УДК 519.14; 517.55

К ВОПРОСУ О КОМБИНАТОРНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ГИПОТЕЗЫ О ЯКОБИАНЕ*

А. В. Лобода, А. В. Шиповская

Воронежский государственный архитектурно-строительный университет

Поступила в редакцию 11.09.2012 г.

Аннотация: в статье рассматривается задача о комбинаторных свойствах совокупности сумм $\{\alpha_k + \beta_\ell\}$, составленных из элементов двух наборов натуральных чисел. Показана связь задачи с 2-мерным вариантом известной гипотезы о якобиане. Сформулирована (и в нескольких частных случаях доказана) гипотеза об одном свойстве обсуждаемых сумм.
Ключевые слова: гипотеза о якобиане, полиномиальное отображение, степень многочлена, делимость многочленов, математическая индукция.

Abstract: the question is considered in the article about the combinatorial properties of the collection of the sums $\{\alpha_k + \beta_\ell\}$, that are constituted by the elements of two sets of natural numbers. The connection is shown for this question with the 2-dimensional version of the well known Jacobian Conjecture. The hypothesis is formulated (and in some partial cases it is proved) about one property of the sums under consideration.
Key words: Jacobian Conjecture, polynomial mapping, degree of polynomial, divisibility of polynomials, mathematical induction.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим два упорядоченных набора натуральных чисел

$$\{\alpha_k\}_{k=1}^{m}, \{\beta_\ell\}_{\ell=1}^{n}, \min(m,n) \geq 2. \qquad (1)$$

Мы обсуждаем вопрос: какие свойства может иметь совокупность сумм вида

$$(\alpha_k + \beta_\ell)(1 \leq k \leq m, 1 \leq \ell \leq n)? \qquad (2)$$

В связи с комбинаторным рассмотрением известной гипотезы Келлера о якобиане (см. [1]—[4]) авторы предлагают достаточно интересный (по их мнению) вариант ответа на вопрос, поставленный пока недостаточно четко.

Для точной формулировки самого вопроса и предлагаемого ответа на него уточним некоторые детали рассмотрения интересующих нас сумм. При этом будут использоваться термины, не являющиеся, строго говоря, математическими.

Составим из упомянутых сумм картотеку. На ее отдельной полке U_j расположим все суммы $(\alpha_k + \beta_\ell)$ с одинаковыми суммами индексов $k + \ell = j$. Например, пусть один из двух наборов содержит два числа α_1, α_2, а другой — три: $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Тогда полки обсуждаемой картотеки, содержащие 6 сумм, предлагается заполнить следующим образом:

$$\begin{aligned}
&U_2 : (\alpha_1 + \beta_1),\\
&U_3 : (\alpha_1 + \beta_2), (\alpha_2 + \beta_1),\\
&U_4 : (\alpha_1 + \beta_3), (\alpha_2 + \beta_2),\\
&U_5 : \qquad\qquad\quad (\alpha_2 + \beta_3).
\end{aligned}$$

Заметим, что среди сумм, расположенных в пределах одной полки, могут оказаться совпадающие натуральные числа

Определение 1. Конечный набор натуральных чисел $(a_1, a_2, ..., a_N)$ (с возможными совпадениями), будем называть *правильным*, если минимальный элемент из этого набора строго меньше остальных $(N-1)$ его элементов.

В соответствии с этим определением будем называть полку картотеки U_j (с каким-либо номером j) правильной, если является правильным набор расположенных на ней чисел.

Набор полок картотеки назовем стеллажом. Предложенный выше способ расположения полок на стеллаже подразумевает, что его верхняя и нижняя полки содержат только по одному числу. Две эти полки на стеллаже мы не будем далее рассматривать, а все остальные будем называть *рабочими* полками.

Определение 2. Стеллаж будем называть *правильным*, если на нем имеется хотя бы одна правильная рабочая полка.

Пару наборов вида (1) будем считать единым объектом и называть (m,n)-набором, имея

* Исследование поддержано грантом РФФИ-11-01-00495-а

в виду количества элементов в каждом из отдельных α- и β-наборов. Соответствующий этому (двойному) набору стеллаж будем называть (m,n)-стеллажом.

Опираясь на определение 2, будем называть (m,n)-набор правильным, если является правильным соответствующий этому набору стеллаж.

Поскольку наборы $\{\alpha_k\}_{k=1}^m$ и $\{\beta_\ell\}_{\ell=1}^n$ входят в задачу симметричным образом, будем считать (без ограничения общности), что $m \le n$ (число элементов в первом наборе не больше числа элементов второго набора).

Наконец, введем еще 2 типа условий для элементов обсуждаемых наборов (мотивы их введения будут объяснены ниже). Во-первых, считаем выполненными неравенства

$$0 \le \alpha_k \le k, 0 \le \beta_\ell \le \ell \tag{3}$$

(каждое из рассматриваемых чисел не может быть больше своего номера в наборе).

Кроме того, будем считать, что для обсуждаемых наборов выполняются также "краевые" условия:

$$\alpha_1 + \beta_1 = 1; \quad \alpha_m = m, \beta_n = n. \tag{4}$$

Определение 3. (m,n)-набор, удовлетворяющий условиям (3), (4) и неравенству $2 \le m \le n$, будем называть *допустимым* набором.

Гипотеза о правильных наборах (стеллажах). Всякий допустимый (m,n)-набор является правильным.

Формальной целью настоящей статьи можно считать доказательство этой гипотезы для допустимых $(2,n)$-, $(3,n)$- и $(4,n)$-наборов. Эти доказательства будут изложены ниже, в §§ 2, 3 (отметим, что результаты § 2 получены в студенческой научной работе [5]). В § 1 мы объясним связь поставленной задачи с гипотезой о якобиане.

Замечание. Общее доказательство гипотезы о наборах, не связанное с малыми значениями параметра $m = \min(m,n)$, авторам пока найти не удалось. Отметим еще, что и "лобовое" применение компьютерного перебора вариантов оказывается в этой задаче практически бесполезным. Уже при m,n порядка 10 такой перебор $m!n!/2$ вариантов требует практически необозримого времени работы даже для современных компьютеров.

