УДК 517.9

ОБ ОПЕРАТОРАХ ТИПА ЛЕЖАНДРА И ИХ СВОЙСТВАХ

Е. М. Малеко, И. А. Максименко

Магнитогорский государственный технический университет

Поступила в редакцию 4.10.2011 г.

Аннотация: в статье рассматривается построение операторов типа Лежандра. Изучены их некоторые свойства.
Ключевые слова: Гильбертово пространство, собственные числа, собственные функции.

Abstract: in article construction of operators of type Legendre is considered. Their some properties are studied.
Key words: Hibert space, eigenvalues, eigenfunctions.

ВВЕДЕНИЕ. Восстановление операторов с заранее заданными спектральными свойствами является одной из важнейших задач современной математики. Если в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве (СГП) построить два оператора $\mathbb{P}_+(\nu)$ и $\mathbb{P}_-(\nu)$, один из которых будет рекуррентно находить некоторую последовательность функций из СГП, а другой будет находить ту же самую последовательность, но только в обратном порядке и тоже рекуррентно, то, перемножив эти два оператора, можно получить в явном виде действующий в СГП оператор с такими свойствами: построенные функции оказываются собственными функциями этого оператора.

1. Построение оператора типа Лежандра. Пусть в СГП $\mathbb{H} := L_2(-1,1)$ действуют дифференциальные операторы

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_+(\nu) &:= -\frac{f_1(x)}{\nu+1}\frac{d}{dx} + f_2(x)\mathbb{I}, \\ \mathbb{P}_-(\nu) &:= \frac{f_1(x)}{\nu}\frac{d}{dx} + f_2(x)\mathbb{I}, \end{aligned} \tag{1}$$

где функции $f_1 = f_1(x)$ и $f_2 = f_2(x)$ удовлетворяют условиям:

1) f_2 — дважды непрерывно-дифференцируемая функция на $[-1,1]$;

2) для любого $x \in [-1,1]$ справедливо равенство $f_1(x)f_2{}'(x) + f_2^2(x) = 1$;

3) $f_2{}'(x)$ — знакопостоянная функция для любого $x \in [-1,1]$.

Оператор $\mathbb{I}$ — тождественный оператор. Области определения операторов $\mathbb{P}_+(\nu)$ $\left(-1 \neq \nu \in \mathbb{R}^1\right)$ и $\mathbb{P}_-(\nu)$ $\left(0 \neq \nu \in \mathbb{R}^1\right)$ включают в себя все функции, абсолютно непрерывные вместе со своими первыми производными на отрезке $[-1,1]$, вторые же производные на $[-1,1]$ должны быть суммируемыми с квадратом. Нетрудно проверить, что области определения операторов $\mathbb{P}_-(\nu+1)\mathbb{P}_+(\nu)$ $\left(-1 \neq \nu \in \mathbb{R}^1\right)$ и $\mathbb{P}_+(\nu-1)\mathbb{P}_-(\nu)$ $\left(0 \neq \nu \in \mathbb{R}^1\right)$ включают в себя все функции, абсолютно непрерывные вместе со своими первыми производными на отрезке $[-1,1]$, причем на этом же отрезке вторые производные должны быть суммируемыми с квадратом. Очевидно тогда, что $D\left(\mathbb{P}_-(\nu+1)\mathbb{P}_+(\nu)\right) = D\left(\mathbb{P}_+(\nu-1)\mathbb{P}_-(\nu)\right)$ и $\overline{D\left(\mathbb{P}_-(\nu+1)\mathbb{P}_+(\nu)\right)} = \overline{D\left(\mathbb{P}_+(\nu-1)\mathbb{P}_-(\nu)\right)} = \mathbb{H}$, где черта наверху означает замыкание по норме в $\mathbb{H}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Действующий в $\mathbb{H}$ оператор $\widehat{A}$ такой, что

$$D(\widehat{A}) = D\left(\mathbb{P}_-(\nu+1)\mathbb{P}_+(\nu)\right) = D\left(\mathbb{P}_+(\nu-1)\mathbb{P}_-(\nu)\right)$$

