УДК 517.958

СИЛЬНЫЕ АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ОДНОЙ МОДЕЛИ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ*

В. П. Орлов

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 2 марта 2012 г.

Аннотация: установлена вторая априорная оценка решений для одной модели динамики вязкоупругой регуляризованной сплошной среды.
Ключевые слова: априорные оценки, вязкоупругая сплошная среда, плоский случай.

Abstract: second apriori estimate to solutions for some model of dynamics of viscoelastic continuous medium in the planar case are established.
Key words: viscoelastic continuous medium, apriori estimates, planar case.

ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть $Q_T = [0,T]\times\Omega$, где $\Omega \in R^2$ — ограниченная область с гладкой границей Γ. В $Q_T = [0,T]$ рассматривается начально-краевая задача

$$\begin{gathered}\partial v(t,x)/\partial t + \sum_{i=1}^{2} v_i(t,x)\partial v(t,x)/\partial x_i - \mu_0\Delta v(t,x) - \\ -\mu_1 \mathrm{Div}\int_{\tau(t,x)}^{t}\exp(\lambda(s-t))\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))ds + \\ +\mathrm{grad}\, p(t,x) = \\ = f(t,x),\, (t,x)\in Q_T;\, \mathrm{div} v(t,x)=0,\, (t,x)\in Q_T; \\ \int_\Omega p(t,x)dx = 0; \in [0,T];\end{gathered} \qquad (1.1)$$

$$v(0,x) = v^0(x),\, x\in\Omega_0, \qquad (1.2)$$

$$\begin{gathered} v(t,x) = v^1(x), \\ (t,x)\in S_T = \{(t,x): t\in[0,T], x\in\Gamma.\}\end{gathered} \qquad (1.3)$$

$$\begin{gathered} z(\tau;t,x) = x + \int_t^\tau \tilde v(s,z(s;t,x))ds, \\ \tau\in[0,T],\ (t,x)\in Q_T.\end{gathered} \qquad (1.4)$$

Здесь $v(t,x) = (v_1(t,x), v_2(t,x)) \in W_2^{1,2}(Q_T)$ и $p(t,x)\in W_2^{0,1}(Q_T)$ векторная и скалярная функции, удовлетворяющие (1.1)—(1.3), вектор-функция $z(\tau;t,x)$ определяется как решение задачи Коши (в интегральной форме) (1.4). Далее, $\mathcal{E}(v) = \{\mathcal{E}_{ij}\}_{i,j=1}^2$ — матрица с коэффициентами $\mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i\right)$. Дивергенция $\mathrm{Div}\,\mathcal{E}(v)$ матрицы определяется как вектор с компонентами — дивергенциями строк, $\mu_0 > 0$, μ_1, λ — неотрицательные константы, $\tilde v(t,x) = S_\delta v(t,x)$, где S_δ — оператор регуляризации (см. [1]).

Функция $\tau(t,x)$ определяется как

$$\tau(t,x) = \inf\{\tau : z(s;t,x)) \in \Omega, \tau \le s \le t\}. \qquad (1.5)$$

Всюду ниже будем предполагать, что $v^1(x)$ является гладкой функцией, заданной на границе Γ и удовлетворяющей естественному условию

$$\int_\Gamma v^1(x)\cdot n(x)dx \equiv (v^1(x), n(x)) = 0. \qquad (1.6)$$

Здесь $v^1(x)\cdot n(x)$ скалярное произведение векторов в R^2, $n(x)$ вектор внешней нормали к Γ в точке $x\in\Gamma$. Тогда существует гладкая функция $\hat v(x)$, определенная в $\bar\Omega$, удовлетворяющая условию (1.6) и совпадающая с $v^1(x)$ на Γ (см. [5], стр. 34), причем $\left\|\hat v(x)\right\|_{C(\bar\Omega)} \le M\left\|v^1(x)\right\|_{C(\Gamma)}$.

Относительно поведения функции $v^1(x)$ на границе будем предполагать, что она вырождается лишь на конечном множестве точек границы $\mathcal{M} = \{z_1,\dots,z_k\}$, т.е.

$$v^1(z)\cdot n(z) \ne 0,\, z\notin\mathcal{M}). \qquad (1.7)$$

Здесь $n(z)$ — вектор внешней нормали в точке $z\in\Gamma$.

Решением задачи (1.1)—(1.4) называется пара функций (v,p), $v\in W_2^{1,2}(Q_T)$, $p\in W_2^{0,1}(Q_T)$ такая, что выполняются уравнения (1.1), (1.4) и условия (1.2)—(1.3).

В [1] для решения задачи установлена (первая априорная оценка)

Теорема 1 *Пусть* $f\in L_2(0,T;H)$, $v^0\in L_2(\Omega)$,

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 04-01-0008.

$v^1 \in C^1(\Gamma)$ и выполняются условия (1.6) и (1.7). Тогда для решения задачи 1.1)—(1.4) справедлива априорная оценка

$$\left|v(t,x)\right|_0^2 + \int_0^t \left|v(s,x)\right|_1^2 ds \le \le M\left(\left\|f\right\|_0^2 + \left\|v^1\right\|_{C^1(\Gamma)}^4 + \left|v\right|_0^2\right),\ 0 \le t \le T. \tag{1.8}$$

Нашей целью является доказательство сильной (второй) априорной оценки. Здесь и далее используются обозначения работы [1].

Сформулируем основной результат.