§ 1. КОМБИНАТОРНЫЙ ПОДХОД К ГИПОТЕЗЕ О ЯКОБИАНЕ

В простейшем, 2-мерном, варианте известной гипотезы Келлера о якобиане (Jacobian Conjecture, JC, см., [1], [2]) обсуждается пара многочленов $f = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$ от двух комплексных переменных x, y. Якобиан отображения

$$f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \tag{5}$$

предполагается всюду отличным от нуля. Полиномиальные отображения с ненулевым якобианом часто называют келлеровыми отображениями. Гипотеза о якобиане состоит в том, что любое келлерово отображение f является глобально обратимым (и обратное к f отображение также является в этой ситуации полиномиальным отображением).

Далее мы будем использовать для якобиана

$$J_f = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x} & \dfrac{\partial P}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial Q}{\partial x} & \dfrac{\partial Q}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{6}$$

отображения $f = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$ достаточно распространенное обозначение

$$J_f = [P, Q].$$

Заметим при этом, что скобка $[P,Q]$ является билинейной кососимметричной функцией пары своих аргументов.

Так как якобиан (6) полиномиального отображения f сам является полиномом (от двух переменных), то в силу допущения JC и основной теоремы алгебры он должен быть равен ненулевой константе. Это означает, что в разложении многочлена J_f на однородные степенные составляющие

$$J_f = R(x,y) = \sum_M R_M(x,y) \tag{7}$$

все компоненты, кроме R_0 должны быть равны нулю.

Тем самым, рассмотрение JC и, более общо, келлеровых отображений можно связать с тождественным обращением в нуль большой совокупности однородных многочленов (форм) $R_M(x,y)$.

Заметим, что каждый из многочленов $R_M(x,y)$ в формуле (7) представляет собой сумму нескольких многочленов $R_M^{(j)}(x,y)$ той же степени M (здесь j — номер многочлена в сумме). В самом деле, разложим на однородные составляющие компоненты $P(x,y), Q(x,y)$ отображения (5) :

$$\begin{cases} P(x,y) = P_n(x,y) + P_{n-1}(x,y) + \ldots + P_1(x,y) + P_0, \\ Q(x,y) = Q_m(x,y) + Q_{m-1}(x,y) + \ldots + Q_1(x,y) + Q_0. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь подразумевается, что степень многочлена $P(x,y)$ равна степени n его старшей (ненулевой) однородной компоненты P_n; аналогично степень многочлена $Q(x,y)$ равна m, т. что $Q_m \neq 0$. Можно еще считать компоненты P_0, Q_0 равными нулю, т.к. сдвиг в пространстве $\mathbb{C}^2$ не изменяет свойства обратимости отображения f.

Учитывая такие представления для P и Q, любую компоненту R_M разложения (7) можно представить в виде

$$R_M = \sum_{k+\ell=M+2} \left(\frac{\partial P_k}{\partial x} \frac{\partial Q_\ell}{\partial y} - \frac{\partial P_k}{\partial y} \frac{\partial Q_\ell}{\partial x} \right) = \sum_{k+\ell=M+2} [P_k, Q_\ell]. \quad (9)$$

Здесь каждая отдельная скобка $[P_k, Q_\ell]$ является формой степени M.

Мы обсудим простое необходимое условие обращения в нуль суммы

$$S(x,y) = \sum_{j=1}^{N} S^{(j)}(x,y) \quad (10)$$

нескольких форм одной и той же степени M.

Определение 4. Пусть $S(x,y)$ — ненулевая форма конечной суммарной степени по паре переменных x, y. Степенью этой формы по переменной x будем называть натуральное число $\deg_x S$, равное максимальной степени переменной x, содержащейся в виде множителя в многочлене $S(x,y)$.

В соответствии с определением 4 любая ненулевая форма $S = S(x,y)$ степени M представляется в виде

$$S = x^\gamma \cdot \hat{S}(x,y). \quad (11)$$

Здесь $\gamma = \deg_x S \in [0, M]$, $\hat{S}(x,y)$ — некоторый многочлен степени $(M-\gamma)$, т. что

$$\hat{S}(x,y) = D_0 y^{M-\gamma} + D_1 x y^{M-\gamma-1} + \ldots + D_{M-\gamma} x^{M-\gamma}, \quad D_0 \neq 0.$$

Ясно, что для любой ненулевой формы $S(x,y)$ суммарной степени $\deg S = M$ по паре переменных x, y выполняется неравенство $\deg_x S \le \deg S = M$.

Замечание. Если у формы степени M

$$S(x,y) = C_0 y^M + C_1 x y^{M-1} + \ldots + C_M x^M$$

все коэффициенты равны нулю (т.е. форма — нулевая), будем считать, что $\deg_x S = M$. С учетом такой договоренности равенство (11) с $\gamma = \deg_x S$ справедливо для любых форм; для нулевой формы S множитель $\hat{S}$ в равенстве (11) естественно положить равным нулю.

Сформулируем теперь необходимое условие (тождественного) обращения в нуль суммы (10) в терминах степеней по переменной x входящих в эту сумму многочленов $S^{(j)}(x,y)$.

Предложение 1. Пусть форма $S(x,y)$ представлена в виде суммы (10) нескольких форм $S^{(j)}(x,y)$ одной и той же степени M. Пусть еще

$$\gamma_j = \deg_x S^{(j)}(x,y) (1 \le j \le N).$$

Если набор $(\gamma_1, \ldots, \gamma_N)$ является правильным в смысле определения 1, то многочлен (10) не может тождественно равняться нулю.

Доказательство. Пусть (для простоты) $\gamma = \gamma_N < \gamma_j$ при всех $j : 1 \le s \le N-1$. Тогда $\gamma_N < M$,

$$S^{(N)} = x^\gamma \cdot (D_0 y^{M-\gamma} + D_1 x y^{M-\gamma-1} + \ldots + D_{M-\gamma} x^{M-\gamma}),$$

где $D_0 \neq 0$,

и

$$S(x,y) = x^\gamma \cdot (D_0 y^{M-\gamma} + \ldots). \quad (12)$$

Здесь многоточиями обозначена сумма слагаемых, каждое из которых имеет не менее, чем первую степень по переменной x. Ясно, что при $D_0 \neq 0$ многочлен (12) не может быть тождественно нулевым.

Предложение 1 доказано.

