

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЫЧНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ С ПОМОЩЬЮ ДИСКРЕТНОГО

А. В. Курбатов, В. Г. Курбатов

*Воронежский государственный университет
Финансовый университет при правительстве РФ*

Поступила в редакцию 20 февраля 2012 г.

Аннотация: предлагается процедура дополнительной обработки дискретного преобразования Фурье (ДПФ) сеточных значений функции, заданной на оси. Она позволяет получить при естественных ограничениях более осмысленное приближение к обычному преобразованию Фурье исходной функции, чем непосредственные значения ДПФ.

Ключевые слова: дискретное преобразование Фурье, обобщенная функция, оценка, обработка сигналов.

Abstract: a procedure of additional processing of the discrete Fourier transform (DFT) of the values at mesh points of a function defined on a real axes is offered. It allows one to obtain under natural assumptions a more sensible approximation to the ordinary Fourier transform of the initial function than values of DFT itself.

Key words: discrete Fourier transform, distribution, estimate, signal processing.

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) хорошо тем, что для него имеются алгоритмы быстрого вычисления [1, 2]. Поэтому возникает желание применить ДПФ для приближенного вычисления обычного преобразования Фурье (ПФ). Настоящая статья посвящена обсуждению такого применения.

Простейшая схема применения ДПФ для приближенного вычисления обычного ПФ является следующей. Сначала по функции f , заданной на \mathbb{R} , строится последовательность c_k , заданная на группе \mathbb{Z}_N вычетов по модулю N . Затем находится ДПФ \hat{c}_m от c_k . И наконец, ДПФ \hat{c}_m пересчитывается в ПФ \hat{f} функции f .

Буквальное применение этой схемы (теорема 8), хотя и дает приближение, которое сходится к точному ПФ в смысле обобщенных функций (теорема 9), не очень удобно. С целью его улучшения в настоящей статье предлагается интерпретация (теорема 10) двух хорошо известных приемов [3] — обрезания и сглаживания, позволяющая получать конкретные оценки (теоремы 11 и 12) точности окончательного результата. Приводятся численные примеры. Отметим тесную связь рассматриваемой задачи с задачей аппроксимации, понимаемой как приближение заданной функции функциями определенного класса.

Авторы выражают благодарность В. П. Золотову и Л. А. Минину за полезные обсуждения.

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Напомним основные свойства преобразования Фурье (ПФ) [3, 4, 5].

Преобразованием Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ называют функцию

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

а сопряженным [4, с. 126] Фурье функции f — функцию

$$\check{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\omega x} dx, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, $\check{f}(\omega) = \hat{f}(-\omega)$. Таким образом, \hat{f} и \check{f} содержат одну и ту же информацию о функции f , а их свойства аналогичны. Преобразование Фурье допускает расширение с L_1 на пространство \mathcal{S}' обобщенных функций умеренного роста [5], но для такого расширения удобная вычислительная формула отсутствует. В дальнейшем, говоря о функциональных рядах, мы подразумеваем (если явно не оговорено противное), что их сходимость понимается в смысле пространства \mathcal{S}' . Это соглашение в большинстве случаев позволяет о сходимости почти не задумываться.

* © Курбатов А. В., Курбатов В. Г., 2012

Предложение 1. Преобразование Фурье обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} (f(x/b))^{\wedge}(\omega) &= b\hat{f}(b\omega), \\ (f(x-a))^{\wedge}(\omega) &= e^{-i\omega a} \cdot \hat{f}(\omega), \\ (e^{iax} \cdot f(x))^{\wedge}(\omega) &= \hat{f}(\omega - a), \\ (f * g)^{\wedge}(\omega) &= \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega), \\ (f \cdot g)^{\wedge}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \hat{f}(\omega) * \hat{g}(\omega), \\ (\hat{f})^{\vee}(x) &= 2\pi f(x), \quad (\check{f})^{\wedge}(x) = 2\pi f(x). \end{aligned}$$

Здесь символ $f * g$ означает свертку

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y) dy$$

(обобщенных) функций f и g . Соответствующие формулы справедливы при условии, что свертка определена.

Предложение 2. Справедливы формулы

$$\begin{aligned} (\delta(x-a))^{\wedge} &= e^{-ia\omega}, \quad (e^{iax})^{\wedge} = 2\pi\delta(\omega-a), \\ (\Pi(x))^{\wedge} &= \text{sinc}(\omega/2), \quad (\Lambda(x))^{\wedge} = \text{sinc}^2(\omega/2), \\ (\xi_{a,b}(x))^{\wedge} &= -2 \frac{\cos(b\omega) - \cos(a\omega)}{(b-a)\omega^2}, \\ \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-x^2/(2\sigma^2)} \right]^{\wedge} &= e^{-\sigma^2\omega^2/2}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\xi_{a,b}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } |x| \geq b, \\ \frac{b-|x|}{b-a}, & \text{если } a \leq |x| \leq b, \\ 1, & \text{если } |x| \leq a, \end{cases}$$

$$\Pi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } |x| > \frac{1}{2}, \\ 1/2, & \text{если } |x| = \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{если } |x| < \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } |x| > 1, \\ 1 - |x|, & \text{если } |x| \leq 1, \end{cases} \quad \text{sinc } x = \frac{\sin x}{x}.$$

Следствие 3. Для любой двусторонней последовательности $c_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$, растущей не быстрее некоторой степени k , и любого $h > 0$ справедливо тождество

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \delta(x - kh) \right)^{\wedge} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-ikh\omega}. \quad (1)$$

2. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Пусть N — натуральное число. Группой вычетов по модулю N называют фактор-группу $\mathbb{Z}_N = \mathbb{Z} / N\mathbb{Z}$. Изоморфным представлением группы \mathbb{Z}_N является мультипликативная группа всех комплексных значений корня N -ой степени из 1:

$$1, e^{i\frac{2\pi}{N}}, e^{i\frac{4\pi}{N}}, e^{i\frac{6\pi}{N}}, \dots, e^{i(N-1)\frac{2\pi}{N}}.$$

Элементы группы \mathbb{Z}_N будем обозначать символами $k \in \mathbb{Z}$, имея в виду, что два числа $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, отличающиеся на величину, кратную N , означают один и тот же элемент группы \mathbb{Z}_N .