и на $D(\widehat{A})$ выполняются одновременно операторные равенства

$$\begin{aligned} &(\nu+1)^2\left(\mathbb{P}_-(\nu+1)\mathbb{P}_+(\nu) - \mathbb{I}\right) = \\ &= f_1f_2{}'\left(\widehat{A} - \nu(\nu+1)\mathbb{I}\right) = \mathbb{O}, \\ &\nu^2\left(\mathbb{P}_+(\nu-1)\mathbb{P}_-(\nu) - \mathbb{I}\right) = \\ &= f_1f_2{}'\left(\widehat{A} - \nu(\nu+1)\mathbb{I}\right) = \mathbb{O}, \end{aligned} \tag{2}$$

будем называть **оператором типа Лежандра**. Здесь $\mathbb{O}$ — аннулятор в $\mathbb{H}$.

Докажем корректность данного определения. Вначале рассмотрим операторные произведения

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_-(\nu+1)\mathbb{P}_+(\nu) = \\ &= -\frac{f_1}{(\nu+1)^2}\left(f_1{}'\frac{d}{dx} + f_1\frac{d^2}{dx^2}\right) + \left(\frac{f_1f_2{}'}{\nu+1} + f_2^2\right)\mathbb{I}, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\mathbb{P}_+(\nu-1)\mathbb{P}_-(\nu) = $$
$$= -\frac{f_1}{\nu^2}\left(f_1{}'\frac{d}{dx} + f_1\frac{d^2}{dx^2}\right) + \left(-\frac{f_1 f_2{}'}{\nu} + f_2^2\right)\mathbb{I}. \quad (4)$$

Учитывая, что $\mathbb{P}_-(\nu+1)\mathbb{P}_+(\nu) = \mathbb{I}$ и $\mathbb{P}_+(\nu-1)\mathbb{P}_-(\nu) = \mathbb{I}$ на $D(\widehat{A})$, умножим выражение (3) на $(\nu+1)^2$:

$$(\nu+1)^2\mathbb{P}_-(\nu+1)\mathbb{P}_+(\nu) =$$
$$-f_1 f_1{}'\frac{d}{dx} - f_1^2\frac{d^2}{dx^2} + (\nu+1)f_1 f_2{}'\mathbb{I} + \quad (5)$$
$$+(\nu+1)^2 f_2^2\mathbb{I} = (\nu+1)^2\mathbb{I},$$

а выражение (4) — на ν^2 :

$$\nu^2\mathbb{P}_+(\nu-1)\mathbb{P}_-(\nu) =$$
$$= -f_1 f_1{}'\frac{d}{dx} - f_1^2\frac{d^2}{dx^2} - \nu f_1 f_2{}'\mathbb{I} + \nu^2 f_2^2\mathbb{I} = \nu^2\mathbb{I}. \quad (6)$$

Из (5) и (6) для любого $\nu \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$(2\nu+1)(f_1 f_2{}' + f_2^2 - 1) = 0. \quad (7)$$

С учетом (7) из (5) и (6) имеем

$$(\nu+1)f_1 f_2{}'\mathbb{I} + (\nu+1)^2 f_2^2\mathbb{I} - (\nu+1)^2\mathbb{I} =$$
$$= -\nu f_1 f_2{}'\mathbb{I} + \nu^2 f_2^2\mathbb{I} - \nu^2\mathbb{I} = \quad (8)$$
$$= \nu(\nu+1)(f_2^2 - 1)\mathbb{I} = -\nu(\nu+1)f_1 f_2{}'\mathbb{I}.$$

Учитывая равенства (8), из (5) и (6) получим:

$$\mathbb{O} = (\nu+1)^2\left(\mathbb{P}_-(\nu+1)\mathbb{P}_+(\nu) - \mathbb{I}\right) =$$
$$= -f_1\left(f_1{}'\frac{d}{dx} + f_1\frac{d^2}{dx^2} + \nu(\nu+1)f_2{}'\mathbb{I}\right),$$
$$\mathbb{O} = \nu^2\left(\mathbb{P}_+(\nu-1)\mathbb{P}_-(\nu) - \mathbb{I}\right) =$$
$$= -f_1\left(f_1{}'\frac{d}{dx} + f_1\frac{d^2}{dx^2} + \nu(\nu+1)f_2{}'\mathbb{I}\right).$$

Правые части последних двух операторных равенств равны. Из них легко выделить оператор типа Лежандра

$$\widehat{A} := -\frac{f_1}{f_2{}'}\frac{d^2}{dx^2} - \frac{f_1{}'}{f_2{}'}\frac{d}{dx}$$

и корректность введенного выше определения очевидна.

