УДК 512.71

НЕПРИВОДИМЫЕ НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ПОДГРУППЫ ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ НАД КОЛЬЦОМ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

В. И. Матюхин

Лукишская средняя школа (г. Вильнюс, Литва)

Поступила в редакцию 14.09.2011 г.

Аннотация. Статья посвящена изучению нильпотентных подгрупп матричных групп над кольцом Z.
Ключевые слова: матричная группа; нильпотентная подгруппа; неприводимая подгруппа; расширение кольца; p-подгруппы Силова; поле; класс идеалов.

Abstract. The article is devoted to the investigation nilpotent matrices groups over basic number ring Z.
Key words: matrices group; nilpotent subgroup; irreducible subgroup; dilatation over a ring; Sylow p-subgroups; the class of ideals; field.

ОБОЗНАЧЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ И КОММЕНТАРИИ.

Через $Z(\varepsilon)$ будем обозначать кольцо целых величин поля $Q(\varepsilon)$, где Q — поле рациональных чисел. Подгруппу Γ группы $GL(n,Z)$ будем называть неприводимой, если в свободном n-членном Z-модуле M, в котором действует группа, нет подмодуля размерности меньше n, инвариантного относительно преобразований группы Γ. Будем говорить, что группа Γ импримитивна, если существует такой базис модуля M, что последний в этом базисе представим прямой суммой транзитивно перемещаемых группой Γ подмодулей.

Модуль — абелева группа над кольцом целых чисел. Модуль M называется прямой суммой своих подмодулей, если всякий его элемент единственным способом записывается в виде суммы элементов, взятых в этих подмодулях.

Множество GL(n,P) всех обратимых матриц степени n над полем P является группой относительно обычного умножения матриц. Её называют полной линейной группой. Специальная линейная группа SL(n,P) — подгруппа полной линейной группы, матрицы которой имеют определители, равные единице.

Если элементы группы Γ умножить слева (или справа) на элемент g, то элементы Γ подвергнутся некоторой перестановке S. Представление g→S называется регулярным представлением Γ.

Пусть Γ — группа, Z_1 — её центр, то есть множество всех элементов Γ, которые перестановочны со всеми элементами группы, Z_2/Z_1 — центр группы Γ/Z_1, Zj+1/Zj — центр группы

Γ/Zj. Если для конечного числа l Zl = Γ, то группа Γ называется нильпотентной, ряд

E ⊂ Z1⊂ Z2 ⊂ …⊂ Zl = Γ называется верхним центральным рядом группы Γ, а число l — классом нильпотентности Γ.

Нильпотентные группы класса 2 называются метабелевыми.

Если порядки всех элементов группы конечны, то группа называется периодической. Периодическая группа, порядки элементов которой являются степенями простого числа p, называется p — группой. В честь норвежского математика Л. Силова максимальные p — подгруппы конечных (а часто и бесконечных) групп называются силовскими p — подгруппами.

Идеал, порождённый одним элементом, называется главным идеалом.

Целостное кольцо (область целостности) — коммутативное кольцо с единицей и без делителей нуля, — в котором каждый идеал является главным, называется кольцом главных идеалов (Z — кольцо главных идеалов).

Подгруппу Γ группы $GL(n,Z)$ будем называть неприводимой, если в свободном n - членном Z-модуле M, в котором действует группа, нет подмодуля размерности меньше n, инвариантного относительно преобразований группы Γ.

Будем говорить, что группа Γ импримитивна, если существует такой базис модуля M, что последний в этом базисе представим прямой суммой транзитивно перемещаемых группой Γ подмодулей. В противном случае группа называется примитивной.

Нильпотентные подгруппы полной линейной группы над произвольным полем Р были изучены Д. А. Супруненко (см. [8]).

Мы будем изучать максимальные неприводимые нильпотентные подгруппы группы $GL(p,Z)$, где p — простое число, Z — кольцо целых рациональных чисел. Будет показано, что указанные группы либо совпадают с группой единиц расширения p- ой степени кольца Z, либо метабелевы ($p = 2$).