Следствие. Пусть компоненты P и Q отображения $f = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$ имеют степенные разложения вида (8). Если найдется номер $M \in [3, m+n-3]$, т. что набор $\{\deg_x [P_k, Q_\ell]\}_{k+\ell=M}$ является правильным в смысле определения 1, то отображение f не является келлеровым.

Заметим, что в рамках сформулированного следствия вся совокупность натуральных чисел

$$\{\deg_x [P_k, Q_\ell]\}, \quad 2 \le k+\ell \le m+n \quad (13)$$

разбивается на подмножества с фиксированными суммами $k+\ell$. В терминах вводного раздела нашей статьи такое разбиение есть по сути не что иное, как рассмотрение отдельных полок стеллажа, заполненного числами вида (13). При этом верхняя и нижняя полки, отвечающие суммам $k+\ell=2$ и $k+\ell=m+n$, в предложении 1 и его следствии интереса не представляют, т. к. на них содержится ровно по одному числу.

Тем самым, комбинаторные свойства полок и стеллажей с числами вида (13) позволяют отличать (на уровне необходимых условий) келлеровы отображения от отображений, не являющихся таковыми.

В то же время для произвольных пар многочленов $\big(P(x,y),Q(x,y)\big)$ набор (13) может быть устроен весьма сложно. Задача о стеллажах, обсуждаемая в нашей статье, связана с простейшей моделью набора (13). Тем не менее, понятие допустимых (m,n) — наборов, введенное выше, основано на свойствах келлеровых отображений.

Поясним, например, смысл граничных условий (4) для полиномиальных отображений вида (1), удовлетворяющих требованию $J_f = const \neq 0$. За счет линейного преобразования в прообразе такого отображения можно превратить его линейную часть в тождественное отображение. В этом случае пара (P_1,Q_1) равна (x,y), но желаемое неравенство

$$m = \deg P \leq \deg Q = n$$

может оказаться нарушенным. Его можно восстановить заменой $x^* \leftrightarrow y^*$ в образе отображения f. В этом случае (P_1,Q_1) превращается в (y,x). Для двух этих вариантов имеем

$$(\alpha_1,\beta_1) = (1,0) \text{ или } (\alpha_1,\beta_1) = (0,1).$$

Таким образом, первое из граничных условий (4) можно считать выполненным для любого келлерова отображения.

Второе и третье условия в (4), строго говоря, не являются обязательными для таких отображений. В то же время условие $Q_n(x,y) = x^n$ естественно для многих известных примеров и модельных рассуждений о келлеровых отображениях (см. [2]). Из такого условия для келлеровых отображений легко следует равенство $P_m = A_m x^m (A_m = const \neq 0)$. Вместе с условием $\alpha_1 + \beta_1 = 1$ два таких равенства составляют полный набор краевых условий (4).

Обсудим еще связь набора (13) со свойствами $\deg_x P_k(x,y), \deg_x Q_\ell(x,y)$.

Пусть $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ — две произвольные формы степеней k и ℓ, соответственно, и при этом $\deg_x \varphi = \alpha \leq k, \deg_x \psi = \beta \leq \ell$.

Легко видеть, что в случае хотя бы одного нулевого многочлена из пары $\big(\varphi(x,y),\psi(x,y)\big)$ скобка $[\varphi,\psi]$ обращается в нуль. Тогда, в соответствии с нашими договоренностями

$$\deg_x[\varphi,\psi] = k + \ell - 2. \qquad (14)$$

Имеются и другие, нетривиальные, ситуации, в которых эта степень равна максимально возможному числу $k+\ell-2$. Но в целом равенство (14) является, скорее, исключением, чем правилом в силу следующего утверждения.

Предложение 2. *Пусть однородные многочлены $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$, имеющие степени k и ℓ соответственно, удовлетворяют условиям*

$$\varphi = x^\alpha \cdot (A_0 y^{k-\alpha} + \ldots + A_{k-\alpha} x^{k-\alpha}), A_0 \neq 0,$$

$$\psi = x^\beta \cdot (B_0 y^{\ell-\beta} + \ldots + B_{\ell-\beta} x^{\ell-\beta}), B_0 \neq 0.$$

Если $\alpha\ell - \beta k \neq 0$, то $\deg_x[\varphi,\psi] = \alpha + \beta - 1$.

Доказательство.

Так как $\varphi = x^\alpha \cdot W$ и $\psi = x^\beta \cdot T$, то

$$[\varphi,\psi] = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^\alpha \cdot W)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^\beta \cdot T) - \frac{\partial}{\partial y}(x^\alpha \cdot W)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^\beta \cdot T) =$$

$$= \left(\alpha x^{\alpha-1} W + x^\alpha \frac{\partial W}{\partial x}\right)\cdot x^\beta \frac{\partial T}{\partial y} -$$

$$- x^\alpha \frac{\partial W}{\partial y}\cdot\left(\beta x^{\beta-1} T + x^\beta \frac{\partial T}{\partial x}\right) =$$

$$= x^{\alpha+\beta-1}\cdot\left(\alpha W \frac{\partial T}{\partial y} - \beta T \frac{\partial W}{\partial y}\right) + x^{\alpha+\beta}\cdot[W,T].$$

Второе из двух выделенных здесь слагаемых делится на $x^{\alpha+\beta}$. А первое имеет вид

$$x^{\alpha+\beta-1} y^{k+\ell-\alpha-\beta-1} A_0 B_0 \cdot (\alpha(\ell-\beta) - \beta(k-\alpha)) + \ldots,$$

где многоточия означают слагаемые с более высокими степенями x по сравнению с выписанным мономом.

При условии

$$\alpha(\ell-\beta) - \beta(k-\alpha) = \alpha\ell - \beta k \neq 0$$

именно $(\alpha+\beta-1)$ является максимальной степенью по переменной x всей скобки $[\varphi,\psi]$. Предложение 2 доказано.

Предложение 2 представляет “основной” вариант зависимости степени множителя x^γ в выражении $[\varphi,\psi]$ от степеней x^α и x^β, входящих аналогичными множителями в многочлены $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$.

В частности, оно показывает “естественный” характер набора сумм $(\alpha_k + \beta_\ell)$ (или более формально $(\alpha_k + \beta_\ell - 1)$) в связи с рассмотрением келлеровых отображений в пространстве $\mathbb{C}^2$. Замена реальных наборов (13) их упрощенной моделью из “основного” варианта приводит к начальной постановке задачи о стеллажах (одновременное увеличение всех элементов набора (13) на единицу не изменяет сути этой задачи).

