случай пока остаётся открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Наука, 1964, 272 с.

2. *Перов А. И., Барамзин С.А., Григорова М. Ф., Кириллова М. М., Шерстобитова А. А.* Об ограниченных решениях дифференциальных уравненийn-го порядка. Труды молодых учёных ВГУ, 2004, Вып.2, С. 14—21.

3. *Коструб И. Д.* Ограниченные решения нелинейных векторно-матричных дифференциальных уравнений n-го порядка. Кандидатская диссертация, Воронеж, 2011, 139 с.

4. *Перов А. И.,Коструб И. Д.* Ограниченные решения нелинейных векторно-матричных дифференциальных уравнений n-го порядка (æ-теория). Препринт № 36 май 2011. Воронеж, Воронежский государственный университет, 2011, 52 с.

5. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., Наука, 1970, 536 с.

6. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., Наука, 1967, 472 с.

7. *Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С.* Нелинейные почти периодические колебания. М., Наука, 1970, 352 с.

8. *Перов А. И.* Ограниченные решения дифференциальных уравнений второго порядка. Дифференциальные уравнения, 1967, Т. 3, № 3, С. 524—528.

9. *Коструб И. Д.* Неравенства типа Ландау—Адамара для гладких векторных функций и теорема Эсклангона для нелинейных дифференциальных уравнений n-го порядка. Вестник ПММ, 2010, Вып. 8, С. 233—243.

10. *Розенвассер Е. Н.* Колебания нелинейных систем. М., Наука, 1960, 576 с.

11. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М., Мир, 1975, 560 с.

12. *Перов А. И.* Обобщённый принцип сжимающих отображений. Вестник ВГУ, серия физика, математика, 2005, № 1, С. 190—201.

13. *Ройтенберг Я. Н.* Автоматическое управление. М., Наука, 1971, 396с.

14. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. М., Наука, 1973, 520 с.

15. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. М., ГИТТЛ, 1953, 396 с.

16. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. М., Издательство МГУ, 1978, 208 с.

17. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., Наука, 1967, 576 с.

18. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М., Наука, 1965, 520 с.

19. *Стрелков С. П.* Введение в теорию колебаний. М., Наука, 1964, 440с.

20. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М., Изд-во иностранной литературы, 1962, 832 с.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00276)

Перов А. И., профессор ВГУ
E-mail: perov@amm.vsu.ru
Тел.: 2264356

Perov A. I., the professor of VSU
E-mail: perov@amm.vsu.ru
Tel.: 2264356

Иванова Е. В., аспирантка ПММ ВГУ
E-mail: lena.ivanova.lica@yandex.ru
Тел. 8(920)469-29-02

Ivanova E. B., postgraduate student of AMM VSU
E-mail: lena.ivanova.lica@yandex.ru
Tel.: 8(920)469-29-02