2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА $\widehat{A}$.

1^0. УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Для любого комплексного числа ν операторное равенство*

$$\widehat{A} = \nu(\nu+1)\mathbb{I} \quad (9)$$

и система

$$\begin{cases}(\nu+1)^2\left(\mathbb{P}_-(\nu+1)\mathbb{P}_+(\nu) - \mathbb{I}\right) = \mathbb{O}, \\ \nu^2\left(\mathbb{P}_+(\nu-1)\mathbb{P}_-(\nu) - \mathbb{I}\right) = \mathbb{O},\end{cases} \quad (10)$$

эквивалентны на множестве всех функций из $D(\widehat{A}) \subset \mathbb{H}$.

Доказательство этого утверждения очевидным образом следует из формул (2).

2^0. Рассмотрим тождество

$$-(f_1 y)' + f_2{}'y \equiv f_2{}'\left(\widehat{A} + \mathbb{I}\right)y$$

и введем обозначения: $y^{[1]} = f_1\frac{dy}{dx}$, $y^{[2]} = f_1{}'y - \frac{d}{dx}y^{[1]}$. Тогда $y^{[1]}$ и $y^{[2]}$ — квазипроизводные, соответствующие дифференциальному выражению $-(f_1 y)' + f_2{}'y$. В этом случае можно ввести оператор $By := y^{[2]}$, свойства которого хорошо изучены в [2], что в свою очередь позволит взглянуть на оператор $\widehat{A}$ с "классической" точки зрения. Для этого понадобятся некоторые сведения из [2, глава 5]. Напомним их:

а) квазипроизводными функции $y = y(x)(= y^{[0]}(x))$, соответствующими выражению

$$l(y) := (-1)^n(p_0 y^{(n)})^{(n)} +$$
$$+(-1)^{n-1}(p_1 y^{(n-1)})^{(n-1)} + ... + p_n y,$$

называются функции $y^{[1]}, y^{[2]}, \ldots, y^{[2n]}$, определяемые формулами

$$\begin{cases} y^{[k]} = \dfrac{d^k y}{dx^k}, \\ y^{[n]} = p_0\dfrac{d^n y}{dx^n}, \\ y^{[n+k]} = p_k\dfrac{d^{n-k}y}{dx^{n-k}} - \dfrac{d}{dx}(y^{[n+k-1]}),\ k = 1,2,...,n-1, \end{cases}$$

откуда вытекает, что $l(y) = y^{[2n]}$;

б) $l(y)$ — самосопряженное дифференциальное выражение, если его коэффициенты являются вещественными и достаточное число раз дифференцируемыми функциями;

в) если (a,b) — интервал, в котором рассматривается дифференциальное выражение $l(y)$, и функции $\dfrac{1}{p_0(x)}, p_1(x), \ldots, p_n(x)$ измеримы в (a,b) и суммируемы в каждом его замкнутом конечном подынтервале $[\alpha, \beta]$, то в этом случае $l(y)$ — регулярное дифференциальное выражение;

г) если в в) нарушены хотя бы одно из условий измеримости функций $\frac{1}{p_0(x)}, p_1(x), \ldots, p_n(x)$ в интервале (a,b) и суммируемости в каждом его замкнутом конечном подынтервале $[\alpha, \beta]$, то $l(y)$ — сингулярное дифференциальное выражение.