Будем предполагать, что в окрестности произвольной точки $z_* \in \mathcal{M}$ выполняются следующие условия согласования границы и граничного условия. Пусть в произвольной точке $z_* \in \mathcal{M}$ введена локальная ортогональная система координат $\hat{x}_1, \hat{x}$, порожденная единичными вектором $n(z_*)$ нормали и касательным вектором $k(z_*)$, а граница задается как функция $\hat{x}_2 = \sigma(\hat{x}_1)$, причем, $\sigma(0) = \sigma'(0) = 0$, $\sigma(\hat{x}) > 0$ при $\hat{x} \ne 0$. Пусть в этой системе граничная функция имеет вид $(v^1(\hat{x}_1, \sigma(\hat{x}_1)) = \overline{v}^1(\hat{x}_1) = \left(\overline{v}_2^1(\hat{x}_1), \overline{v}_1^1(\hat{x}_1), \overline{v}_2^1(\hat{x}_1)\right)$, и выполняется условие согласования

$$(\overline{v}_2^1(0))' - \sigma''(0)\overline{v}_1^1(0) \ne 0,\ z \in \mathcal{M}. \tag{1.9}$$

Теорема 2. *Пусть* $f \in L_2(0,T;H)$, $v^1 \in C^2(\Gamma)$, $v^0 - \hat{v}^1 \in V$. Пусть выполняются условия (1.6), (1.7) и (1.9). Тогда для решения задачи (1.1)—(1.4) справедлива априорная оценка

$$\left\|v\right\|_{1,2} \le M\left(\left\|f\right\|_0, \left|v^0\right|_1, \left\|v^1\right\|_{C^2(\Gamma)}\right). \tag{1.10}$$

Непосредственно доказательство теоремы 1.2 проводится в разделе 3. В разделе 2 устанавливаются вспомогательные результаты.

Возникающие при оценках в неравенствах и цепочках неравенств константы, не зависящие от существенных параметров, обозначаются, как правило, одной буквой M, помечаясь при необходимости индексами и в скобках параметрами, от которых они зависят.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ (СМ. [1])

В [1] были установлены следующие оценки для $\tilde{v}(x) = S_\delta v(x)$:

$$\left\|\tilde{v}(x)\right\|_{C^1(\Omega)} \le M\left(\left|v(x)\right|_1 + \left\|\hat{v}(x)\right\|_{C^1(\Gamma)}\right), \tag{2.1}$$

$$\left\|\tilde{v}(x)\right\|_{C^2(\Omega)} \le M\left(\left|v(x)\right|_1 + \left\|\hat{v}(x)\right\|_{C^2(\Gamma)}\right). \tag{2.2}$$

Отсюда вытекает, что если $v(t,x) \in W^{0,1}(Q_T)$, то для $\tilde{v}(t,x)$ справедливы неравенства

$$\left\|\tilde{v}(t,x)\right\|_{C(0,T;C^2(\Omega))} \le M\left\|v(t,x)\right\|_{W_2^{0,1}}. \tag{2.3}$$

В [1] были установлены оценки решений $z(\tau;t,x)$ задачи Коши (1.1.4):

$$\left\|z_x(\tau;t,x)\right\|_{C(\Omega)} \le M(\left\|v\right\|_{0,1}, \left\|\hat{v}\right\|_{C^1(\Omega)}) \equiv M_0,\quad \tau(t,x) \le \tau \le t; \tag{2.4}$$

$$\left\|z_{xx}(\tau;t,x)\right\|_{C(\Omega)} \le M(\left\|v\right\|_{0,1}, \left\|\hat{v}\right\|_{C^1(\Gamma)}),\quad \tau(t,x) \le \tau \le t. \tag{2.5}$$

2.2. СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $\tau(t,x)$.

Представим Ω в виде $\Omega = \Omega_+(t) \cup \Omega_-(t) \cup \cup \Omega_0(t)$, где

$$\Omega_+(t) = \{x : \tau(t,x) > 0, (v^1(z), n(z)) \ne 0, z = z(\tau(t,x);t,x),\ x \in \Omega\};$$

$$\Omega_-(t) = \{x : \tau(t,x) = 0,\ z\ (\tau(t,x);t,x) \in \Omega\};$$

$$\Omega_0(t) = \Omega \setminus (\Omega_+(t) \cup \Omega_-(t)).$$

В [1] было установлено, что множества $\Omega_-(t)$ и $\Omega_+(t)$ являются открытыми, $m(\Omega_0(t))0$, $m((\Omega_+(t) \cup \Omega_-(t)) = m(\Omega)$, $\tau(t,x) \equiv 0$ на $\Omega_-(t)$ а функция $\tau(t,x)$ непрерывна на $\Omega_+(t) \cup \Omega_-(t)$ по x.

Пусть граница Γ задается уравнением $\Phi(x) = 0$, где $\Phi(x)$ — гладкая функция. Тогда (см.[1]) функция $\tau(t,x)$ дифференцируема на $\Omega_+(t)$, и справедливо соотношение

$$\frac{\partial \tau(t,x)}{\partial x_i} = = -(\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(z(\tau(t,x);t,x)) \frac{\partial z_k}{\partial x_i}(\tau(t,x);t,x)) \times (\nabla\Phi(z(\tau(t,x);t,x)), v^1(z(\tau(t,x);t,x))^{-1},\ i = 1,2. \tag{2.6}$$

Изучим поведение $\nabla\tau(t,x)$ на $\Omega_+(t)$. Заметим, что из формулы (2.6) следует, что $\nabla\tau(t,x)$ может иметь особенность только тогда, когда функция $z(\tau(t,x);t,x)$ попадает в окрестность особой точки $z \in \mathcal{M}$. Ниже мы покажем, что в окрестность особой точки могут попадать лишь траектории, начинающиеся вблизи нее.

Без ограничения общности будем считать, что эта точка z единственная и $z = 0$, область Ω лежит в верхней полуплоскости, а в малой окрестности $z = 0$ граница Γ задается функцией $z_2 = \sigma(z_1)$, $|\, z_1 | \le h^{1/2}$, $h > 0$, так что $\sigma'(0) = 0$, $\sigma''(0) > 0$.

Более того, в целях упрощения довольно громоздких выкладок, будем считать, что в этой малой окрестности $z = 0$ граница Γ задается функцией $z_2 = z_1^2$, $|z_1| \le h^{1/2}$, $h > 0$. Положим $\Gamma(h) = \left\{z : z \in \Gamma,\, z_2 = z_1^2, \left|z_1\right| \le h^{1/2}\right\}$, $U(h) = \left\{z : z_2 \ge z_1^2, \left|z_1\right| \le h^{1/2}\right\}$.