Функцию f , определенную на группе \mathbb{Z}_N , будем представлять себе как двустороннюю N -периодическую последовательность f_k , $k \in \mathbb{Z}$.

Дискретным преобразованием Фурье (ДПФ) функции $f: \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{C}$ называют функцию \hat{f} , также заданную на \mathbb{Z}_N , по правилу

$$\hat{f}_m = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-i2\pi\frac{km}{N}} f_k.$$

Дискретным копреобразованием Фурье функции f называют функцию \check{f} , заданную на \mathbb{Z}_N , по правилу

$$\check{f}_m = \sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi\frac{km}{N}} f_k.$$

Предложение 4. Дискретное преобразование Фурье обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} (\check{f}_{k-a})^{\wedge}_m &= e^{-i\frac{2\pi am}{N}} \hat{f}_m, \quad (e^{i\frac{2\pi ak}{N}} f_k)^{\wedge}_m = \hat{f}_{m-a}, \\ (f * g)^{\wedge}_m &= \hat{f}_m \cdot \hat{g}_m, \quad (f_k \cdot g_k)^{\wedge}_m = \frac{1}{N} (\hat{f} * \hat{g})_m, \\ (\hat{f})^{\vee}_k &= N f_k, \quad (\check{f})^{\wedge}_k = N f_k. \end{aligned}$$

Здесь свертку двух функций, заданных на \mathbb{Z}_N , определяют по формуле

$$(f * g)_k = \sum_{m=0}^{N-1} f_m g_{k-m}.$$

3. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ДПФ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ОБЫЧНОГО ПФ

В настоящем параграфе описывается представление ДПФ в виде ограничения обычного ПФ на некоторое естественное подпространство.

Пусть задана функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Сопоставим ей набор из $N \in \mathbb{N}$ чисел по следующему

правилу. (С целью упрощения обозначений число N будем считать четным.) Возьмем некоторое $b > 0$. Разобьем отрезок $[-b, b]$ на N равных частей с шагом $h = \frac{2b}{N}$ и заменим функцию f последовательностью значений

$$f(-b), f(-b + h), f(-b + 2h), \dots, f(b - h).$$

Будем применять к этим числам ДПФ. Для этого будем представлять их себе как N -периодическую последовательность, привязанную к точкам kh , $k \in \mathbb{Z}$.

Удобно реализовать эту N -периодическую последовательность чуть иначе. Сначала продолжим f с полуинтервала $[-b, b)$ периодически (с периодом $2b$) на всю ось. Периодическое продолжение будем обозначать символом \tilde{f} . Затем рассмотрим последовательность $f(kh)$, построенную по этому продолжению. Этой последовательности сопоставим приближение

$$f(x) \simeq h \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(kh) \delta(x - kh). \quad (2)$$

Множитель h здесь добавлен для того, чтобы средние значения f и приближения имели одинаковый порядок. Ниже в теореме 8 вычисляется обычное ПФ приближения (2).

Предложение 5. Для любого $h > 0$ имеет место тождество

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ikhx} = \frac{2\pi}{h} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(x - 2\pi \frac{k}{h}\right).$$

Доказательство. Получается из известного тождества [5, гл. 2, § 6.4]

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - 2\pi k).$$

с помощью замены переменных $x \mapsto hx'$. \square

Следствие 6. Для любого $h > 0$ и произвольной двусторонней последовательности c_k , $k \in \mathbb{Z}$, имеющей период N , справедливо тождество

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-ikhx} = H \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(x - mH) \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{-i2\pi \frac{km}{N}}.$$

где

$$H = \frac{2\pi}{Nh}.$$

Доказательство. В силу предложения 5 имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-ikhx} &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{k+mN} e^{-i(k+mN)hx} = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{-ikhx} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-imNh} = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{-ikhx} 2\pi \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(Nhx - 2\pi m) = \\ &= \frac{2\pi}{Nh} \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{-ikhx} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(x - 2\pi \frac{m}{Nh}\right) = \\ &= H \sum_{k=0}^{N-1} c_k \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-ikhx} \delta\left(x - 2\pi \frac{m}{Nh}\right) = \\ &= H \sum_{k=0}^{N-1} c_k \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi \frac{km}{N}} \delta\left(x - 2\pi \frac{m}{Nh}\right) = \\ &= H \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(x - 2\pi \frac{m}{Nh}\right) \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{-i2\pi \frac{km}{N}}. \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 7. Для любого $h > 0$ и произвольной двусторонней последовательности c_k , $k \in \mathbb{Z}$, имеющей период N , справедливо тождество

$$\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \delta(x - kh) \right]^\wedge = H \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{c}_m \delta(\omega - mH),$$

где \hat{c}_m — ДПФ последовательности c_k , а $H = \frac{2\pi}{Nh}$.

Доказательство. Из следствия 6 и формулы (1) вытекает, что

$$\begin{aligned} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \delta(x - kh) \right]^\wedge &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-ikh\omega} = \\ &= H \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - mH) \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{-i2\pi \frac{km}{N}}. \end{aligned}$$

Остается воспользоваться определением

$$\text{ДПФ: } \hat{c}_m = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{-i2\pi \frac{km}{N}}.$$

Теорема 7 позволяет отождествить ДПФ с сужением ПФ на соответствующее конечномерное подпространство. Наиболее выразительно эта формула выглядит в случае, когда $H = 1$, т.е. $h = \frac{2\pi}{N}$ (тем самым подразумевается, что $[-b, b) = [-\pi, \pi)$):

$$\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \delta\left(x - k \frac{2\pi}{N}\right) \right]^\wedge = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{c}_m \delta(x - m).$$

Отметим, что для того, чтобы и обратные преобразования выглядели столь же просто, в определении ПФ и ДПФ следует добавить соответственно множители $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ и $\frac{1}{\sqrt{N}}$.

Теорема 8. Для любого $h > 0$ обычное преобразование Фурье правой части форму-

лы (2) задается формулой

$$\left[h \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(kh) \delta(x - kh) \right]^{\wedge} = H \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{c}_m \delta(\omega - mH), \quad (3)$$

где \hat{c}_m — ДПФ последовательности $c_k = h\tilde{f}(kh)$,

а $H = \frac{2\pi}{Nh}$.

Доказательство. Вытекает из теоремы 7.