Как показывают дальнейшие разделы статьи, обсуждаемая дискретно-математическая задача, связанная даже с упрощенной моделью JC, является достаточно сложной. Однако гипотеза о якобиане остается недоказанной в мировой математике уже более 70 лет. В связи с этим излагаемая точка зрения на JC (см. также [6], [7]) и исследование связанной с ней новой задачи, представляют, по мнению авторов, общематематический интерес.

§ 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ О НАБОРАХ В (2,*n*)- И (3,*n*)-СЛУЧАЯХ

Предложение 3. *Любой допустимый (2,n)-набор является правильным.*

Доказательство. В этом случае на каждой рабочей полке стеллажа размещаются ровно 2 суммы. Предположим, что правильной полки на стеллаже нет. Тогда на каждой полке имеем равенство находящихся на ней сумм:

$$\alpha_1 + \beta_2 = \alpha_2 + \beta_1, \alpha_1 + \beta_3 = \alpha_2 + \beta_2, ..., \\ \alpha_1 + \beta_n = \alpha_2 + \beta_{n-1}.$$

Выразим здесь из первого уравнения выписанной системы элемент β_2, из второго уравнения — β_3 и т.д. Получим

$$\beta_2 = \alpha_2 - \alpha_1 + \beta_1, \beta_3 = 2(\alpha_2 - \alpha_1) + \beta_1, ..., \\ \beta_n = (n-1)(\alpha_2 - \alpha_1) + \beta_1.$$

В последнее из этих равенств подставим краевые условия (4). Тогда в силу условий $\alpha_2 = 2, \beta_n = n$ получим

$$n = (n-1)(2 - \alpha_1) + \beta_1. \qquad (15)$$

В соответствии с первым краевым условием возможными значениями пары (α_1, β_1) являются (1,0) или (0,1). В двух этих случаях (15) превращается в

$$n = (n-1)(2-1) + 1 \text{ или в } n = (n-1)(2-0) + 1.$$

Каждое из этих равенств противоречит условию $n \ge 2$. Следовательно, допущение об отсутствии правильных полок на стеллаже было неверным. Предложение 3 доказано.

Существенно более сложным оказывается рассмотрение (3,n)-стеллажей.

ТЕОРЕМА 1. *Любой допустимый (3,n)-набор является правильным.*

Доказательство теоремы проведем по методу математической индукции.

В качестве основания индукции необходимо убедиться что при любых допустимых наборах α_k и β_ℓ $\left(1 \le k, \ell \le 3\right)$ (3,3)-стеллаж — правильный.

На произвольном (3,3) — стеллаже три из его пяти полок — рабочие:

$$U_3 : (\alpha_1 + \beta_2), \quad (\alpha_2 + \beta_1),$$
$$U_4 : (\alpha_1 + \beta_3), \quad (\alpha_2 + \beta_2), \quad (\alpha_3 + \beta_1),$$
$$U_5 : \qquad\qquad (\alpha_2 + \beta_3), \quad (\alpha_3 + \beta_2).$$

Рассмотрим его нижнюю (2-местную) рабочую полку. Если она правильная, то и весь стеллаж — правильный.

Если же эта полка неправильная, то имеем равенство

$$\alpha_2 + \beta_3 = \alpha_3 + \beta_2. \qquad (16)$$

Так как $\alpha_3 = \beta_3 = 3$, то из (16) следует, что $\alpha_2 = \beta_2$. Тогда в силу краевого условия $\alpha_1 + \beta_1 = 1$ и вытекающего из него неравенства $\alpha_1 \ne \beta_1$ верхняя 2-местная полка стеллажа содержит две разных суммы

$$(\alpha_1 + \beta_2) \text{ и } (\alpha_2 + \beta_1).$$

Значит, (3,3)-стеллаж всегда правильный.

Рассмотрение общего шага индукции для (3,n)-стеллажей при $n > 3$ разобьем на два подслучая. Они связаны с возможным значением предпоследнего из чисел второго набора, т.е. β_{n-1}. Мы обсудим здесь два случая.

случай 1: $\beta_{n-1} < n - 1$,

случай 2: $\beta_{n-1} = n - 1$.

В **случае 1** мы докажем правильность (3,n)-стеллажа методом от противного. В начале доказательства зафиксируем важное для дальнейших обсуждений условие

$$\beta_n - \beta_{n-1} \ge 2. \qquad (17)$$

Допустим теперь, что все полки обсуждаемого стеллажа — неправильные.

Рассмотрим прежде всего последнюю (2-местную) рабочую полку стеллажа (считая ее неправильной). Тогда $\alpha_2 + \beta_n = \alpha_3 + \beta_{n-1}$.

Отсюда $\alpha_2 = 3 + \beta_{n-1} - n < 3 + (n-1) - n = 2$, т.е.

$$\alpha_2 \le 1. \qquad (18)$$

ЛЕММА 1. Пусть для неправильного (3,n)-стеллажа выполняется условие $\alpha_2 \le 1$ и, кроме того, для некоторого номера $k (3 \le k \le n)$ выполняется неравенство

$$\beta_k - \beta_{k-1} \geq 2. \qquad (19)$$

Тогда условие (19) выполняется и для пары β_{k-1}, β_{k-2}

Доказательство леммы. Рассмотрим содержащую 3 суммы полку U_{k+1} :

$$(\alpha_1 + \beta_k), \quad (\alpha_2 + \beta_{k-1}), \quad (\alpha_3 + \beta_{k-2}). \qquad (20)$$

В силу условий (18) и (19) первая из этих сумм строго больше второй

$$(\alpha_1 + \beta_k) > (\alpha_2 + \beta_{k-1}). \qquad (21)$$

Так как мы считаем обсуждаемый стеллаж неправильным, то и рассматриваемая полка (20) является неправильной. Тогда неравенство (21) приводит к равенству

$$(\alpha_2 + \beta_{k-1}) = (\alpha_3 + \beta_{k-2}).$$

Переставляя слагаемые в этом равенстве, получаем:

$$\beta_{k-1} - \beta_{k-2} = \alpha_3 - \alpha_2 \geq 3 - 1 = 2.$$

Лемма 1 доказана.