Пусть

$$\Omega_{\ge\varepsilon} = \left\{x : x \in \Omega_+(t), \left|\hat{G}(x)\right| \ge \varepsilon\right\},$$

$$\Omega_{<\varepsilon} = \left\{x : x \in \Omega_+(t), \left|\hat{G}(x)\right| < \varepsilon\right\}.$$

$$\hat{G}(x) = (\nabla\Phi(z(\tau(t,x);t,x)), \\ v^1(z(\tau(t,x);t,x))),\, G(x) = \hat{G}(x)^{-1}. \tag{2.7}$$

Из (2.6) в силу гладкости Φ и (2.4) следует, что

$$\left|\nabla(\tau(t,x)\right| \le \frac{M}{\varepsilon}\left\|z(\tau(t,x);t,x))\right\|_{C(\Omega)} \le \tag{2.8}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} M\left(\left\|\hat{v}^1\right\|_{C^1(\Omega)}, \left\|\tilde{v}\right\|_{0,1}\right),\, x \in \Omega_{\ge\varepsilon}.$$

Для оценки $\hat{G}(x)$ на $\Omega_{<\varepsilon}$ заметим, что $\hat{G}(x)$ может иметь особенность только тогда, когда $z(\tau(t,x);t,x)$ попадает в окрестность особой точки $z \in \mathcal{M}$.

Пусть $v(t,x) \in W^{0,1}(Q_T)$. Тогда для $\tilde{v}(t,x)$ справедливо неравенство (2.3).

Изучим поведение траекторий $z(\tau(t,x);t,x)$ поля скоростей $\tilde{v}(t,x)$ в окрестности $U(h) = \left\{z : z_2 \ge z_1^2, \left|z_1\right| \le h^{1/2},\right\}$ особой точки $z = 0$. Предположим, что $v(t,x) \in W^{0,1}(Q_T) \le M_0$. Тогда из (2.7) вытекает справедливость неравенства

$$\left\|\tilde{v}(t,x)\right\|_{C(0,T;C^2(U(h))} \le MM_0. \tag{2.9}$$

Так как $(v^1(0), n(0)) = 0$, а $n(0) = (0,-1)$, то $v_2^1(0) = 0$, а $v_1^1(0) = v^1$. Пусть для определенности $v^1 > 0$.

Из (2.9) тогда следует, что $\tilde{v}_1(t,x) > v^1/2$ при достаточно малом h. В этом случае $\frac{d}{dt} z_1(\tau;t,x) = \tilde{v}_1(\tau, z(\tau;t,x)) > 0$, и функция $z_1 = z_1(\tau;t,x)$ имеет обратную $\tau = \varphi(z_1)$. Тогда траектория $z_1(\tau;t,x)$, принадлежащая $U(h)$ при фиксированных t, x, задает некоторую кривую $z_2 = g(z_1), g(z_1) = z_2(\varphi(z_1);t,x)$, при этом

$$g'(z_1) = \tilde{v}_2(\varphi(z_1), z_1, g(z_1) / \tilde{v}_1(\varphi(z_1), z_1, g(z_1)). \tag{2.10}$$

Рассмотрим

$$k(\tau, z) = \tilde{v}_2(\tau, z) / \tilde{v}_1(\tau, z)). \tag{2.11}$$

Лемма 2.1. *При достаточно малых h справедливо соотношение*

$$|k(\tau,z)| \le m_1 z_2,\, z \in U(h). \tag{2.12}$$

Доказательство леммы 2.1. Используя гладкость границы Γ, будем считать, что $\tilde{v}(t,x)$ продолжена на некоторую внешнюю окрестность $\Omega_1 \supset \Omega$ области Ω с сохранением класса (и нормы) $C(0,T;C^2(\Omega))$. Тогда имеют смысл производные функции $\tilde{v}(t,x)$ по x в точках границы.

Рассмотрим $\tilde{v}(t,x) = (\tilde{v}_1(t,x), \tilde{v}_2(t,x))$ в окрестности $U(h)$ при малых h. Очевидно, что

$$\tilde{v}_k(t,x) = \tilde{v}_k(t,0) + \frac{\partial\tilde{v}_k(t,0)}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial\tilde{v}_k(t,0)}{\partial x_2} x_2 +$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2\tilde{v}_k(t,\theta_{ij})}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j, \quad x, \theta_{ij} \in U(h),\, k = 1,2 \tag{2.13}$$

при некоторых $\theta_{ij} = \theta_{ij}(x)$.

В частности, для $z = (z_1, z_2) \in \Gamma(h)$, $z_2 = z_1^2$ из граничного условия $\tilde{v}(t,z) = v^1(z), z \in \Gamma(h)$ следует, что $\tilde{v}_2(t,0) = 0$.

Тогда из (**2.13**) вытекает, что для $z \in \Gamma(h)$ справедливо

$$\varphi_2(z_1) \equiv \tilde{v}_2(t, z_1, z_1^2) = \frac{\partial\tilde{v}_2(t,0)}{\partial x_1} z_1 + \frac{\partial\tilde{v}_2(t,0)}{\partial x_2} z_1^2 + \\ \frac{1}{2}(\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2\tilde{v}_2(t,\theta_{11})}{\partial^2 x_1} z_1^2 + \frac{\partial^2\tilde{v}_2(t,\theta_{22})}{\partial^2 x_2} z_1^4 + \\ +2\frac{\partial^2\tilde{v}_k(t,\theta_{12})}{\partial x_1 \partial x_2} z_1^3). \tag{2.14}$$

Из гладкости $v^1(x_1,x_2)$ $\left(x = (x_1,x_2)\right)$ и условия $v_2^1(0) = 0$ следует, что $v_2^1(z_1, z_1^2) = o(z_1)$. Пользуясь условием $v_2(t, z_1, z_1^2) = v_2^1(z_1, z_1^2)$, $z \in \Gamma(h)$, разделив обе части (2.14) на z_1 и переходя к пределу при $z_1 \to 0$, получаем

$$\partial\tilde{v}_2(t,0) / \partial x_1 = 0. \tag{2.15}$$

Отсюда и из (2.14) при $k = 2$ следует, что

$$\tilde{v}_2(t,x) = \frac{\partial\tilde{v}_2(t,0)}{\partial x_2} x_2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2\tilde{v}_2(t,\theta_{ij})}{\partial^2 x_1} x_i x_j. \tag{2.16}$$