Теорема 9. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывная функция, растущая на бесконечности не быстрее многочлена. Тогда при $b \rightarrow \infty$ и $h \rightarrow 0$ правая часть формулы (3) сходится к \hat{f} в \mathcal{S}' .

Доказательство. Для любой $\varphi \in \mathcal{S}$ имеем

$$\left\langle \varphi(x), h \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(kh) \delta(x - kh) \right\rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(kh) \tilde{f}(kh) h.$$

Стандартные рассуждения математического анализа [6] показывают, что последняя сумма сходится к

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \tilde{f}(x) dx = \langle \varphi(x), \tilde{f}(x) \rangle.$$

В силу непрерывности ПФ в \mathcal{S}' [5, с. 165] отсюда и из теоремы 8 вытекает доказываемое утверждение.

Вычисление ПФ методом, описанным в теореме 8, иллюстрируют рис. 1—2. Из них видно, что значения ДПФ вне отрезка $[-NH/2, NH/2] = [-\pi/h, \pi/h]$ слабо связаны со значениями обычного ПФ и определяются периодичностью ДПФ. Поэтому если известна длина отрезка, содержащего существенный носитель \hat{f} , то рекомендуют выбирать h так, чтобы $2\pi/h$ было больше, чем эта длина. Последнее обстоятельство является одним из проявлений соотношения неопределенности.

4. УЛУЧШЕНИЕ КАЧЕСТВА АППРОКСИМАЦИИ

Результат теоремы 9 является малоэффективным с прикладной точки зрения. Желатель-

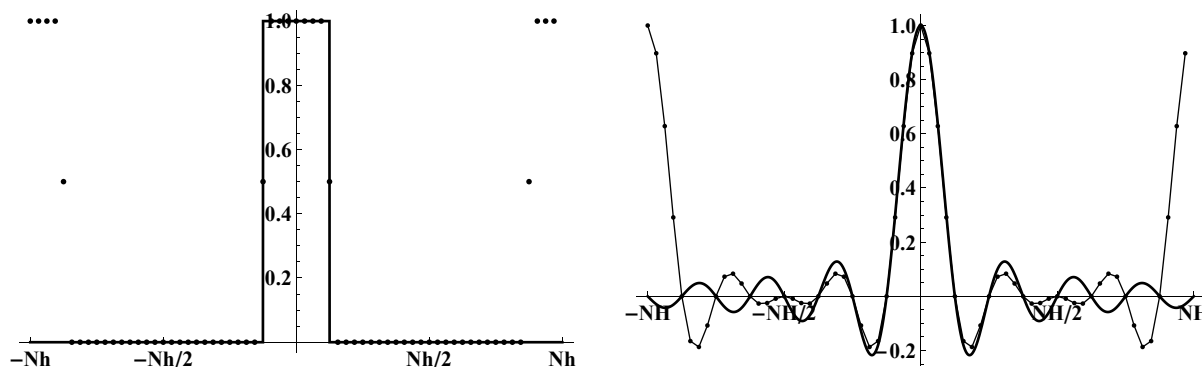


Рис. 1. Слева: аппроксимация (2) (точка с координатами (x_0, y_0) изображает слагаемое $x \mapsto y_0 \delta(x - x_0)$) функции $f(x) = \Pi\left(\frac{4x}{Nh}\right)$ (жирная линия). Справа: ПФ \hat{f} (жирная линия) функции f и его аппроксимация (3) (точки, символизирующие δ -функции, соединенные тонкой линией). Поскольку δ -функции в формуле (2) (в формуле (3)) идут с шагом h (в правой части (3) — с шагом H), высота символизирующих их точек увеличена в $1/h$ (соответственно в $1/H$) раз. $N = 32$

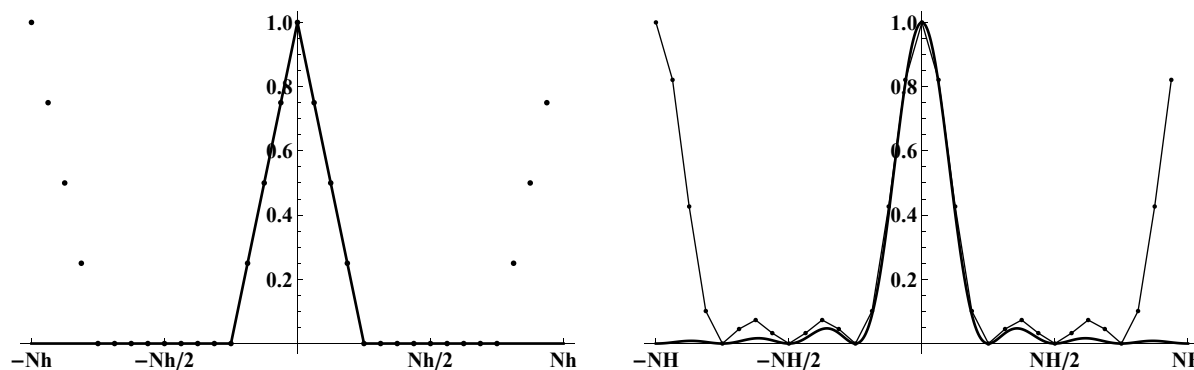


Рис. 2. То же для функции $f(x) = \Lambda\left(\frac{4x}{Nh}\right)$, но $N = 16$

но получить приближение к \hat{f} в более привычном смысле. С этой целью в настоящем параграфе δ -функции, стоящие в правой части формулы (3), “размазываются”, а значения правой части формулы (3), лежащие вне отрезка $[-NH/2, NH/2]$, — “отрезаются”. Обсуждаются варианты реализации этой процедуры.

Возьмем две функции $\beta, \Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. В дальнейшем β будет аппроксимировать δ -функцию в том смысле, что носитель β находится около нуля, а интеграл от β равен единице. Примерами функции β могут служить функции (предложение 2) Π , Λ и $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ при малом σ . Функция Ψ в дальнейшем будет примерно равна единице в окрестности нуля порядка $[-NH/2, NH/2]$ и стремиться к нулю на бесконечности. Примерами функции Ψ могут служить функции $x \mapsto \Pi\left(\frac{x}{2b}\right)$, $x \mapsto e^{-\mu^2 x^2}$ и $\xi_{a,b}$ при подходящих $0 \leq a \leq b$ и μ .