Нами рассматриваются также неприводимые p- подгруппы Силова группы $GL(n,Z)$. Отдельно изучаются случаи $p = 2$ и $p > 2$. Показано, что в $GL(4,Z)$, имеются неизоморфные 2-подгруппы Силова.

МАКСИМАЛЬНЫЕ НЕПРИВОДИМЫЕ НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ПОДГРУППЫ ГРУППЫ GL(p,Z)

1.*Пусть сначала p=2, т.е. p является простым четным числом.*

Лемма 1. *Если Γ—-неприводимая нильпотентная подгруппа группы $GL(2,Z)$, а Z_1 — её центр, то либо Z_1 — $\{\pm 1\}$, либо Z_1 является подгруппой мультипликативной группы квадратичного расширения кольца Z.*

Доказательство. Линейная Z-оболочка группы Z_1 будет областью целостности. Обозначим через M свободный двучленный Z-модуль, в котором действует указанная в формулировке леммы группа Γ. Так как Z_1 — нормальный делитель неприводимой группы Γ, то по теореме 1, доказанной в работе в [11], существует такой модуль N, $N \cong M$, что его можно представить в виде прямой суммы инвариантных и неприводимых относительно Z_1 подмодулей N_1 и N_2 одинаковой размерности. Группа Γ перестановочна с элементами кольца $C = [Z_1]$, поэтому её можно рассматривать как подгруппу группы $GL(m,C)$, где $m \cdot (N_i : Z) = 2$, $i = 1, 2$. Из неприводимости подмодулей N_i следует: $N_i : Z = C : Z$. Следовательно, если $C : Z = 1$, то $Z_i = \{\pm 1\}$, а если $C : Z = 2$, то $\Gamma \subset GL(1,C) = C^*$, где C^* — группа единиц кольца C. Лемма доказана.

В силу работы [12] и включения $GL(n,Z) \subset GL(n,Q)$, где Q — поле рациональных чисел, индекс центра неприводимой нильпотентной группы Γ не превосходит некоторой границы, зависящей лишь от n. Не превосходит границы, зависящей лишь от n, также класс нильпотентности группы Γ.

Покажем, что неприводимые нильпотентные подгруппы группы $GL(2,Z)$ либо абелевы, либо метабелевы. Пусть сначала $Z_1 = \{\pm 1\}$. Справедлива

Лемма 2. *Если Γ — неприводимая нильпотентная подгруппа группы $GL(2,Z)$, то порядок каждого элемента фактор-группы Z_2/Z_1, где Z_2 — второй гиперцентр группы Γ, является делителем числа 2.*

Доказательство. Пусть $z \in Z_2$ и $g \in \Gamma$. Тогда $zg = \pm gz$. Отсюда $z^2 g = g z^2$, т.е. $z^2 \in Z_1$. Следовательно, порядок фактор-группы Γ/Z_1 является степенью числа 2. Но тогда и порядок группы Γ есть степень числа 2. Из [5] следует, что порядок группы Γ не превосходит восьми. Так как $Z_1 = \{\pm 1\}$, то группа Γ не может быть ни циклической, ни элементарной абелевой и потому её порядок равен восьми. В [5] показано, что все разрешимые подгруппы восьмого порядка группы $GL(2,Z)$ сопряжены в $GL(2,Z)$ с группой

$$\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Эта группа и определяет единственный класс максимальных неприводимых нильпотентных подгрупп группы $GL(2,Z)$, у которых $Z_1 = \{\pm 1\}$. Лемма доказана.

Пусть теперь $Z_1 \neq \{\pm 1\}$. Тогда в силу леммы 1 максимальные неприводимые нильпотентные подгруппы группы $GL(2,Z)$ совпадают с группой единиц квадратичного расширения кольца Z. Указанная группа единиц будет конечной (см. [13]) лишь в случае мнимого квадратичного расширения кольца Z, причём она отлична от ± 1 только тогда, когда дискриминант Δ расширения равен -3 или -4.