Очевидно, что

$$x_2 \ge x_1^2, x \in U(h). \tag{2.17}$$

Пользуясь (2.15)—(2.17) и оценками (2.4), (2.5), имеем

$$\left|\tilde{v}_2(t,x)\right| \le M(\left(\left\|\hat{v}^1(x)\right\|_{C^1(\Omega)}, \left\|v(t,x)\right\|_{0,1}\right) x_2,\, x \in U(h).$$

Полагая $v^1 = v_1^1(0) = \tilde{v}_1(t,0)$ и пользуясь (2.13) для $k = 1$, получаем

$$\tilde{v}_1(t,x) = v_1 + \frac{\partial \tilde{v}_1(t,0)}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial \tilde{v}_1(t,0)}{\partial x_2} x_2 + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_1(t,\theta_{ij})}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j. \tag{2.18}$$

Если h достаточно мало, то отсюда и из (2.1), (2.2) следует

$$\left|\tilde{v}_1(t,x)\right| \geq \left|v_1\right| + \left\|\tilde{v}(t,x)\right\|_{C^1(\Omega)} h^{1/2} - \\ -M\left\|v(t,x)\right\|_{C^2(\Omega)} h \geq m\left|v_1\right|. \tag{2.19}$$

Из (2.17) и (2.13) вытекает, что для $k(\tau,x) = v^2(\tau,x) / v^1(\tau,x)$ справедливо неравенство (2.14). Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. *Найдется r_0 такое, что при достаточно малых $h > 0$ из условия $z_2^0 = z_2(\tau;t,x) \leq r_0 h$ вытекает, что*

$$x_2 \leq m_1 z_2^0, \left|x_1\right| \leq m_2\left|z_1^0\right|. \tag{2.20}$$

Доказательство леммы 2.2. Пусть $z = z(\tau(t,x);t,x) \in \Gamma(h)$, $\tau_0 = \tau(t,x)$, $z^0 = z(\tau_0;t,x)$,

$$\tau_* = \{\sup_\tau : z(s;t,x) \in U(h),\, \tau(t,x) \leq s \leq \tau\},$$

а $z^* = z(\tau_*;t,x)$. В силу $v_1(\tau,x) > 0$ при $x \in U(h)$ для функции $z_1 = z_1(\tau;t,x)$, $\tau(t,x) \leq \tau \leq \tau_*$, существует обратная $\tau = \varphi(z_1)$. При этом $z_2 = g(z_1) \equiv z_2(\varphi(z_1);t,x)$ определяет кривую $z_2 = g(z_1)$, $z_1 \in [z_1^0, z_1^*]$, лежащую в $U(h)$.

Очевидно, что $(z^0 = (z_1^0, z_2^0))$

$$g(z_1) = g(z_1^0) + \int_{z_1^0}^{z_1} g'(s)ds, \quad z_1^0 \leq z_1 \leq z_1^*. \tag{2.21}$$

Из (2.13) и (2.14) следует, что $\left(g(z_1) > 0\right)$

$$g(z_1) \leq g(z_1^0) + \int_{z_1^0}^{z_1}\left|g'(s)\right|ds +$$

$$\int_{z_1^0}^{z_1} k(\varphi(s), s, g(s))ds \leq$$

$$g(z_1^0) + \int_{z_1^0}^{z_1}\left|v^2(\tau(s), s, g(s)) / \right| v^1(\tau(s), s, g(s))ds \leq$$

$$\leq g(z_1^0) + M\int_{z_1^0}^{z_1} g(s)ds.$$

Из последнего интегрального неравенства следует, что

$$g(z_1) \leq g(z_1^0)\exp(M(z_1 - z_1^0)),\ z_1 \in [z_1^0, z_1^*]. \tag{2.22}$$

Пусть $z^0 \in \Gamma(h / n)$. Тогда $z_2^0 \leq h / n$, $z_2^0 = g(z_1^0) \leq \dfrac{h}{n}$, $z_1^0 = (z_2^0)^{1/2} \leq \left(\dfrac{h}{n}\right)^{1/2}$, и из (2.22) вытекает, что

$$g(z_1) \leq \frac{h}{n} g(z_1^0)\exp(M(z_1 - z_1^0)),\ z_1 \in [z_1^0, z_1^*].$$

Отсюда следует, что при достаточно большом n справедливо неравенство

$$g(z_1) \leq \frac{Mh}{n},\ z_1 \in [z_1^0, z_1^*].$$

В свою очередь, это означает, что траектория $z(\tau;t,x)$, для которой $z^0 = z(\tau(t,x);\,t,x) \in \Gamma(h / n)$, $\tau(t,x) \leq \tau \leq \tau_*$, лежит в $U(h / 3)$.

Отсюда нетрудно вывести, что тогда $z_1 = x_1, \tau_* = t$. Следовательно, если $z^0 \in \Gamma(h / n)$, то x обязательно принадлежит $U(h)$, а соотношение (2.21) и неравенство (2.20) справедливы при всех $z_1 \in [z_1^0, x_1]$.

Итак, если r_0 достаточно мало, а $z^0 = z(\tau(t,x);t,x) \in \Gamma(r_0 h)$, то кривая $z_2 = g(z_1) \in U(h)$ при всех $z_1 \in [z_1^0, z_1^*]$.

Так как $g(x_1) = x_2$, а $g(z_1^0) = z_2^0$, то из (2.22) вытекает первое неравенство (2.20).

Так как для всех $x \in U(h)$ выполняется неравенство $x_2 \geq x_1^2$, то из первого неравенства (2.20) следует второе.

Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. *Пусть* $x \in \Omega_+(t)$, $z = z(\tau(t,x);t,x) \in \Gamma(h)$. *Пусть*

$$(\overline{v}_2^1)'(0) - 2v_1(0) \neq 0. \tag{2.23}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\left|\frac{\partial \tau(t,x)}{\partial x_i}\right| \leq M\left(\left\|v\right\|_{0,1}\right)\left|z_1\right|^{-1},\ i = 1,2. \tag{2.24}$$

Доказательство леммы 2.3. Так как $\Gamma(h)$ задается как $z_2 = z_1^2$, то в точке $z \in \Gamma(h)$ внешняя нормаль $n(z) = (2z_1, -1)$, и формулы (2.6) имеют вид

$$\frac{\partial \tau(t,x)}{\partial x_1} = -(2z_1(\tau(t,x);t,x)\frac{\partial z_1(\tau(t,x);t,x))}{\partial x_1} - \\ - \frac{\partial z_2(\tau(t,x);t,x)}{\partial x_1})\psi^{-1}(z(\tau(t,x);t,x)); \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial \tau(t,x)}{\partial x_2} = -(2z_1(\tau(t,x);t,x)\frac{\partial z_1(\tau(t,x);t,x))}{\partial x_2} - \\ - \frac{\partial z_2(\tau(t,x);t,x)}{\partial x_2})\psi^{-1}(z(\tau(t,x);t,x)); \tag{2.26}$$

$$\psi(z) = v_2^1(z) - 2z_1 v_1^1(z). \tag{2.27}$$

Из (2.25) следует, что

$$\left|\frac{\partial \tau(t,x)}{\partial x_1}\right| \leq (2\left|z_1(\tau(t,x);t,x)\right|\left|\frac{\partial z_1(\tau(t,x);t,x)}{\partial x_1}\right| +$$

$$|\frac{\partial z_2(\tau(t,x);t,x)}{\partial x_1}|)|\psi^{-1}(x)|\equiv G|\psi^{-1}(x)|. \quad (2.28)$$

Из (2.28) следует, что

$$\left|G\right|\le M(\left\|v\right\|_{0,1}). \quad (2.29)$$

Рассмотрим $\tilde{\psi}(z_1)\equiv\psi(z_1,z_1^2)$. Тогда $\tilde{\psi}(z_1)=\overline{v}_2^1(z_1)-2z_1\overline{v}_1^1(z_1)$. Очевидно, что $\tilde{\psi}(0)=\overline{v}_2^1(0)$. Так как

$$\tilde{\psi}'(z_1)=(\overline{v}_2^1(z_1)'-2\overline{v}_2^1(z_1)-2z_1(v_2^1(z_1))',$$

то в силу (2.23) $\tilde{\psi}'(0)\ne 0$, и справедливо

$$\tilde{\psi}(z_1)=(\overline{v}_2^1(z_1))'-2(\overline{v}_1^1(z_1))'+o(z_1).$$

Отсюда следует, что

$$|\tilde{\psi}(z_1)|\ge m|z_1|.$$

Следовательно,

$$|\psi(x)|^{-1}\le m|z_1(\tau(t,x);t,x)|^{-1}. \quad (2.30)$$

Из (2.28), (2.29) и (2.30) вытекает (2.24).

Неравенство (2.24) для $i=1$ доказано. Неравенство (2.24) для $i=2$ доказывается аналогично.

Лемма 2.3 доказана.

Заметим, что условие (2.23) суть условие (1.9) для границы $z_2=z_1^2$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2

Полагая $u(t,x)=v(t,x)-\hat{v}(x)$, перепишем задачу (1.1)—(1.4) в виде

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+u_i(t,x)\partial u(t,x)/\partial x_i-\mu_0\Delta u(t,x)+ \\ +\operatorname{grad}p(t,x)=\Phi(t,x),(t,x)\in Q_T; \quad (3.1)$$

$$\operatorname{div}u(t,x)=0,(t,x)\in Q_T;\int_\Omega p(t,x)dx=0;\ t\in[0,T]; \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned}\Phi(t,x)&=f(t,x)-\hat{v}_i(x)\frac{\partial\hat{v}_i(x)}{\partial x_i}+\\ &+u_i(t,x)\frac{\partial\hat{v}_i(x)}{\partial x_i}+\hat{v}_i(x)\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial x_i}-\\ &-\mu_1\operatorname{Div}\int_{\tau(t,x)}^t\mathcal{E}(u)(z(s;t,x))ds+\\ &+\mu_1\operatorname{Div}\int_{\tau(t,x)}^t\mathcal{E}(\hat{v})(s,z(s;t,x))ds+\\ &\mu_0\Delta\hat{v}(x)\equiv\sum_{k=1}^7 J_k(t,x);\end{aligned} \quad (3.3)$$

$$u(0,x)=v^0(x)-\hat{v}(x),\ x\in\mathbf{\Omega}_0, \quad (3.4)$$

$$u(t,x)=0, \\ (t,x)\in S_T=\{(t,x):t\in[0,T],x\in\mathbf{\Gamma}.\} \quad (3.5)$$

В [1] установлено, что

$$\int_0^t|\frac{\partial u(s,x)}{\partial t}|_0^2ds+|u(t,x)|_1^2+\int_0^t|u(s,x)|_2^2ds\le \\ M(\int_0^t|\Phi(s,x)|_0^2ds+|u_0(x)|_1^2),\ 0\le t\le T \quad (3.6)$$

с не зависящей t от константой.

Получим оценку $\int_0^t|\Phi(s,x)|_0^2ds$. Легко видеть, что

$$|J_2(t,x)|\le M\left\|\hat{v}_x(x)\right\|_{C^1(\Omega)};$$

$$|J_3(t,x)|_0\le M\left\|\hat{v}(x)\right\|_{C(\Omega)}|u(t,x)|_0;$$

$$|J_4(t,x)|_0\le M\left\|\hat{v}_x(x)\right\|_{C(\Omega)}|u(t,x)|_1.$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^t|J_3(s,x)|_0^2ds\le\bar{M}\int_0^t|u(s,x)|_0^2ds;$$

$$\int_0^t|J_4(s,x)|_0^2ds\le\bar{M}\int_0^t|u(s,x)|_1^2ds.$$

Здесь и ниже через $\bar{M}$ будем обозначать константу, зависящую от $\hat{v}$.