Перейдем от приближения (2) к приближению

$$f(x) \simeq \Psi(x) h \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(kh) \beta(x - kh). \quad (4)$$

Теорема 10. Для любого $h > 0$ обычное преобразование Фурье правой части формулы (4) задается формулой

$$\left[\Psi(x) h \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(kh) \beta(x - kh) \right]^\wedge = \frac{1}{Nh} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{c}_m \hat{\beta}(mH) \hat{\Psi}(\omega - mH), \quad (5)$$

где \hat{c}_m — ДПФ последовательности $c_k = h\tilde{f}(kh)$.

Доказательство. Заметим, что функцию

$$x \mapsto h \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(kh) \beta(x - kh)$$

можно представить в виде свертки правой части приближения (2) с функцией β . Поэтому ПФ от этой функции можно посчитать, используя правило применения ПФ к свертке (предложение 1) и теорему 8:

$$\left[h \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(kh) \beta(x - kh) \right]^\wedge = \left[\beta(x) * \left(h \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(kh) \delta(x - kh) \right) \right]^\wedge =$$

$$= \hat{\beta}(\omega) \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \delta(x - kh) \right]^\wedge = \hat{\beta}(\omega) \left(H \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{c}_m \delta(\omega - mH) \right) = H \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{c}_m \hat{\beta}(\omega) \delta(\omega - mH) = H \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{c}_m \hat{\beta}(mH) \delta(\omega - mH).$$

Теперь ПФ приближения (4) можно посчитать по правилу применения ПФ к произведению (предложение 1):

$$\left[\Psi(x) h \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(kh) \beta(x - kh) \right]^\wedge = \frac{1}{2\pi} \left[\Psi(x) \right]^\wedge * \left[h \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(kh) \beta(x - kh) \right]^\wedge = \frac{1}{2\pi} \hat{\Psi}(\omega) * \left[H \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{c}_m \hat{\beta}(mH) \delta(\omega - mH) \right] = \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{Nh} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{c}_m \hat{\beta}(mH) \left[\hat{\Psi}(\omega) * \delta(\omega - mH) \right] = \frac{1}{Nh} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{c}_m \hat{\beta}(mH) \hat{\Psi}(\omega - mH).$$

Пример 1. Предположим, что носитель исходной функции f почти содержится в некотором отрезке $[-a, a]$. Возьмем в качестве b число, большее a . Положим в схеме теоремы 10 $\beta(x) = \Lambda(x/h)/h$, $\Psi = \xi_{a,b}$. Тогда приближение (4) примет вид

$$f(x) \simeq \xi_{a,b}(x) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(kh) \Lambda(x/h - k) = \xi_{a,b}(x) \sum_{k=-N}^N \tilde{f}(kh) \Lambda(x/h - k). \quad (6)$$

Согласно теореме 10 и предложению 2 преобразование Фурье приближения (6) задается формулой

$$\left[\xi_{a,b}(x) \sum_{k=-N}^N \tilde{f}(kh) \Lambda(x/h - k) \right]^\wedge = \frac{1}{Nh} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{c}_m \text{sinc}^2(mH/2) \widehat{\xi_{a,b}}(\omega - mH). \quad (7)$$

Отметим, что график функции $x \mapsto \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(kh) \Lambda(x/h - k)$ представляет собой ломаную, проходящую через точки с координатами $(kh, \tilde{f}(kh))$.

Подчеркнем, что если f является кусочно-линейной, причем точки излома совпадают с точками kh , а носитель f содержится в $[-a, a]$,

то это приближение совпадает с функцией \tilde{f} . В результате правая часть формулы (7) в точности совпадает с ПФ исходной функции, см. рис. 4.

Примеры вычисления ПФ по формуле (7) приведены на рис. 3—4. Заметим, что как приближение (6), так и его ПФ (7) не зависят от выбора числа $b > a$. Но величина $b - a$ влияет на скорость убывания функции $\xi_{a,b}$ и, следовательно, на скорость сходимости ряда (7). Отметим, что для более гладких функций типа $f(x) = \Pi\left(\frac{2x}{Nh}\right) \cos(Hx)$ уже при $N = 16$ различие между точным ПФ и его приближением по формуле (7) визуально незаметно. Это — основная причина, по которой во всех численных примерах используются функции Π и Λ , имеющие в качестве особенностей разрывы 1-го рода и изломы соответственно.

В этом и последующих численных примерах все бесконечные суммы заменялись суммиро-

ванием от $-N/2$ до $N/2 - 1$, что уже обеспечивало хорошую точность.

В следующей теореме приводится оценка точности приближения (7).

Теорема 11. Пусть f — дважды дифференцируемая функция, причем $|f(x)| \leq M_0$ при $|x| \geq a$ и $|f''(x)| \leq M_2$ при $|x| \leq a$. Тогда для приближения (7) при всех $\omega \in \mathbb{R}$ справедлива оценка

$$\left| \hat{f}(\omega) - \frac{1}{Nh} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{c}_m \operatorname{sinc}^2(mH/2) \widehat{\xi}_{a,b}(\omega - mH) \right| \leq \left(\int_{-\infty}^{-b} + \int_b^{+\infty} \right) |f(x)| dx + 4M_0(b-a) + aM_2 \frac{h^2}{12}.$$

Доказательство. В соответствии с формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа [6, с. 270]

$$f(x) - f(kh) - f'(kh)(x - kh) = \frac{1}{2!} f''(\xi)(x - kh)^2.$$

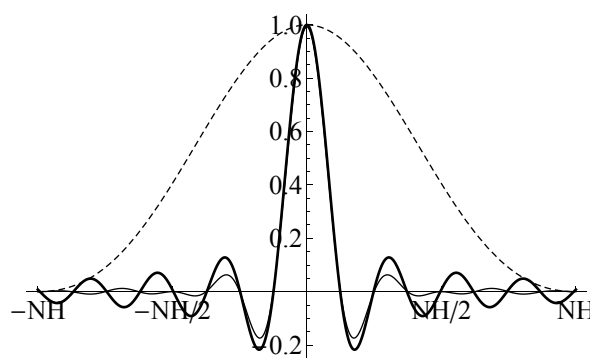
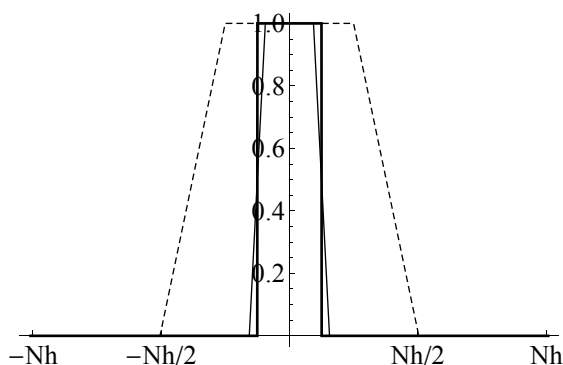