Пусть $\Delta = -4$. Группа единиц квадратичного кольца $Z(\sqrt{-1})$ с $\Delta = $ -4 будет циклической группой четвёртого порядка. $Z(\sqrt{-1})$ — кольцо главных идеалов. Ввиду [14] и сопряжённости в $GL(2, Q)$ циклических подгрупп четвёртого порядка (см. [3]), циклические подгруппы четвёртого порядка группы $GL(2,Z)$ сопряжены в $GL(2,Z)$ с подгруппой

$$\mathrm{H} = \left\{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\},$$

выписанной выше группы восьмого порядка Γ.

Регулярное представление группы единиц квадратичного кольца с $\Delta = -3$, ввиду [14] и наличия в кольце $Z(\sqrt{-3})$ лишь одного класса идеалов, имеет вид:

$$G = \left\{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

Группа G является максимальной неприводимой нильпотентной подгруппой группы $GL(2,Z)$.

Из сказанного и из [14] следует, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Максимальные неприводимые нильпотентные подгруппы группы $GL(2,Z)$ разбиваются на следующие классы сопряжённых в $GL(2,Z)$ подгрупп:*

$$1)\quad \Gamma = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\};$$

$$2)\ \mathrm{G} = \left\{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\};$$

$$3)\ \mathrm{H}_{ki} = g_i^{-1}\left\{-E_2;\varepsilon_{ok}\right\}g_i,$$

где $\varepsilon_{ок}$ — регулярное представление основной единицы вещественного квадратичного расширения R_k кольца Z, содержащего h классов идеалов; $i = 1,2,\ldots,h$; g_i — матрица перехода от базиса кольца к базису идеала этого кольца.

2. Пусть теперь p является нечетным простым числом.

В группе $GL(p,Z)$ нет неприводимых нильпотентных подгрупп, у которых $Z_1=\{\pm1\}$ (см. [8]). Следовательно, центр неприводимой нильпотентной подгруппы группы $GL(p,Z)$ совпадает с подгруппой мультипликативной группы $Z^*(\theta)$ расширения p- ой степени кольца Z. Если группа Γ максимальна, то $\Gamma = Z^*(\theta)$.

Теорема 2. *В $GL(p,Z)$, где p — нечётное простое число, максимальные неприводимые нильпотентные подгруппы совпадают с группой единиц расширения p-ой степени R кольца Z. Если в кольце R имеется h классов идеалов, то каждой такой группой определяется h классов сопряжённых в $GL(p,Z)$ максимальных неприводимых нильпотентных подгрупп группы $GL(p,Z)$.*

Доказательство. Любая единица ε кольца R представима в виде произведения степеней некоторых основных единиц: $\varepsilon = \pm\varepsilon_1^{\alpha_1}\cdot\varepsilon_2^{\alpha_2}\ldots\varepsilon_n^{\alpha_n}$ (см. [13]). Так как степень R над Z равна p, то расширение кольца Z с помощью любой единицы ε_i совпадает с R. Если в кольце R имеется h классов идеалов, то пусть r_i — матрицы перехода от базиса кольца R к базисам идеалов этого кольца. Тогда группы, сопряжённые с максимальной неприводимой нильпотентной подгруппой группы $GL(p,Z)$, т.е. с R^*, с помощью матриц r_i, и определяют указанные в теореме h классов групп.

Заметим для сравнения, что в $GL(n,D)$, где D — поле действительных чисел, нет неприводимых нильпотентных подгрупп ни при каком нечётном $n > 1$ (см. [9]).

3. Нетрудно видеть, что если n нечётное число, то в $GL(n,Z)$ нет неприводимых нильпотентных конечных подгрупп. Действительно, если Γ такая группа, а Z_1 её центр, то простые факторы порядков элементов фактор- группы Γ/Z будут делить n, т.е. являются нечётными числами. В силу этого порядки элементов группы Z_1 не могут быть все чётными (см. [8], стр. 62). А если в Z_1 есть элемент нечётного порядка $к$, то функция Эйлера $\varphi(к)$ делит n, т.е. n — чётное число, что противоречит предположению.