Дифференцируя J_5, имеем

$$\begin{aligned}J_5(t,x)&=\mu_1(\mathcal{E}(u)(\tau(t,x),z(;t,x))\nabla\tau(t,x)-\\ &\mu_1\int_{\tau(t,x)}^t\frac{\partial^2u_i(s,z(s;t,x))}{\partial x_j\partial x_k}\frac{\partial z_k(s;t,x))}{\partial x_j}ds-\\ &\mu_1\int_{\tau(t,x)}^t\frac{\partial^2u_j(s,z(s;t,x))}{\partial x_i\partial x_k}\frac{\partial z_k(s;t,x)}{\partial x_j}ds)=\\ &=\mu_1\sum_{k=1}^3 J_{5k}(t,x).\end{aligned} \quad (3.7)$$

Оценим $\left\|J_{51}\right\|_{L_2(Q_t)}$. Очевидно, что

$$|J_{51}|\le M|u_x(\tau(t,x),z(\tau(t,x);t,x))||\nabla\tau(t,x)|.$$

Далее,

$$\begin{aligned}&\left|J_{51}(t,x)\right|_0^2\le\\ &\le M\int_\Omega\left|u_x(\tau(t,x),z(\tau(t,x);t,x))\right|^2\left|\nabla\tau(t,x)\right|^2dx=\\ &=M\int_{\Omega_+(t)}\left|u_x(\tau(t,x),z(\tau(t,x);t,x))\right|^2\left|\nabla\tau(t,x)\right|^2dx.\end{aligned} \quad (3.8)$$

Тогда

$$\left\|J_{51}(t,x)\right\|_{L_2(Q_t)}^2\le \quad (3.9)$$

$$M\int_0^t(\int_{\Omega_+(s)}\left|u_x(\tau(s,x),z(\tau(s,x);s,x))\right|^2\left|\nabla\tau(s,x)\right|^2dx)ds=$$

$$M(\int_0^t\int_{\Omega_{+,<h}(s)}\left|u_x(\tau(s,x),z(\tau(s,x);s,x))\right|^2\left|\nabla\tau(s,x)\right|^2dx)ds+$$

$$\int_0^t \int_{\Omega_{+,\geq h}(s)} \left| u_x(\tau(s,x), z(\tau(s,x);s,x)) \right|^2 \left| \nabla \tau(s,x) \right|^2 dx) ds = \\ = M(R_1 + R_2),$$

где

$$\Omega_{+,<h}(t) = \{x : x \in \Omega_+(t),\, z(\tau(t,x);t,x) \in \Gamma(h)\},$$

$$\Omega_{+,\geq h}(t) = \{x : x \in \Omega_+(t),\, z(\tau(t,x);t,x) \notin \Gamma(h)\}.$$

Оценим слагаемое R_1.

Рассмотрим отображение $\Upsilon_s : \Omega_{+,<h}(s) \to \to S_T = [0,T] \times \Gamma$, заданное формулой

$$\Upsilon_s(x) = (\gamma_1(x), \gamma_2(x)), \\ \gamma_1(x) = \tau(s,x), \gamma_2(x) = z_1(\tau(s,x);s,x). \tag{3.10}$$

Пусть $Z(h,s) = \Upsilon_s : \Omega_{+,<h}(s)$ — образ $\Omega_{+,<h}(s)$ при отображении Υ_s. С помощью соотношений (2.26) показывается, что если $z(\tau(s,x);s,x) \in \Gamma(h)$, то якобиан $I(s,x) = \det \dfrac{d\Upsilon_s}{dx}$ имеет вид

$$I(s,x) = \psi^{-1}(z(\tau(s,x);s,x)).$$

Оценим слагаемое R_1. В силу (2.24) имеем

$$\left\| J_{51} \right\|^2_{L_2(\Omega_{+,<h}(s))} \leq M \int_{\Omega_{+,\leq h}(s)} \left| u_x(\tau(s,x), z(\tau(s,x);s,x)) \right|^2 \times \\ | z_1(\tau(s,x);s,x) |^{-2}\, dx. \tag{3.11}$$

Делая замену переменной $(\tau, z_1) = (\gamma_1(x), \gamma_2(x))$ учитывая, что $| \psi(z) | \equiv | \tilde{\psi}(z_1) | \leq M z_1$, получаем

$$\left\| J_{51} \right\|^2_{L_2(\Omega_{+,<h}(s))} \leq \\ \leq M \int_{\Omega_{+,<h}(s)} \left| u_x(\tau, z_1, z_1^2) \right|^2 \left| z_1 \right|^{-1} d\tau dz_1. \tag{3.12}$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^t \left\| J_{51} \right\|^2_{L_2(\Omega_{+,<h}(s))} ds \leq \\ \leq M \int_0^t (\int_{\Omega_{+,<h}} | u_x(\tau(s,x), z(\tau(s,x);s,x)) |^2 \times \\ | z_1(\tau(s,x);s,x) |^{-2} dx) ds \leq \\ \leq M \int_0^t (\int_{Z(h,s)} | u_x(\tau, z_1, z_1^2) |^2 | z_1 |^{-1} d\tau dz_1) ds, \tag{3.13}$$

где

$$Z(h,t) = \{(\tau, z_1) : \tau = \tau(t,x),_1 = \\ = z_1(\tau(t,x);t,x),\, x \in \Omega_{+,<h}(s)\}.$$

Лемма 3.1. *Для* $(\tau, z_1) \in Z(h,t)$ *справедливо неравенство*

$$\tau \geq t + m_1 z_1, - h_{1/2} \leq z_1 \leq h_{1/2}, 0 \leq \tau \leq t, \tag{3.14}$$

где $m_1 > 0$ *не зависит от* t, z_1, τ.