Ее можно применить индуктивным образом для всех полок (3,n)-стеллажа, содержащих по три суммы. Для самой нижней из рабочих полок, содержащей 3 суммы, условия (18) и (19) выполняются при $k = n$. Тогда по индукции условие (19) передается "по наследству" всем трехместным полкам.

В частности, для самой верхней из таких полок

$$U_4 : (\alpha_1 + \beta_3), \quad (\alpha_2 + \beta_2), \quad (\alpha_3 + \beta_1)$$

получим из индуктивной схемы:

$$\beta_2 - \beta_1 \geq 2. \qquad (22)$$

Рассмотрим теперь верхнюю рабочую полку, содержащую две суммы

$$(\alpha_1 + \beta_2), \quad (\alpha_2 + \beta_1).$$

Допущение о неправильности этой полки дает равенство $(\alpha_1 + \beta_2) = (\alpha_2 + \beta_1)$, следствием которого является $\beta_2 - \beta_1 = \alpha_2 - \alpha_1$.

Но это равенство противоречит условиям (18) и (22). К противоречию привело допущение о том, что (3,n)-стеллаж, удовлетворяющий условию $\beta_{n-1} < n - 1$, может быть неправильном.

Следовательно, в первом случае общий шаг индукции рассмотрен.

Замечание. В этом случае основной индуктивный прием остается невостребованным в полной мере.

Переходим к **случаю 2**, в котором выполнено условие

$$\beta_{n-1} = n - 1. \qquad (23)$$

Здесь при обсуждении общего шага для (3,n)-стеллажа

$(\alpha_1 + \beta_2), \quad (\alpha_2 + \beta_1),$

$(\alpha_1 + \beta_3), \quad (\alpha_2 + \beta_2), \quad (\alpha_3 + \beta_1),$

....

$(\alpha_1 + \beta_n), \quad (\alpha_2 + \beta_{n-1}), (\alpha_3 + \beta_{n-2}),$

$\qquad (\alpha_2 + \beta_n), \quad (\alpha_3 + \beta_{n-1})$

мы введем понятие *усеченного* стеллажа. Для этого напомним, что наш основной (3,n)-стеллаж построен из наборов $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $(\beta_1, ..., \beta_{n-1}, \beta_n)$.

Усеченный (3,n-1)-стеллаж, соответствующий исходному (основному) (3,n)-стеллажу, мы построим по правилам, описанным в начале работы, из набора

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \text{ и } (\beta_1, ..., \beta_{n-1}). \qquad (24)$$

При этом условие (23) означает, что для набора (24) выполняются три стандартных краевых условия. Усеченный стеллаж содержит на одну полку меньше, чем основной (3,n)-стеллаж. Все трехместные полки усеченного стеллажа совпадают с трехместными полками основного стеллажа, имеющими тот же суммарный индекс. Последняя, 2-местная, полка усеченного стеллажа является неполной копией последней из трехместных полок основного стеллажа.

По допущению индукции любой (3,n-1)-стеллаж, в том числе и усеченный, соответствующий основному (3,n)-стеллажу, является правильным при любых формирующих его числах α_k и β_ℓ. Поэтому в нем имеется хотя бы одна правильная полка. В обсуждаемом усеченном (3,n-1)-стеллаже правильная полка может быть либо верхней двухместной, либо трехместной полкой (два этих случая объединим в понятие *верхней части стеллажа*), либо — последней (нижней) двухместной полкой.

Допустим сначала, что хотя бы одна правильная полка усеченного стеллажа расположена в его верхней части. Тогда правильность этой полки на (3, n-1)-стеллаже означает правильность аналогичной полки (3, n)- стеллажа. Основной стеллаж в этой ситуации также будет правильным.

Пусть теперь правильной является только последняя полка усеченного стеллажа. Если при этом хотя бы одна из двух нижних полок (2-местная или 3-местная) основного стеллажа является правильной, то общий шаг индукции можно считать сделанным автоматически.

Остается разобрать случай, когда обе эти полки — неправильные. Обратим внимание на 3 частных факта, вытекающие из сделанных допущений:

$$1)\,(\alpha_2 + \beta_{n-1}) \neq (\alpha_3 + \beta_{n-2})$$

— последняя двухместная полка усеченного стеллажа — правильная;

$$2)\ (\alpha_2 + \beta_n) = (\alpha_3 + \beta_{n-1})$$

— последняя, 2-местная, полка основного стеллажа — неправильная;

3) нижняя 3-местная полка

$$U_{n+1} : (\alpha_1 + \beta_n), (\alpha_2 + \beta_{n-1}), (\alpha_3 + \beta_{n-2})$$

основного стеллажа — неправильная.

Из условия 2) получим:

$$\alpha_2 = \alpha_3 + \beta_{n-1} - n = 3 + (n-1) - n = 2. \quad (25)$$

Тогда из условия 1) следует, что $\beta_{n-2} \neq 2 + n - 1 - 3 = n - 2,$ т.е.

$$\beta_{n-2} < n - 2. \quad (26)$$

Из (25) и (26) теперь имеем

$$\alpha_2 + \beta_{n-1} > \alpha_3 + \beta_{n-2}.$$

Это означает, что на неправильной трехместной полке U_{n+1} должно выполняться равенство

$$\alpha_1 + \beta_n = \alpha_3 + \beta_{n-2}.$$

Отсюда следует, что $\alpha_1 = 0,$ и тогда $\beta_1 = 1.$

Рассмотрим теперь верхнюю полку основного стеллажа, содержащую суммы $(\alpha_1 + \beta_2)$ и $(\alpha_2 + \beta_1).$

В силу полученных условий $\alpha_3 = 3, \alpha_2 = 2,$ $\alpha_1 = 0, \beta_1 = 1$ имеем цепочку неравенств

$$\alpha_1 + \beta_2 = 0 + \beta_2 \leq 2 < 2 + 1 = \alpha_2 + \beta_1.$$

Эти неравенства означают, что в последнем из разбираемых случаев правильной на (3,n)-стеллаже является верхняя, 2-местная, полка, так что сам стеллаж также является правильным. Общий шаг индукции описан в полном объеме; произвольный допустимый (3,n)-стеллаж является правильным. Теорема 1 доказана.