Рис. 3. Слева: аппроксимация (6) (тонкая линия) функции $f(x) = \Pi\left(\frac{4x}{Nh}\right)$ (жирная линия); пунктиром показано $\Psi(x) = \xi_{a,b}(x)$. Справа: ПФ \hat{f} функции f (жирная линия) и его аппроксимация (7) (тонкая линия); пунктиром показано $\beta(\omega) = \operatorname{sinc}^2\left(\frac{h\omega}{2}\right)$. $N = 32$, $a = Nh/4$ и $b = Nh/2$

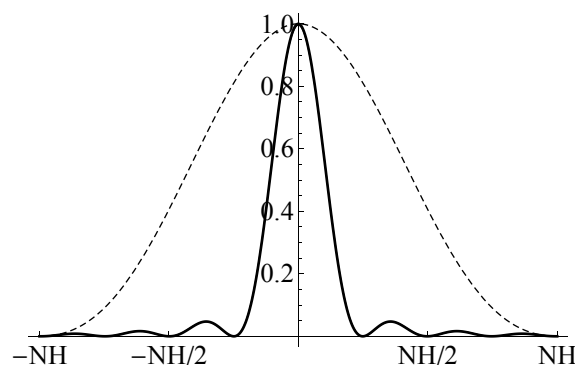
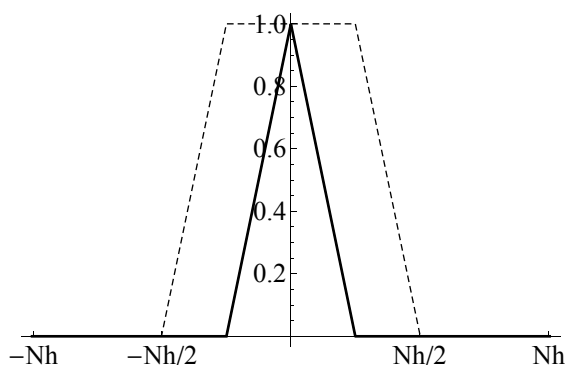


Рис. 4. То же для функции $f(x) = \Lambda\left(\frac{4x}{Nh}\right)$, но $N = 16$. На этом рис. совпадение функции и ее приближения, а также ПФ и его приближения являются полными, поскольку f является кусочно-линейной

Отсюда для любого $k \in \mathbb{Z}$ и для любого $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \left| f(x) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(kh) \Lambda(x/h - k) \right| = \\ & = \left| f(x) - f(kh) - f'(kh)(x - kh) \right| = \\ & = \left| \frac{1}{2!} f''(\xi)(x - kh)^2 \right| \leq M_2 \frac{(x - kh)^2}{2}. \end{aligned}$$

Поэтому*

$$\begin{aligned} & \int_{kh-h/2}^{kh+h/2} \left| f(x) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(kh) \Lambda(x/h - k) \right| dx \leq \\ & \leq \int_{kh-h/2}^{kh+h/2} M_2 \frac{(x - kh)^2}{2} dx = \frac{M_2 h^3}{24}. \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(x) - \xi_{a,b}(x) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(kh) \Lambda(x/h - k) \right| dx = \\ & = \left(\int_{-\infty}^{-b} + \int_b^{+\infty} \right) \left| f(x) - \xi_{a,b}(x) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(kh) \Lambda(x/h - k) \right| dx + \\ & + \left(\int_{-b}^{-a} + \int_a^b \right) \left| f(x) - \xi_{a,b}(x) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(kh) \Lambda(x/h - k) \right| dx + \\ & + \int_{-a}^a \left| f(x) - \xi_{a,b}(x) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(kh) \Lambda(x/h - k) \right| dx \leq \\ & = \left(\int_{-\infty}^{-b} + \int_b^{+\infty} \right) |f(x)| dx + \left(\int_{-b}^{-a} + \int_a^b \right) 2M_0 dx + \frac{2a}{h} \frac{M_2 h^3}{24} = \\ & = \left(\int_{-\infty}^{-b} + \int_b^{+\infty} \right) |f(x)| dx + 4M_0(b - a) + aM_2 \frac{h^2}{12}. \end{aligned}$$

Осталось напомнить, что $|\hat{f}(\omega) - \hat{g}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - g(x)| dx$.

Рассмотренное в примере 1 семейство функций $\beta_k(x) = \frac{1}{h} \Lambda(x/h - k)$, $k \in \mathbb{Z}$, обладает интерполяционным свойством Лагранжа: $\beta_k(mh) = 0$ при $m \neq k$. В результате этого (что использовалось в доказательстве теоремы 11) ряд $x \mapsto \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(kh) \beta_k(x)$ оказывается решением задачи интерполяции: его график проходит через точки с координатами $(kh, \tilde{f}(kh))$. Еще одно семейство, обладающее интерполяционным свойством Лагранжа, образуют функции $\beta_k(x) = \frac{1}{h} \text{sinc} \frac{\pi(x - kh)}{h}$, $k \in \mathbb{Z}$. Чуть более общему семейству функций β_k посвящен следующий

* Если f'' имеет выраженные локализованные максимумы, то для улучшения окончательного результата в следующей оценке можно сделать M_2 зависящим от x .

пример.