Отметим, что все максимальные периодические подгруппы группы $GL(n,Z)$ конечны и разбиваются на конечное число классов сопряжённых в $GL(n,Z)$ подгрупп.

НЕПРИВОДИМЫЕ P-ПОДГРУППЫ СИЛОВА ГРУППЫ GL(n,Z).

Строение p-подгрупп Силова группы $GL(n,P)$, где P — поле, было изучено Р. Т. Вольвачёвым в [3]. Рассмотрим строение неприводимых p-подгрупп Силова в полной линейной группе над кольцом целых рациональных чисел.

Из сказанного выше о периодических подгруппах группы $GL(n,Z)$ следует, что p- подгруппы Силова группы $GL(n, Z)$ по любому простому p конечны и разбиваются на конечное число классов сопряжённых в $GL(n, Z)$ подгрупп.

Обозначим через N_α^S матричное представление p-подгруппы Силова симметрической группы S_{p^α}, причём в каждой матрице единица заменена единичной матрицей порядка s. Через H_α^S будем обозначать диагональную группу матриц с элементами $h_1, h_2, \ldots, h_t$ на диагонали, где $t = p^\alpha$, а h_i пробегают независимо друг от друга некоторую подгруппу G группы $GL(n, Z)$, где $n = s \cdot p^\alpha$.

1. *Пусть сначала* $p = 2$. Как следует из [3], в $GL(n, Q)$, где Q — поле рациональных чисел, неприводимые 2-подгруппы имеются лишь при $n = 2^\alpha$. Так как в силу [11] неприводимая в $GL(n,Z)$ подгруппа остаётся неприводимой и в $GL(n, Q)$, то и в $GL(n,Z)$ неприводимые 2-подгруппы имеются лишь при $n = 2^\alpha$. При $n = 2$ из теоремы 1 следует

Теорема 3. *Все неприводимые 2-подгруппы Силова группы $GL(2,Z)$ сопряжены в $GL(2,Z)$ с группой $\Gamma = N_1^1 \cdot H_1^1(\pm 1)$.*

Покажем теперь, что в $GL(4,Z)$ есть неизоморфные неприводимые 2-подгруппы Силова.

Ясно, что группа $\Gamma = N_2^1 \cdot H_2^1(\pm 1)$ будет неприводимой 2-подгруппой Силова группы $GL(4,Z)$. Группа Γ импримитивна. Построим примитивную неприводимую 2-подгруппу Силова G группы $GL(4,Z)$. Если F — максимальный абелев нормальный делитель группы G, то имеем:$[F]$: $Z = m$, где $m/4$ (см. [11]). При $m = 4$ группа F совпадает с 2-подгруппой Силова мультипликативной группы кольца $Z(\varepsilon)$, где $\varepsilon^8 = 1$. Поэтому группа G/F изоморфна 2-подгруппе Силова H группы относительных автоморфизмов кольца $Z(\varepsilon)$, $G = \{H;\ F\}$. В круговом расширении кольца Z степени 2^2 имеется лишь один класс идеалов (см. [15]), поэтому все подгруппы группы $GL(4,Z)$, сопряженные в $GL(4,\ Q\ )$ с

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

сопряжены с F и в группе $GL(4,Z)$ (см. [14]).

Группа H является элементарной абелевой группой. Матрица

$$h = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

переводит элемент ε в ε^3, а матрица

$$h_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

переводит элемент ε в ε^5. Непосредственно проверяется, что группа

$$G1 = \{h; F\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

не сопряжена в $GL(4,Z)$ ни с одной из подгрупп $\Gamma = N_2^1 \cdot H_2^1(\pm 1)$. Следовательно, группа 32-го порядка

$$G = \{h; h_1; F\} =$$
$$= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

является неизоморфной с $\Gamma = N_2^1 \cdot H_2^1(\pm 1)$ 2-подгруппой Силова группы $GL(4,Z)$.