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ О НАБОРАХ В (4,n)-СЛУЧАЕ

ТЕОРЕМА 2. *Любой допустимый (4,n)-набор является правильным.*

Доказательство.

Для (4,n)-стеллажей сохраняют силу идеи теоремы 1, но реализация этих идей отягощается еще большим количеством частных случаев и деталей. Так, основным моментом доказательства является использование математической индукции.

Ее основанием является утверждение о правильности любого допустимого (4,4)-стеллажа. Этот факт наряду с несколькими другими несложными утверждениями о правильных (4,n)-наборах выделим в подборку вспомогательных лемм.

ЛЕММА 2. Любой допустимый (4,4)-стеллаж — правильный.

ЛЕММА 3. Если при $n > 4$ пара (α_1, α_2) элементов допустимого (4,n)-набора имеет значения

$$a)\,(1,0) \text{ или } b)\,(1,1) \text{ или } c)\,(0,2), \quad (27)$$

то такой набор является правильным.

ЛЕММА 4. Если при $n > 4$ для α-компоненты допустимого (4,n)-набора выполняются условия

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (0,0,3,4) \text{ или } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (0,1,3,4),$$

то этот набор является правильным.

ЛЕММА 5. Если при $n > 4$ для элементов допустимого (4,n)-набора выполняются условия

$$\alpha_2 = 0, \alpha_3 = 2,$$

то такой набор является правильным.

Доказательства этих лемм однотипны и не составляют большого труда. Например, докажем лемму 5.

Пусть, от противного, (4,n)-стеллаж удовлетворяет условиям этой леммы и не имеет правильных рабочих полок. На верхней полке U_3 такого стеллажа имеем две равные суммы $\alpha_1 + \beta_2 = \alpha_2 + \beta_1.$ Следовательно,

$$\beta_1 = \alpha_1 + \beta_2. \quad (28)$$

На полке U_4 имеем три суммы

$$\alpha_1 + \beta_3, \quad \alpha_2 + \beta_2, \quad \alpha_3 + \beta_1.$$

Для второй и третьей из этих сумм имеем с учетом (28) и условий леммы следующую оценку:

$$\alpha_3 + \beta_1 = \alpha_3 + (\alpha_1 + \beta_2) = 2 + \alpha_1 + \beta_2 > \\ > \beta_2 = (\alpha_2 + \beta_2).$$

Считая и эту полку неправильной, получим равенство

$$\alpha_1 + \beta_3 = \alpha_2 + \beta_2 = \beta_2.$$

Подставляя эту формулу в (28), получим

$$\beta_1 = 2\alpha_1 + \beta_3. \quad (29)$$

Так как β_1 не превосходит своего номера, из (29) и (28) получаем

$$\alpha_1 = 0, \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1.$$

Поочередное рассмотрение всех последующих (неправильных !) полок обсуждаемого стеллажа, содержащих по 4 суммы, позволяет индуктивно получить равенство единице для всех элементов массива β.

В самом деле, любая такая полка $U_{k+1} (k \geq 4)$ содержит 4 суммы

$$0 + \beta_k, \quad 0 + \beta_{k-1}, \quad 2 + \beta_{k-2}, \quad 4 + \beta_{k-3}.$$

Если при этом $\beta_{k-1} = \beta_{k-2} = \beta_{k-3} = 1$, а полка U_{k+1} — неправильная, то и $\beta_k = 1$.

Остается заметить, что цепочка равенств

$$\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_n = 1$$

противоречит краевому условию $\beta_n = n$. Противоречие доказывает лемму 5.

Теперь в рамках общего шага индукции рассмотрим произвольный допустимый (4,n)-набор при условии $n > 4$. Здесь, как и в ситуации (3,n)-наборов, важным для обсуждения является значение β_{n-1}. В случае

$$\beta_{n-1} = n - 1 \quad (30)$$

можно, как и в теореме 1, воспользоваться индуктивным сведением вопроса о правильности обсуждаемого (4,n)-набора к рассмотрению усеченного стеллажа. Как и ранее, усеченный (4,n-1)-стеллаж, содержит на одну полку меньше, чем исходный (4,n)-стеллаж. Но теперь в верхнюю часть исходного стеллажа

$$U_3 : (\alpha_1 + \beta_2),\ (\alpha_2 + \beta_1),$$

$$U_4 : (\alpha_1 + \beta_3),\ (\alpha_2 + \beta_2),\ (\alpha_3 + \beta_1),$$

$$U_5 : (\alpha_1 + \beta_4),\ (\alpha_2 + \beta_3),\ (\alpha_3 + \beta_2),\ (\alpha_4 + \beta_1),$$

....

$$U_{n+1} : (\alpha_1 + \beta_n),\ (\alpha_2 + \beta_{n-1}), (\alpha_3 + \beta_{n-2}), (\alpha_4 + \beta_{n-3}),$$

$$U_{n+2} : \qquad (\alpha_2 + \beta_n),\ (\alpha_3 + \beta_{n-1}), (\alpha_4 + \beta_{n-2}),$$

$$U_{n+3} : \qquad (\alpha_3 + \beta_n), (\alpha_4 + \beta_{n-1})$$

мы не включаем три нижние рабочие полки $U_{n+1}, U_{n+2}, U_{n+3}$. В усеченный стеллаж верхняя часть исходного (4,n)-стеллажа переходит без изменений, а вместо трех нижних полок остаются лишь две. Они имеют вид

$$V_{n+1} : \qquad (\alpha_2 + \beta_{n-1}), (\alpha_3 + \beta_{n-2}), (\alpha_4 + \beta_{n-3}),$$

$$V_{n+2} : \qquad (\alpha_3 + \beta_{n-1}), (\alpha_4 + \beta_{n-2}).$$

Для доказательства теоремы 2 в случае (30) нам потребуются два следующих утверждения.

Предложение 4. *Пусть заданы два набора*

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \text{ и } \beta = (\beta_1, ..., \beta_n), n > 4,$$

удовлетворяющие всем ограничениям исходной задачи и дополнительному условию

$$\beta_{n-1} = n - 1.$$

Если в усеченном стеллаже является правильной последняя полка, то исходный (4,n)-стеллаж также правильный.