Доказательство леммы 3.1. Из (1.4) вытекает, что $\left(u = v - \hat{v}\right)$

$$z_1(\tau;t,x) = x_1 + \int_t^\tau \tilde{v}_1(s, z(s;t,x)) ds, \\ \tau \in [0,T],\, (t,x) \in Q_T. \tag{3.15}$$

Следовательно,

$$\int_\tau^t \tilde{v}_1(s, z(s;t,x)) ds = x_1 - z_1(\tau;t,x). \tag{3.16}$$

По предположению, $v_1^1(0) > 0$. В силу гладкости $\tilde{v}(\tau, x)$ и оценки (2.1) для $z \in \Omega_{+,<h}(t)$ справедливо неравенство $v_1(\tau, z) > m_2 > 0$. При $\tau = \tau(t,x)$ из получаем

$$m_3(t - \tau) \leq | x - z_1 | \leq | x_1 | + | z_1 |. \tag{3.17}$$

Отметим, что в силу $v_1(\tau, z) > m_3 > 0$ при $(\tau, z_1) \in Z(h,t)$ всегда $z_1 < 0$, так как при $z_1 < 0$ траектория $z(s;t,x)$ не может "втекать" в Ω из точки $z(\tau(t,x);t,x)$ границы. Отсюда и из (3.16) и (2.20) вытекает, что

$$m_3(t - \tau) \leq | x - z_1 | \leq \\ \leq m_4 | z_1 | + | z_1 | \leq m_5 | z_1 |. \tag{3.18}$$

Отсюда следует (3.15).

Лемма1 доказана.

Воспользовавшись леммой 3.1 и (3.13), получаем, что

$$\int_0^t \left\| J_{51} \right\|^2_{L_2(\Omega_{+,<h}(s))} ds \leq \\ \leq M \int_0^t (\int_{Z(h,s)} | u_x(\tau, z_1, z_1^2) |^2 | z_1 |^{-1} d\tau dz_1) ds \leq \\ M \int_0^t (\iint_D | u_x(\tau, z_1, z_1^2) |^2 | z_1 |^{-1} d\tau dz_1) ds, \tag{3.19}$$

где

$$D = (\tau \geq s + m z_1) \cap (z_1 \leq 0, | z_1 | \leq h^{1/2}.$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^t \left\| J_{51} \right\|^2_{L_2(\Omega_{+,<h}(s))} ds \leq \\ \leq M \int_0^t (\int_0^s (\int_{-h^{1/2}}^{(\tau-s)/m} \left| u_x(\tau, z_1, z_1^2) \right|^2 \left| z_1 \right|^{-1} dz_1) d\tau) ds. \tag{3.20}$$

Применяя неравенство Гельдера с показателями p, $q = p / (p-1) \in (1, +\infty)$, которые выберем позже, получаем

$$\left\| J_{51} \right\|^2_{L_2(0,t;\Omega_{+,<h}(s))} \leq M \int_0^t (\int_0^s \left\| u_x(\tau, z_1, z_1^2) \right\|^2_{L_{2p}[-h^{1/2}, h^{1/2}]} \times \\ \int_{-h^{1/2}}^{(\tau-s)/m)} | z_1 |^{-q} dz_1)^{1/q} d\tau) ds. \tag{3.21}$$

Далее, вычисляя последний интеграл, имеем

$$\left\| J_{51} \right\|^2_{L_2(0,t;\Omega_{+,<h}(s))} \leq \\ \leq M \int_0^t (\int_0^s \left\| u_x(\tau, z_1, z_1^2) \right\|^2_{L_{2p}[-h^{1/2}, h^{1/2}]} \left| \tau - s \right|^{-1/p} d\tau) ds. \tag{3.22}$$

Меняя порядок интегрирования, получаем

$$\left\|J_{51}\right\|^2_{L_2(0,t;\Omega_{+,<h}(s))} \le M\int_0^t\int_\tau^t \left|\tau - s\right|^{-1/p} ds \times$$

$$\times\left\|u_x(\tau, z_1, z_1^2)\right\|^2_{L_{2p}[-h^{1/2},h^{1/2}]} d\tau \le$$

$$\le \int_0^t \left\|u_x(\tau, z_1, z_1^2)\right\|^2_{L_{2p}[-h^{1/2},h^{1/2}]} d\tau. \qquad (3.23)$$

Далее, нетрудно видеть, что

$$\left\|u_x(\tau, z_1, z_1^2)\right\|_{L_{2p}[-h^{1/2},h^{1/2}]} \le M\left\|u_x(\tau, z)\right\|_{L_{2p}(\Gamma)}. \quad (3.24)$$

В силу теорем вложения (см.[6], стр. 411) имеем

$$\left\|u_x(\tau, z)\right\|^2_{L_{2p}(\Gamma)} \le M\left\|u(\tau, z_1, z_1^2)\right\|_{W_2^{1/2(1-1/p)}(\Gamma)} \le$$

$$\le M\left\|u(\tau, z)\right\|_{W_2^{1/2(1-1/p)+1/2}(\Omega)} =$$

$$= M \mid u_x(\tau, z) \mid_{2-1/2p}. \qquad (3.25)$$

Используя известное неравенство моментов

$$\mid u(\tau, z) \mid_{2-1/2p} \le M \mid u(\tau, z) \mid_2^{1-1/4p} \mid u(\tau, z) \mid_0^{1/4p},$$

и (3.25) получаем, что

$$\left\|u_x(\tau, z)\right\|^2_{L_{2p}(\Gamma)} \le \left|u(\tau, z)\right|_2^{2-1/2p} \left|u(\tau, z)\right|_0^{1/2p}. \quad (3.26)$$

Из (3.23), (3.24), (3.25) с помощью неравенства Гельдера для $r = \dfrac{4p}{4p-1}$, $r' = 4p$, имеем при произвольном $\varepsilon > 0$

$$\left\|J_{51}\right\|^2_{L_2(0,t;\Omega_{+,<h}(s))} \le M\int_0^t \left|u(\tau, z)\right|_2^{2-1/2p} \left|u(\tau, z)\right|_0^{1/2p} d\tau \le$$

$$M(\int_0^t \mid u(\tau, z) \mid_2^2 d\tau)^{1/r} (\int_0^t \mid u(\tau, z) \mid_0^2 d\tau)^{1/r'} \le$$

$$\varepsilon\int_0^t \mid u(\tau, z) \mid_2^2 d\tau + C(\varepsilon)\int_0^t \mid u(\tau, z) \mid_0^2 d\tau. \quad (3.27)$$