Подсчитаем порядок группы $\Gamma = N_\alpha^1 \cdot H_\alpha^1(\pm 1)$. Порядок группы N_α^1 равен 2^{n-1} (см. [8], стр. 68), а порядок группы $H_\alpha^1(\pm 1)$, как легко видеть, равен 2^n. Поэтому порядок группы Γ равен $d = 2^{2n-1}$. Ясно, что порядок остальных 2-подгрупп Силова группы $GL(n,Z)$ является делителем числа d.

2. *Пусть p — нечётное простое число.* Ввиду [10], в группе $GL(2,Z)$ неприводимые p-подгруппы могут быть лишь при $p = 3$.

Теорема 4. *Неприводимые 3-подгруппы Силова группы $GL(2,Z)$ сопряжены в $GL(2,Z)$ с группой*

$$\Gamma = \left\{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right\}.$$

Доказательство. Пусть g — 3-элемент группы $GL(2,Z)$. Так как в $GL(2,Q)$ все неприводимые 3-подгруппы Силова сопряжены с указанной в формулировке теоремы группой Γ (см. [3]), то матрица g сопряжена в $GL(2,Q)$ с некоторой матрицей из Γ. Характеристический полином $\lambda^2 + \lambda + 1$ матрицы g неприводим над полем Q, и в кольце $Z(\sqrt{-3})$ имеется лишь один класс идеалов. Поэтому все неприводимые 3-подгруппы Силова группы $GL(2,Z)$ сопряжены в $GL(2,Z)$ с Γ (см. [14]).

В силу [11] и теоремы 6 в [3] при $n > 1$ и $n \neq (p-1) \cdot p^{\alpha}$ в $GL(n,Z)$ нет неприводимых p-подгрупп. Нет в $GL(n,Z)$ неприводимых p-подгрупп и при $n < p-1$. Если же $n = p-1$, то неприводимые p-подгруппы Силова группы $GL(p–1,Z)$ являются p-подгруппами Силова мультипликативной группы кольца $Z(\varepsilon)$, где $Z(\varepsilon) : Z = p–1$ (см. [3] и [15]).

3. В группе $GL(n,Z)$ неприводимые p-подгруппы имеются лишь при $n = \varphi(p^{\alpha})$, где φ — функция Эйлера (см. [4]).

Рассмотрим неприводимые p- подгруппы Силова Γ группы $GL(p_{-1},Z)$.

По сказанному выше, они совпадают с p-подгруппами Силова мультипликативной группы кольца $Z(\varepsilon)$, $Z(\varepsilon){:}Z = p-1$. Так как p-подгруппа Силова мультипликативной группы кольца $Z(\varepsilon)$ конечна, то она циклическая и порождается элементом θ, являющимся регулярным представлением ε. Отсюда $\Gamma = (\theta)$.

Пусть в кольце $Z(\varepsilon)$ число классов идеалов равно h. Отметим, и это существенно, что не всегда $h = 1$ (см. [1]). Если r_i, $i = 1,2,\ldots,h$, матрицы перехода от базиса кольца $Z(\varepsilon)$ к базисам идеалов этого кольца, то группы $\Gamma_{i=}(\theta_i)$, где $\theta_i = r_i^{-1}\theta r_i$, также будут неприводимыми p- подгруппами Силова группы $GL(p_{-1},Z)$. Группы Γ_i не могут быть сопряжены между собой в $GL(p_{-1},Z)$, и ими исчерпываются все несопряжённые неприводимые p- подгруппы Силова группы $GL(p_{-1},Z)$.

Теорема 5. *В группе $GL(p_{-1},Z)$ с точностью до сопряжённости в $GL(p–1,Z)$ имеется h неприводимых p-подгрупп Силова, если h — число классов идеалов в расширении кольца Z корнем полинома $\varepsilon^p = 1$.*

Замечание. Если R — кольцо целых алгебраических чисел (конечное расширение Z), то из работы [2] следует, что с точностью до сопряжённости в $GL(n,R)$ в группе $GL(n,R)$ имеется лишь конечное число неприводимых p-подгрупп Силова (конечность подгрупп Силова следует из [3]).

НЕПРИВОДИМЫЕ P-ПОДГРУППЫ СИЛОВА ГРУППЫ SL(n,Z).