Пример 2. Этот пример является двойственным к примеру 1. Предположим, что носитель ПФ \hat{f} исходной функции f почти содержится в некотором отрезке $[-A, A]$. Возьмем в качестве B число, большее A . Положим $H = \frac{2B}{N}$ и $h = \frac{2\pi}{NH}$. Для упрощения обозначений будем считать, что A кратно h . Положим в теореме 10 $\hat{\beta}(\omega) = \xi_{A,B}(\omega)$, $\hat{\Psi}(\omega) = \frac{2\pi}{H} \text{sinc} \frac{\pi\omega}{H}$. Тогда

$$\begin{aligned} \beta(x) &= -\frac{1}{\pi} \frac{\cos(Bx) - \cos(Ax)}{(B - A)x^2}, \\ \Psi(x) &= \Pi \left(\frac{x}{Nh} \right), \end{aligned}$$

а приближение (4) примет вид

$$\begin{aligned} f(x) &\simeq -\frac{1}{\pi} \Pi \left(\frac{x}{Nh} \right) \times \\ &\times h \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(kh) \frac{\cos(B(x - kh)) - \cos(A(x - kh))}{(B - A)(x - kh)^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Отметим, что при $A \rightarrow B$ рассматриваемая функция β превращается в функцию $x \mapsto \frac{B}{\pi} \text{sinc}(Bx) = \frac{1}{h} \text{sinc} \frac{\pi x}{h}$, а приближение (8) — в равенство

$$f(x) \simeq \Pi \left(\frac{x}{Nh} \right) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(kh) \text{sinc} \frac{\pi(x - kh)}{h}.$$

Это обстоятельство интересно тем, что справедливо тождество Котельникова [7]

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kh) \text{sinc} \frac{\pi(x - kh)}{h}$$

при условии, что носитель ПФ функции f содержится в $[-NH/2, NH/2] = [-B, B]$.

Согласно теореме 10 и предложению 2 преобразование Фурье приближения (8) задается формулой

$$\begin{aligned} & \left[\Psi(x) h \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(kh) \beta(x - kh) \right]^\wedge = \\ & = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{c}_m \xi_{A,B}(mH) \text{sinc} \pi \left(\frac{\omega}{H} - m \right) = \\ & = \sum_{m=-N}^N \hat{c}_m \xi_{A,B}(mH) \text{sinc} \pi \left(\frac{\omega}{H} - m \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Вычисление ПФ по формуле (9) иллюстрируют рис. 5—6. Они показывают, насколько портит качество приближения добавление в формуле Котельникова множителя $\Pi \left(\frac{x}{Nh} \right)$.

В следующей теореме приводится оценка точности приближения (9).

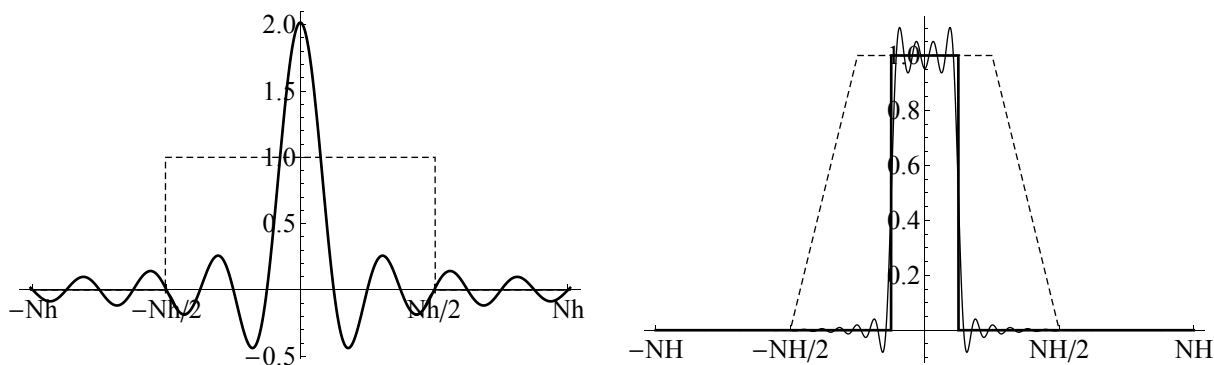


Рис. 5. Слева: аппроксимация (8) (тонкая линия) функции $f(x) = \frac{A}{\pi} \text{sinc}(Ax)$ (жирная линия); визуально на $[-b, b]$ они совпадают; пунктиром показано $\Psi(x) = \Pi\left(\frac{x}{Nh}\right)$. Справа: график ПФ $\hat{f}(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{2A}\right)$ функции f (жирная линия) и его аппроксимация (9) (тонкая линия); пунктиром показано $\frac{1}{Nh} \hat{\beta}(\omega) = \xi_{A,B}(\omega)$. Колебания аппроксимации (9) около точек разрыва связаны с явлением Гиббса [8]. $N = 32$, $A = NH / 4$ и $B = NH / 2$

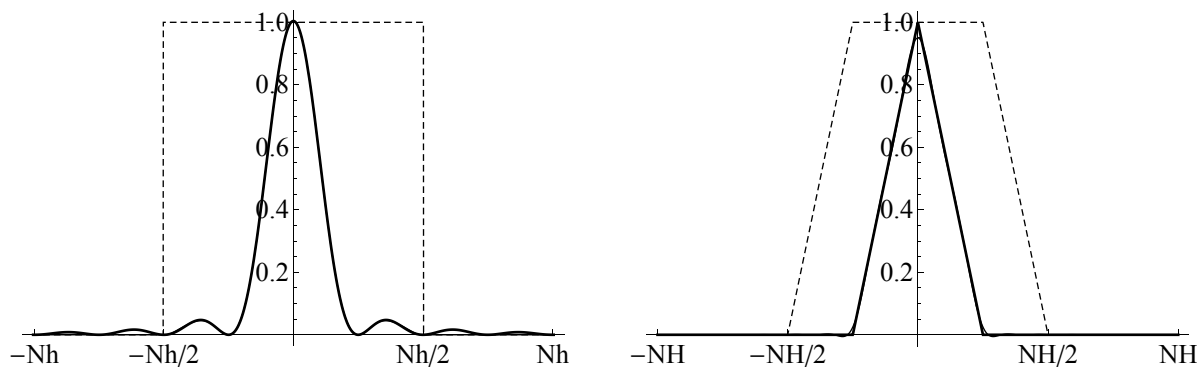


Рис. 6. То же для функции $f(x) = \frac{A}{2\pi} \text{sinc}^2(Ax / 2)$, но $N = 16$