Таким образом,

$$R_1 \le \varepsilon\int_0^t \mid u(\tau, z) \mid_2^2 d\tau + C(\varepsilon)\int_0^t \mid u(\tau, z) \mid_0^2 d\tau.$$

Аналогичная оценка для R_2 устанавливается таким же образом, но проще, с использованием оценки (2.7). Из оценок R_1, R_2 и (3.9) вытекает, что

$$\left\|J_{51}\right\|^2_{L_2(Q_t)} \le \varepsilon\int_0^t \mid u(\tau, z) \mid_2^2 d\tau + C(\varepsilon)\int_0^t \mid u(\tau, z) \mid_0^2 d\tau.$$

Оценим J_{52}. Легко видеть, что

$$\left|J_{52}(t, x)\right| \le$$

$$\le MM_0\int_{\tau(t,x)}^t \left|u_{xx}(s, z(s; t, x))\right| \left\|z_x(s; t, x)\right\|_{C(\Omega)} ds. \qquad (3.28)$$

Отсюда следует, что

$$\mid J_{52}(t, x) \mid_0^2 \le M\int_\Omega\int_{\tau(t,x)}^t \mid u_{xx}(s, z(s; t, x)) \mid^2 ds dx.$$

Проводя преобразования, аналогичные проведенным в [1] при оценке слагаемого I_4 из соотношения (5.2), получаем, что

$$\mid J_{52}(t, x) \mid_0^2 \le M\int_0^t \mid u_{xx}(s, z(s; t, x)) \mid ds \le$$

$$\le M\int_0^t \mid u(t, x)) \mid_2^2 ds.$$

Тогда имеем

$$\int_0^t \mid J_{52}(s, x) \mid_0^2 ds \le M\int_0^t\int_0^\tau \mid u(s, x) \mid_2^2 ds d\tau.$$

Аналогично оценивается и J_{53}.

Для J_6 и J_7 с помощью несложных преобразований получаем, что

$$\left\|J_6\right\|^2_{L_2(Q_t)} \le M\left\|\hat{v}(x)\right\|_{C^2(\Omega)} \le M\left\|v^1(x)\right\|_{C^2(\Gamma)}.$$

Учитывая оценки слагаемых $J_k, k = 1, \ldots, 7$, (3.6), (1.8) и выбирая $\varepsilon > 0$ достаточно малым, получаем, что

$$\int_0^t \left|\frac{\partial u(s, x)}{\partial t}\right|_0^2 ds + \mid u(t, x) \mid_1^2 + \int_0^t \mid u(s, x) \mid_2^2 ds \le \quad (3.29)$$

$$M(\left\|v^1(x)\right\|_{C^2(\Gamma)}, \left|u^0(x)\right|_1, \left\|f(t, x)\right\|_0) +$$

$$+\int_0^t\int_0^\tau \left|u(s, z(s; t, x))\right|_2^2 ds d\tau.$$

Полагая $q(t) = \int_0^t \mid u(s, x) \mid_2^2 ds$, из (3.29) имеем

$$q(t) \le M_1 + M_2\int_0^t \mid u(s, x) \mid_2^2 ds.$$

Отсюда вытекает, что

$$q(t) \le M_3,\ M_3 = M(\left\|v^1(x)\right\|_{C^2(\Gamma)}, \left|u^0(x)\right|_1, \left\|f(t, x)\right\|_0).$$

Из этой оценки с учетом неравенства $\left|u^0(x)\right|_1 \le M(\left|v^0(x)\right|_1 + \left|\hat{v}(x)\right|_1)$ и (3.29) следует оценка (1.10).

Теорема 1.2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Орлов В. П.* Об одной априорной оценке решений неоднородной начально-краевой задачи динамики вязкоупругой среды / В. П. Орлов // Вестник ВГУ, 2012, № 1. С. 171—179.

2. *Темам Р.* Уравнение Навье-Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. М.: Мир, 1987. 408 с.

3. *Звягин В. Г.* О слабых решениях начально-краевой задачи для регуляризованной модели вязкоупругой жидкости / В. Г. Звягин, В. Т. Дмитриенко // Дифференциальные уравнения. 2002. № 12. Т. 38. С. 1633—1645.

4. *Звягин В. Г.* О сильных решениях начально-краевой задачи для регуляризованной модели несжимаемой вязкоупругой жидкости / В. Г. Звягин, В. Т. Дмитриенко // Известия ВУЗов. Математика. 2004. № 9. Т. 508. С. 24—40.

5. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О. А. Ладыженская. М.: Наука, 1970. 204 с.

6. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. / Х. Трибель. М.: Мир, 1980. 664 с.

7. *Orlov V. P.* On mathematical models of a viscoelasticity with a memory / V. P. Orlov, P. E. Sobolevskii // Differential and Integral Equations. 1991. № 1. V. 4. P. 103—115.

8. *Соболевский П. Е.* О дробных нормах в банаховом пространстве, порожденном неограниченным оператором / П. Е. Соболевский. УМН. 1964. № 6. Т. 19. С. 219—222.

9. *Бибиков Ю. Н.* Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Н. Бибиков. Ленинград : Изд-во Ленинградского ун-та, 1981. 232 с.

10. *Бесов О. В.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. / О. В. Бесов и др. М.: Мир, 1980. 664 с.

11. *Литвинов В. Г.* Движение нелинейно-вязкой жидкости. / В. Г. Литвинов. М.: Наука, 1982. 376 с.

Орлов В. П., доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования математического факультета, Воронежский государственный университет

E-mail: orlov_vp@mail.ru

Orlov V. P., Doct. Sc. (Phys. and Math.), professor at the Share of Mathematical Modelling of Department of Mathematics, Voronezh State University

E-mail: orlov_vp@mail.ru