Предложение 5. *Пусть в условиях предложения 2 последняя полка усеченного стеллажа является неправильной, а предпоследняя — правильной. Тогда для исходного (4,n)-набора выполняется одно из двух условий: либо*

1) этот набор правильный, либо

2) элементы α_1 и α_2 первого из двух наборов удовлетворяют условиям

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 2.$$

Доказательство предложения 4.

Рассмотрим две нижние рабочие полки U_{n+2}, U_{n+3} основного стеллажа. Если хотя бы одна из них правильная, то доказывать нечего. Предположим поэтому, что обе они — неправильные.

При выполнении условий

$$\alpha_4 = 4, \beta_n = n, \beta_{n-1} = n - 1$$

из рассмотрения полки U_{n+3} имеем равенство

$$\alpha_3 + n = 4 + (n - 1).$$

Следовательно,

$$\alpha_3 = 3. \quad (31)$$

Тогда на (правильной) двухместной полке V_{n+2} получаем неравенство

$$3 + (n - 1) \neq 4 + \beta_{n-2} \text{ или } \beta_{n-2} \neq n - 2.$$

Это означает, что

$$\beta_{n-2} < n - 2. \quad (32)$$

Возвращаясь к основному стеллажу, рассмотрим на нем неправильную полку U_{n+2} с тремя суммами

$$(\alpha_2 + n), \quad (3 + (n - 1)), \quad (4 + \beta_{n-2}).$$

В силу (31) имеем неравенство

$$4 + \beta_{n-2} < 4 + (n-2) = 3 + (n-1).$$

Т.к. U_{n+2} — неправильная, это означает, что $\alpha_2 + n = 4 + \beta_{n-2}$ или

$$\beta_{n-2} = (n-4) + \alpha_2. \qquad (33)$$

Заметим еще, что из (32) и (33) вытекает неравенство $\alpha_2 < 2$. Пользуясь им, можно рассмотреть 4 "булевские" комбинации для пары (α_1, α_2):

$$1)\, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0;\ 2)\, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1;$$
$$3)\, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0;\ 4)\, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1.$$

В первом и втором из этих случаев получаем с учетом равенства (31) и леммы 4 утверждение о правильности обсуждаемого (4,n)-стеллажа. В третьем и четвертом случае аналогичный вывод обеспечивается леммой 3. Предложение 4 доказано.

Доказательство предложения 5.

Здесь мы последовательно рассмотрим 5 нижних полок двух стеллажей

$$U_{n+3}, V_{n+2}, U_{n+2}, V_{n+1}, U_{n+1},$$

считая, что единственной правильной из них является V_{n+1} (если хотя бы одна из полок $U_{n+3}, U_{n+2}, U_{n+1}$ — правильная, то доказывать нечего).

Напомним, что в рамках этого доказательства, по-прежнему, $\beta_{n-1} = (n-1)$. Тогда из рассмотрения U_{n+3} имеем $\alpha_3 + n = 4 + (n-1)$ или $\alpha_3 = 3$.

Из равенства $\alpha_3 + (n-1) = 4 + \beta_{n-2}$, возникающего на полке V_{n+2}, получаем

$$\beta_{n-2} = n - 2. \qquad (34)$$

Далее, три суммы на полке U_{n+2} имеют вид

$$\alpha_2 + n, \quad 3 + (n-1), \quad 4 + (n-2).$$

Так как эта полка предполагается неправильной, то $\alpha_2 + n \geq n + 2$, т.е.

$$\alpha_2 = 2. \qquad (35)$$

Три суммы на единственной правильной полке из рассматриваемых пяти, т.е. на U_{n+1}, имеют с учетом уже полученной информации вид

$$(\alpha_2 + \beta_{n-1}) = n + 1, \quad (\alpha_3 + \beta_{n-2}) = n + 1,$$
$$(\alpha_4 + \beta_{n-3}) = 4 + \beta_{n-3}.$$

Поэтому правильной такая тройка чисел может быть лишь при условии

$$\beta_{n-3} < n - 3.$$

Наконец, пятая (неправильная) полка из рассматриваемого набора, т.е. U_{n+1}, содержит 4 суммы

$$(\alpha_1 + n), (2 + (n-1)), (3 + (n-2)), (4 + \beta_{n-3}).$$

Две средние суммы здесь равны $(n+1)$, а $4 + \beta_{n-3} < 4 + (n-3) = n + 1$.

Так как U_{n+1} — неправильная, мы получаем условие $\alpha_1 + n = 4 + \beta_{n-3}$.

Отсюда $\alpha_1 = 4 - n + \beta_{n-3} < 4 - n + (n-3) = 1$, т.е.

$$\alpha_1 = 0. \qquad (36)$$

Пара полученных равенств (35) и (36) является одним из требуемых в предложении 5 вариантов. Предложение 5 доказано.

Вместе с этим завершается и рассмотрение случая (30) в рамках доказательства теоремы 2. В самом деле, в этом случае индуктивное допущение о правильности всех (4, n-1)-наборов приводит (в соответствии с предложениями 2 и 3) либо к утверждению о том, что обсуждаемый (4,n)-набор является правильным, либо к паре условий (35), (36). Но по лемме 3 (п. с) два этих условия также означают правильность (4,n)-набора.

Переходим к обсуждению случая

$$\beta_{n-1} \leq (n-2). \qquad (37)$$

Здесь, в отличие от (3,n)-наборов обсуждение приходится разбивать еще на 2 подслучая.

Предложение 6. *Если для (4,n)-набора выполняется условие*

$$\beta_{n-1} = n - 2, \qquad (38)$$

то этот набор — правильный.

Доказательство. На (4,n)-стеллаже, отвечающем исходному набору, рассмотрим последнюю рабочую полку U_{n+3}. Считая ее неправильной, получаем:

$$\alpha_3 + n = 4 + (n-2), \text{ т.е. } \alpha_3 = 2.$$

Рассмотрим теперь два случая, связанные с элементом α_2. Если $\alpha_2 = 0$, то в силу леммы 4 можно утверждать, что весь (4,n)-стеллаж является правильным (несмотря на наличие в нем неправильной последней полки).