В нашем случае, если функция $\frac{1}{f_1(x)}$ суммируема на (-1;1), то оператор $B := f_2{}'\left(\widehat{A} + \mathbb{I}\right)$ $\left(:= y^{[2]}\right)$ будем называть **регулярным** (по Наймарку, сравните с п. в) предыдущего предложения), в случае же нарушения суммируемости функции $\frac{1}{f_1(x)}$ — **сингулярным** оператором (сравните с п. г) предыдущего предложения).

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Операторы* $\widehat{A} := \frac{1}{f_2{}'} B - \mathbb{I}$ *и* B *— самосопряженные в* $\mathbb{H}$, *если функции* f_1 *и* f_2 *удовлетворяют условиям 1)-3) из определения операторов* $\mathbb{P}_+(\nu)$ *и* $\mathbb{P}_-(\nu)$.

Доказательство этого свойства следует из п. б) для самосопряженного дифференциального выражения $l(y)$.

3^0. ТЕОРЕМА. *Множества*

$$\{\lambda_n = n(n+1)\}_{n=0}^{\infty}, \tag{11}$$

$$\{\varphi_n = P_n(f_2)\}_{n=0}^{\infty} \tag{12}$$

— наборы собственных чисел и соответствующих собственных функций оператора $\widehat{A}$, *действующего в* $\mathbb{H}$; $P_n(\cdot)$ *— многочлен Лежандра.*

Доказательство. Известен (см. [1, с. 180]) оператор $A := -(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} + 2x\frac{d}{dx}$ — классический оператор Лежандра, действующий в $\mathbb{H}$, причем выполняются равенства

$$AP_n(x) = \lambda_n P_n(x) \quad \forall x \in [-1,1].$$

То есть $\{\lambda_n = n(n+1)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n = P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — наборы собственных чисел и соответствующих собственных функций оператора A.

Из условий 1)—3) для функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ следует, что

$$f_1(x) = \frac{1 - f_2^2(x)}{f_2{}'(x)}, f_1'(x) = -2f_2(x) - \left(1 - f_2^2(x)\right)\frac{f_2''(x)}{\left[f_2'(x)\right]^2}.$$

Тогда

$$\widehat{A} = -\frac{1 - f_2^2(x)}{\left[f_2{}'(x)\right]^2}\frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{2f_2(x)}{f_2{}'(x)} + \frac{\left(1 - f_2^2(x)\right)f_2{}''(x)}{\left[f_2{}'(x)\right]^3}\right)\frac{d}{dx}.$$

Поэтому

$$\widehat{A}P_n(f_2) = -\frac{1 - f_2^2}{[f_2{}']^2}\left(P_n{}''(f_2)(f_2{}')^2 + P_n{}'(f_2)f_2{}''\right) + \frac{2f_2}{f_2{}'}P_n{}'(f_2)f_2{}' + \frac{(1-f_2^2)f_2{}''}{(f_2{}')^3}P_n{}'(f_2)f_2{}' =$$

$$-(1 - f_2^2)P_n{}''(f_2) + 2f_2P_n{}'(f_2),\ f_1 = f_1(x),\ f_2 = f_2(x).$$

То есть

$$\widehat{A}P_n(f_2(x)) = -(1 - f_2^2(x))P_n{}''(f_2(x)) + 2f_2(x)P_n{}'(f_2(x)). \tag{13}$$

А так как

$$AP_n(x) = -(1-x^2)P_n{}''(x) + 2xP_n{}'(x)$$

и

$$AP_n(x) = \lambda_n P_n(x) \quad \forall x \in [-1,1],$$

то с учетом (13) получаем

$$\widehat{A}P_n(f_2(x)) = \lambda_n P_n(f_2(x)) \quad \forall x \in [-1,1]$$

для функций $f_2(x)$, удовлетворяющих условиям 1)-3). Теорема доказана.