Рассмотрим неприводимые p-подгрупп Силова специальной линейной группы над кольцом целых рациональных чисел.

1. В группе $SL(2,Z)$ нет элементов второго порядка, отличных от $\pm E_2$, так как их нет в $SL(2,Q)$, где Q — поле рациональных чисел. Следовательно, в $SL(2,Z)$ кроме $\pm E_2$ p-элементами являются лишь элементы третьего и четвёртого порядков (см. [10]).

Из теоремы 3 следует, что неприводимые 2-подгруппы Силова группы $SL(2,Z)$ изоморфны и сопряжены в $GL(2,Z)$ с циклической группой четвёртого порядка

$$\Gamma = \left\{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

Покажем, что все неприводимые 2-подгруппы Силова группы $SL(2, Z)$ сопряжены в $SL(2, Z)$ с группой Γ. В группе Γ имеются два элемента четвёртого порядка:

$$h = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ и } h_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сопряжённые, с помощью матрицы

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix},$$

где $x,y,z,u \in Z$ и $d = xu - zy = -1$, с матрицей h, матрицы имеют вид:

$$X = \begin{bmatrix} -yu - zx & x^2 + y^2 \\ -u^2 - z^2 & yu + zx \end{bmatrix}.$$

Но матрицы X сопряжены с h_1 в $SL(2, Z)$. Действительно, если

$$Mh_1M^{-1} = X, \text{ где } M = \begin{bmatrix} m & n \\ k & l \end{bmatrix},\ m,n,k,l \in Z$$

и $ml — nk = 1$, то $km + ln = yu + zx$.

Чтобы это равенство выполнялось, достаточно взять $k = u$; $m = y$; $l = z$; $n = x$. Утверждение доказано.

Из теоремы 4 следует, что неприводимые 3-подгруппы Силова группы $SL(2,Z)$ изоморфны и сопряжены в $GL(2,Z)$ с группой третьего порядка

$$G = \left\{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right\}.$$

В группе G имеются два элемента третьего порядка:

$$g = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ и } g_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицы, сопряжённые с матрицей g при помощи матрицы

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix},\ x,y,z,u \in Z \text{ и } xu - zy = -1,$$

имеют вид:

$$Y = \begin{bmatrix} -yu - xz - yz & x^2 + xy + y^2 \\ -u^2 - uz - z^2 & yu + xz + xu \end{bmatrix}.$$

Матрицы Y сопряжены с g_1 в $SL(2,\ Z)$. В самом деле, если $Lg_1L^{-1} = Y$, где

$$\mathrm{L} = \begin{bmatrix} m & n \\ k & l \end{bmatrix},\ m,n,k,l \in Z \text{ и } ml — nk = 1,$$

то отсюда следует, что

$$ml + nl + mk = yu + xz + yz.$$

Чтобы это равенство выполнялось, достаточно взять $m = y$; $n = x$; $\kappa = u$; $l = z$. Утверждение доказано. Итак, справедлива следующая

Теорема 6. *Неприводимые 2-подгруппы Силова группы $SL(2,Z)$ сопряжены в $SL(2,Z)$ с группой*

$$\Gamma = \left\{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

Неприводимые 3-подгруппы Силова группы $SL(2,Z)$ сопряжены в $SL(2,\ Z)$ с группой

$$G = \left\{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right\}.$$

2. Пусть теперь G — неприводимая p-подгруппа Силова группы $GL(n,Z)$. Тогда группа $\Gamma = G \cap SL(n,Z)$ будет неприводимой p-подгруппой Силова группы $SL(n,Z)$. Сопряжённая с группой Γ в $GL(n,Z)$ подгруппа может определять второй класс неприводимых p-подгрупп Силова группы $SL(n,Z)$. Так как неприводимые p-подгруппы Силова группы $GL(n,Z)$ разбиваются на конечное число (s) классов сопряжённых в $GL(n,Z)$ подгрупп, то с точностью до сопряжённости в $SL(n,Z)$ в группе $SL(n,Z)$ имеется не более $2s$ неприводимых p- подгрупп Силова. Таким образом, справедливы следующие две теоремы:

Теорема 7. *При $n \neq 2^\alpha$ в $SL(n,Z)$ нет неприводимых 2-подгрупп. При $n = 2^\alpha$, $\alpha > 1$, неприводимые 2-подгруппы Силова группы $SL(n,Z)$ разбиваются не более чем на $2s$ классов сопряжённых в $SL(n,Z)$ подгрупп, где s — число классов несопряжённых в $GL(n,Z)$ 2-подгрупп Силова группы $GL(n,Z)$.*

Теорема 8. *При $n \neq (p-1)\cdot p^\alpha$ в $SL(n,Z)$ нет неприводимых p-подгрупп. При $n = (p-1)\cdot p^\alpha$ неприводимые p-подгруппы Силова группы $SL(n,Z)$ разбиваются не более чем на $2s$ классов сопряжённых в $SL(n,Z)$ подгрупп, где s — число классов несопряжённых в $GL(n,Z)$ p-подгрупп Силова группы $GL(n,Z)$.*

Из сказанного здесь и замечания выше следует, что в $SL(n,R)$, где R — кольцо целых алгебраических чисел, имеется лишь конечное число классов сопряжённых в $SL(n,R)$ неприводимых p- подгрупп Силова.

Автор выражает благодарность проф. Э. Г. Кирьяцкому за проявленный интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боревич З. И., Шафаревич И. Р.* Теория чисел. М.: 1964, 504 с.

2. *Борель А.* Арифметические свойства алгебраических групп. Математика, сб. переводов, 8:2, 1964, С. 3—17

3. *Вольвачёв Р. Т.* р-подгруппы Силова полной линейной группы // Известия АН СССР, сер. матем., 27, № 5, 1963, С. 1031—1054

4. *Вольвачёв Р. Т.* Периодические нильпотентные линейные группы над полем рациональных чисел // Математический сб., Т. 70 (112):3, 1966, С. 368—379

5. *Матюхин В. И.* Максимальные разрешимые подгруппы $GL(2,Z)$ // Известия АН БССР, серия физ.-матем., № 1, 1966, С. 53—59.

6. *Матюхин В. И.* О разрешимых и нильпотентных линейных группах // VIII Всесоюзный коллоквиум по общей алгебре. Резюме сообщений и докладов, Рига, 1967, С. 82—83

7. *Матюхин В. И.* Нильпотентные матричные группы над кольцом // IX Всесоюзный алгебраический коллоквиум. Резюме научных сообщений. Гомель, 1968, С. 129—130.

8. *Супруненко Д. А.* Разрешимые и нильпотентные линейные группы. Минск, 1958, 94 с.

9. *Супруненко Д. А.* О вещественных линейных нильпотентных группах // Матем. сб., т. 49(91), № 3, 1959, С. 347—352.

10. *Супруненко Д. А.* О порядке элемента группы целочисленных матриц // ДАН БССР, т. VII, № 4, 1963, С. 221—223.

11. *Супруненко Д. А., Матюхин В. И.* О разрешимых группах матриц над евклидовым кольцом // Известия АН БССР, серия физ.-матем., №3, 1965, С. 5—9.

12. *Супруненко Д. А., Медведева Р. П.* О неприводимых нильпотентных линейных группах над полем рациональных чисел // ДАН БССР, т. II, № 9, 1958, С. 363—365.

13. *Хассе Г.* Лекции по теории чисел. М.: ИЛ, 1953, 528 с.

14. *Чеботарёв Н. Г.* О числе классов матриц. Собр. соч. т. II, М.: 1949, С. 393—395

15. *Burnside W.* On the arithmetical nature of the coefficients in a group of linear substitutions // Sitz. Berl. Akad. Wiss., № 12, 1908. P. 8—13.

Матюхин В. И., учитель-эксперт, Лукишская средняя школа, г. Вильнюс, Литва
Тел. +370 5 261-90-60

Matyukhin V. I.
Tel. +370 5 261-90-60