Теорема 12. Пусть носитель \hat{f} сосредоточен в отрезке $[-A, A]$, $B = 2A$, а $|f(x)| \leq M_0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Тогда для приближения (9) при всех $\omega \in \mathbb{R}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \left| \hat{f}(\omega) - \sum_{m=-N}^N \hat{c}_m \xi_{A,B}(mH) \text{sinc} \pi \left(\frac{\omega}{H} - m \right) \right| &\leq \\ &\leq \left[\int_{-\infty}^{-Nh/2} + \int_{Nh/2}^{+\infty} \right] |f(x)| dx + \\ &+ 60M_0h + 96 \frac{M_0h}{\pi^2} \ln \left(\frac{N-1}{2} \right). \end{aligned}$$

Доказательство. В рассматриваемом случае $B = NH / 2$, $A = NH / 4$, а $h = \pi / B$. Поэтому

$$\begin{aligned} \beta(x) &= -\frac{2h}{\pi^2 x^2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{h} x \right) - \cos \left(\frac{\pi}{2h} x \right) \right] = \\ &= \frac{4h}{\pi^2 x^2} \left(1 + 2 \cos \frac{\pi x}{2h} \right) \sin^2 \frac{\pi x}{2h}. \end{aligned}$$

Поскольку $|1 + 2 \cos \frac{\pi x}{2h}| \leq 3$, а $|\sin \frac{\pi x}{2h}| \leq \frac{\pi|x|}{2h}$, имеем

$$|\beta(x)| \leq \begin{cases} \frac{12h}{\pi^2 x^2}, & \text{если } |x| \geq \frac{2h}{\pi}, \\ \frac{3}{h}, & \text{если } |x| \leq \frac{2h}{\pi}. \end{cases}$$

Отсюда

$$|\beta(xh)| \leq \gamma(x), \quad (10)$$

где

$$\gamma(x) = \frac{1}{h} \begin{cases} \frac{12}{\pi^2 x^2}, & \text{если } |x| \geq \frac{2}{\pi}, \\ 3, & \text{если } |x| \leq \frac{2}{\pi}. \end{cases}$$

Поскольку носитель \hat{f} содержится в $[-A, A] \subset [-B, B]$, а $h = \pi / B$, в силу следствия 3 и предложения 1

$$\begin{aligned} \left[h \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kh) \delta(x - kh) \right]^\wedge &= h \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kh) e^{-ikh\omega} = \\ &= h \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ikh\omega} \frac{1}{2\pi} \int_{-B}^B \hat{f}(\omega) e^{ikh\omega} d\omega = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\frac{\pi}{B}\omega} \frac{1}{2B} \int_{-B}^B \hat{f}(\omega) e^{ik\frac{\pi}{B}\omega} d\omega = \hat{f}(\omega). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \left[h \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kh) \beta(x - kh) \right]^\wedge = \\ & = \left[\beta(x) * h \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kh) \delta(x - kh) \right]^\wedge = \\ & = \hat{\beta}(\omega) \hat{f}(\omega) = \hat{f}(\omega). \end{aligned}$$

Применяя обратное ПФ, получаем обобщенное тождество Котельникова*

$$f(x) = h \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kh) \beta(x - kh).$$

Оценим L_1 -норму разности f и приближения (8). Имеем

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(x) - \Pi \left(\frac{x}{Nh} \right) h \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(kh) \beta(x - kh) \right| dx = \\ & = \left[\int_{-\infty}^{-Nh/2} + \int_{Nh/2}^{+\infty} \right] |f(x)| dx + \\ & + \int_{-Nh/2}^{Nh/2} \left| f(x) - h \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(kh) \beta(x - kh) \right| dx. \end{aligned}$$

Чтобы оценить последний интеграл, воспользуемся обобщенным тождеством Котельникова:

$$\begin{aligned} & \int_{-Nh/2}^{Nh/2} \left| f(x) - h \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(kh) \beta(x - kh) \right| dx = \\ & = \int_{-Nh/2}^{Nh/2} \left| h \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kh) \beta(x - kh) - \right. \\ & \quad \left. - h \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(kh) \beta(x - kh) \right| dx = \\ & = \int_{-Nh/2}^{Nh/2} \left| h \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (f(kh) - \tilde{f}(kh)) \beta(x - kh) \right| dx = \end{aligned}$$

(воспользуемся совпадением $f(kh)$ и $\tilde{f}(kh)$ при k от $-N/2$ до $N/2 - 1$)

$$\begin{aligned} & = \int_{-Nh/2}^{Nh/2} \left| h \left(\sum_{k=-\infty}^{-N/2-1} + \sum_{k=N/2}^{+\infty} \right) \times \right. \\ & \quad \left. \times (f(kh) - \tilde{f}(kh)) \beta(x - kh) \right| dx \leq \\ & \leq \int_{-Nh/2}^{Nh/2} h \left(\sum_{k=-\infty}^{-N/2-1} + \sum_{k=N/2}^{+\infty} \right) 2M_0 |\beta(x - kh)| dx = \end{aligned}$$

(выполним замену $x = yh$ и воспользуемся оценкой (10))

* Оно справедливо для любой функции β , ПФ которой равно единице на носителе \hat{f} .

$$\begin{aligned} & = 2M_0 h^2 \int_{-N/2}^{N/2} \left(\sum_{k=-\infty}^{-N/2-1} + \sum_{k=N/2}^{+\infty} \right) |\beta((y - k)h)| dy \leq \\ & \leq 2M_0 h^2 \int_{-N/2}^{N/2} \left(\sum_{k=-\infty}^{-N/2-1} + \sum_{k=N/2}^{+\infty} \right) \gamma(y - k) dy \leq \\ & \leq 8M_0 h^2 \int_0^{N/2} \sum_{k=N/2}^{+\infty} \gamma(y - k) dy = \\ & = 8M_0 h^2 \left[\int_{N/2-3/2}^{N/2} \sum_{k=N/2}^{+\infty} \gamma(y - k) dy + \right. \\ & \quad \left. + \int_0^{N/2-3/2} \sum_{k=N/2}^{+\infty} \gamma(y - k) dy \right] \leq \end{aligned}$$

(поскольку функция γ возрастает на $(-\infty, 0]$)

$$\begin{aligned} & \leq 8M_0 h^2 \left[\int_{N/2-3/2}^{N/2} \sum_{k=N/2}^{+\infty} \gamma(N/2 - k) dy + \right. \\ & \quad \left. + \int_0^{N/2-3/2} \sum_{k=N/2}^{+\infty} \gamma(y - k) dy \right] \leq \end{aligned}$$