Допустим теперь, что $\alpha_2 > 0$, и что все остальные полки стеллажа также неправильные. Тогда первая сумма на полке

$$U_{n+2}: \quad (\alpha_2 + n), \quad 2 + (n-2), \quad (4 + \beta_{n-2})$$

строго больше второй. Это означает, что выполняется равенство

$$n = 4 + \beta_{n-2} \quad \text{или} \quad \beta_{n-2} = n - 4.$$

Таким образом, мы имеем здесь равенства

$$\beta_k = 2k - n \tag{39}$$

при $n - 2 \le k \le n$.

Методом математической индукции покажем теперь (по аналогии с обсуждением теоремы 1), что последовательное рассмотрение каждой очередной (снизу вверх) полки обсуждаемого (4,n)-стеллажа позволяет на единицу уменьшить нижнюю границу для k в формуле (39). Действительно, каждая из полок $U_{j+1}(4 \ge j \ge n)$, содержащих по 4 суммы, имеет вид

$$U_{j+1}: \quad \alpha_1 + \beta j, \quad \alpha_2 + \beta j - 1,$$
$$\alpha_3 + \beta j - 2, \quad \alpha_4 + \beta j - 3.$$

Четверку этих сумм можно переписать с учетом сказанного в виде

$$\alpha_1 + (2j - n), \quad \alpha_2 + 2(j-1) - n,$$
$$2 + 2(j-2) - n, \quad 4 + \beta j - 3.$$

Заметим, что для первых трех из них справедлива цепочка неравенств

$$\alpha_1 + (2j - n) \ge (\alpha_2 - 2) + (2j - n) >$$
$$> (2 - 4) + (2j - n).$$

Так как полка U_{j+1} предполагается неправильной, это означает выполнение равенства

$$-2 + (2j - n) = 4 + \beta j - 3.$$

Тем самым, формула $\beta j - 3 = (2j - n) - 6 = = 2(j-3) - n$ подтверждается.

Ясно, однако, что монотонное изменение β_k на две единицы с каждым номером в целом противоречит условиям $0 \le \beta_k \le k$. Полученное противоречие доказывает предложение 6.

Завершается доказательство теоремы 2 следующим утверждением.

Предложение 7. *Если для (4,n)-набора выполняется условие*

$$\beta_{n-1} < n - 2, \tag{40}$$

то этот набор — правильный.

Схема доказательства предложения 7, как и предыдущего предложения 5, повторяет фрагменты рассмотрения (3,n)-стеллажей. Перепишем, прежде всего, неравенство (40) в виде более удобной формулы

$$\beta_n - \beta_{n-1} \ge 3. \tag{41}$$

Считая все полки обсуждаемого (4,n)-стеллажа неправильными, мы как и раньше, придем к противоречию. Так, из рассмотрения пары сумм на неправильной последней полке U_{n+3} имеем: $\alpha_3 + n = \alpha_4 + \beta_{n-1}$.

Отсюда и из основного неравенства (41) следует, что

$$\alpha_3 = 4 - n + \beta_{n-1} \le 1.$$

На полке U_{n+2} имеем три суммы $\alpha_2 + \beta_n$, $\alpha_3 + \beta_{n-1}, 4 + \beta_{n-2}$.

Так как

$$\alpha_2 + \beta_n \ge \alpha_2 + (\beta_{n-1} + 3) =$$
$$= (3 + \alpha_2) + \beta_{n-1} > \alpha_3 + \beta_{n-1},$$

а полка U_{n+2} — неправильная, то $\alpha_3 + \beta_{n-1} = = 4 + \beta_{n-2}$.

Отсюда получаем $\beta_{n-1} - \beta_{n-2} = 4 - \alpha_3 \ge 3$.

Аналогичные индуктивные рассмотрения остальных неправильных полок, содержащих по 4 суммы

$$\alpha_1 + \beta j, \quad \alpha_2 + \beta j - 1, \quad \alpha_3 + \beta j - 2,$$
$$\alpha_4 + \beta j - 3 (4 \le j \le n).$$

приводят к выводу

$$\beta_{j-2} - \beta_{j-3} \ge 3 (4 \le j \le n + 2). \tag{42}$$

Столь быстрое убывание β_k (при уменьшении номера k), снова противоречит условиям $0 \le \beta_k \le k$.

Предложение 7, а с ним и теорема 2, доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Keller O.-H.* Ganze Cremona-Transformationen / O.-H. Keller // Monatsh. Math. Phys. 1939. vol. 47. S. 299—306.

2. *Essen A.* Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture: Progress in Mathematics Vol. 190 / A. Essen. Basel, Berlin, Boston : Birkhauser Verlag, 2000. 329 p.

3. *Кострикин А. И.* Основы алгебры: учебник для вузов / А. И. Кострикин. М. : Физматлит, 1994. 320 с.

4. *Moh T. T.* On the Global Jacobian Conjecture and the configurations of roots / T. T. Moh // Journal fur die Reine Angew. Math. 1983. Bd. 340. S. 140—212.

5. *Шиповская А. В.* Задача о двух наборах натуральных чисел / http://edu.vgasu.vrn.ru/SiteDirectory/upnpkvk/nirs/Shared/Научный Вестник Студент и наука № 7 2011 г.pdf

6. *Лобода А. В.* Коэффициентный подход к некоторым задачам многомерного комплексного анализа / А. В. Лобода // Черноземный альманах научных исследований. Серия: “Фундаментальная математика”. Воронеж. 2005. № 1(1). С. 99—112.

7. *Атанов А. В.* Об ограничениях и запретах на коэффициенты келлеровых отображений / А. В. Атанов, А. В. Лобода // Вестник ВГУ. Сер. “Физика. Математика”, № 2, 2008, С. 108—114.

Лобода А. В., доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики ВГАСУ, профессор кафедры цифровых технологий ВГУ
E-mail: lobvgasu@yandex.ru
Тел.: 278-10-28; 271-53-62

Шиповская А. В., студент, специальность "Информационные системы и технологии", Воронежский государственный архитектурно-строительный университет
Тел.: 8-906-588-46-27

Loboda A. V., doctor of of physico-mathematical sciences, professor, chaire of higher mathematics of Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering, professor, chaire of digital technologies of Voronezh State University
E-mail: lobvgasu@yandex.ru
Tel.: 278-10-28; 271-53-62

Shipovskaja A. V., student, department of the Information Systems and Technologies, Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering
Tel.: 8-906-588-46-27