4^0. Известна (см. [1, с. 180]) следующая формула дифференцирования:

$$(1-x^2)\frac{dP_n(x)}{dx} = n[P_{n-1}(x) - xP_n(x)] = (n+1)[xP_n(x) - P_{n+1}(x)]. \tag{14}$$

Тогда

$$P_{n+1}(x) = \mathbb{D}_+(n)P_n(x), \quad P_{n-1}(x) = \mathbb{D}_-(n)P_n(x), \tag{15}$$

где

$$\mathbb{D}_+(n) := -\frac{(1-x^2)}{(n+1)}\frac{d}{dx} + xI, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{16}$$

$$\mathbb{D}_-(n) := \frac{(1-x^2)}{n}\frac{d}{dx} + xI, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

В (15)—(17) заменим x на $f_2(x)$. Тогда $\frac{d}{dx}$ заменится на $\frac{1}{f_2{}'(x)}\frac{d}{dx}$, а операторы $\mathbb{D}_+(n)$, $\mathbb{D}_-(n)$ — на операторы $\mathbb{P}_+(n)$, $\mathbb{P}_-(n)$. Отсюда получаем

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.

$$P_{n+1}(f_2) = \mathbb{P}_+(n)P_n(f_2),$$
$$P_{n-1}(f_2) = \mathbb{P}_-(n)P_n(f_2),$$
$$n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

— формулы для рекуррентного вычисления собственных функций $P_n(f_2)$ оператора $\widehat{A}$.

3. Примеры. Рассмотрим несколько конкретных примеров операторов типа Лежандра, действующих в СГП $\mathbb{H} := L_2(-1,1)$. Так как вид и свойства операторов зависит во многом от вида и свойств функций f_1 и f_2, которые можно выбирать сколько угодно (лишь бы выполнялись для них условия 1)-3)), то класс операторов типа Лежандра очень широк. Собственные числа и собственные функции этих операторов находятся соответственно по формулам (11) и (12).

ПРИМЕР 1. $\widehat{A} = A := -(1-x^2)\dfrac{d^2}{dx^2} + 2x\dfrac{d}{dx}$ — классический оператор Лежандра. Здесь $f_2(x) = x$, тогда $f_1(x) = 1 - x^2$.

ПРИМЕР 2. Пусть $f_2(x) = (\beta + x)^\alpha$, $\beta > 1$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда

$$f_1(x) = -\frac{(\beta + x)(-(\beta + x)^{-\alpha} + (\beta + x)^\alpha)}{\alpha}.$$

Оператор $\widehat{A}$ принимает вид:

$$\widehat{A} := -\frac{(\beta + x)^2((\beta + x)^{-2\alpha} - 1)}{\alpha^2}\frac{d^2}{dx^2} - -\frac{((\beta + x)^{-2\alpha+1}(1-\alpha) - \beta - x - \beta\alpha - x\alpha)}{\alpha^2}\frac{d}{dx}.$$

Его собственные функции: $P_n((\beta + x)^\alpha)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

ПРИМЕР 3. Пусть $f_2(x) = \ln(2 + x)$. Тогда $f_1(x) = (1 - \ln^2(2 + x))(2 + x)$. Оператор $\widehat{A}$ принимает вид:

$$\widehat{A} := (-1 + \ln^2(2 + x))(2 + x)^2\frac{d^2}{dx^2} + +(2\ln(2 + x) - 1 + \ln^2(2 + x))(2 + x)\frac{d}{dx}.$$

Его собственные функции: $P_n(\ln(2 + x))$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бейтмен Г.* Высшие трансцендентные функции : Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Изд. второе, стер. М. : Наука, 1974. 296 с. с ил.

2. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. М. : Гос. издат. технико-теоретической лит., 1954. 352 с.

Малеко Е. М., доцент кафедры математики, Магнитогорский государственный технический университет им. Г. И. Носова

E-mail: emaleko@rambler.ru

Тел.: 8-963-478-66-27

Максименко И. А., ассистент кафедры математики, Магнитогорский государственный технический университет им. Г. И. Носова

E-mail: mgtu@magtu.ru

Тел.: 8-904-974-59-79

Maleko E. M., Assist. Proffesor, Magnitogorsk State Technical University

E-mail: emalekp@rambler.ru

Tel.: 8-963-478-66-27

Maximenko I. A., Assistent, Magnitogorsk State Technical University

E-mail: mgtu@magtu.ru

Тел.: 8-904-974-59-79