(воспользуемся определением функции γ)

$$\begin{aligned} & \leq 8M_0 h^2 \int_{N/2-3/2}^{N/2} \left(\frac{3}{h} + \sum_{k=N/2+1}^{+\infty} \frac{12}{h\pi^2(N/2 - k)^2} \right) dy + \\ & + 8M_0 h^2 \int_0^{N/2-3/2} \sum_{k=N/2}^{+\infty} \frac{12}{h\pi^2(y - k)^2} dy \leq \\ & \text{(поскольку } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{)} \\ & \leq 8M_0 h^2 \int_{N/2-3/2}^{N/2} \left(\frac{3}{h} + \frac{2}{h} \right) dy + \\ & + 8M_0 h \int_0^{N/2-3/2} \sum_{k=N/2}^{+\infty} \frac{12}{\pi^2(y - k)^2} dy = \\ & = 60M_0 h + 8M_0 h \int_0^{N/2-3/2} \sum_{k=N/2}^{+\infty} \frac{12}{\pi^2(y - k)^2} dy \leq \end{aligned}$$

(воспользуемся оценкой $\frac{1}{(y-k)^2} \leq \int_{k-1/2}^{k+1/2} \frac{dz}{(y-z)^2}$, которая справедлива при $y \leq N/2 - 3/2$ и $k \geq N/2$, поскольку функция $z \mapsto \frac{1}{(y-z)^2}$ на $(-\infty, -1]$ возрастает и выпукла вниз)

$$\begin{aligned} & \leq 60M_0 h + 8M_0 h \int_0^{N/2-3/2} \left(\int_{N/2-1/2}^{+\infty} \frac{12}{\pi^2(y-z)^2} dz \right) dy = \\ & = 60M_0 h + 96 \frac{M_0 h}{\pi^2} \ln \left(\frac{N-1}{2} \right). \end{aligned}$$

Осталось собрать все оценки вместе и напом-

нить, что $|\hat{f}(\omega) - \hat{g}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - g(x)| dx$. \square

Использование в теореме 10 гладкой функции $\hat{\beta}$ и быстро убывающей на бесконечности функции $\hat{\Psi}$ позволяют перенести свойства

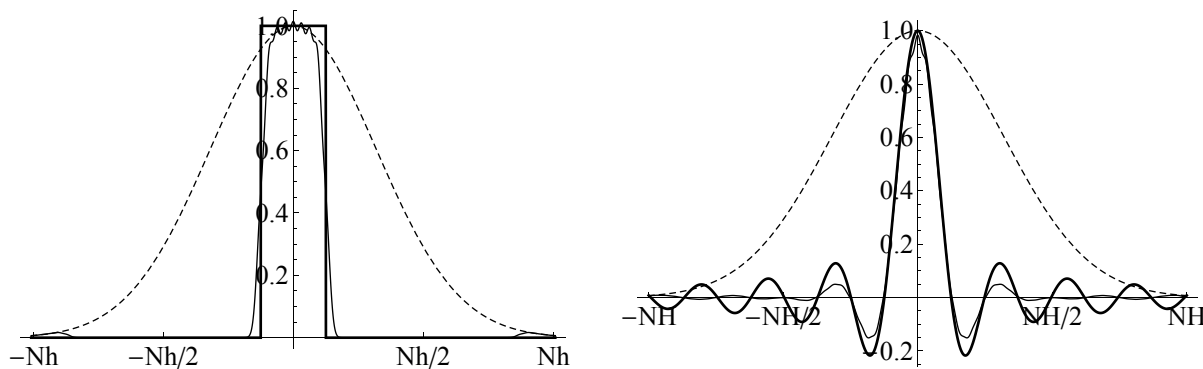


Рис. 7. Слева: аппроксимация (11) (тонкая линия) функции $f(x) = \Pi\left(\frac{4x}{Nh}\right)$ (жирная линия); пунктиром показано $\Psi(x) = e^{-\mu^2 x^2}$. Справа: ПФ \hat{f} функции f (жирная линия) и его аппроксимация (12) (тонкая линия); пунктиром показано $\hat{\beta}(\omega) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 \omega^2}$. $N = 32$, $\sigma = \frac{h}{2}$ и $\mu = \frac{H}{2\sqrt{2}}$

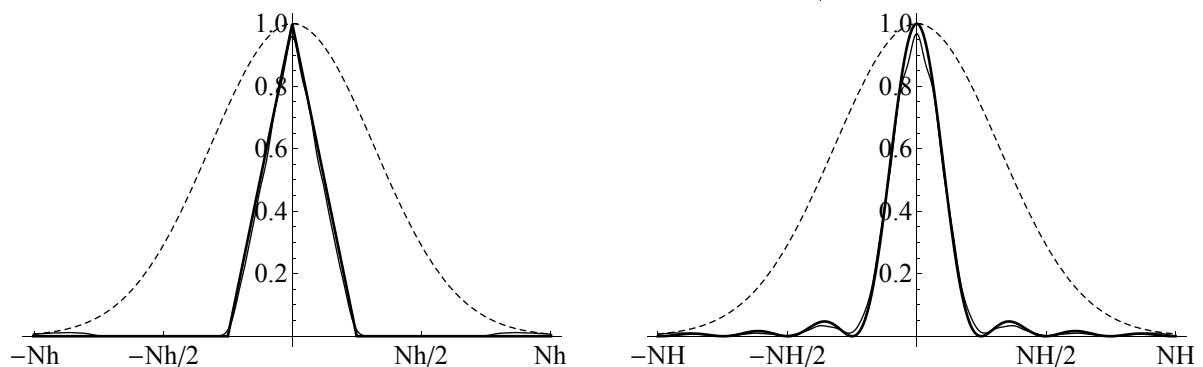


Рис. 8. То же для функции $f(x) = \Lambda\left(\frac{4x}{Nh}\right)$, но $N = 16$

гладкости и быстрого убывания на вычисляемое приближение к \hat{f} . В качестве таких функций можно, например, использовать сплайны [9, с. 20] $B_2 = \Pi * \Pi * \Pi$ и $B_3 = \Lambda * \Lambda$ и их ПФ. В следующем примере в качестве Ψ и β применяются функции Гаусса, одновременно бесконечно дифференцируемые и быстро убывающие на бесконечности. Сдвиги этих функций не обладают интерполяционным свойством Лагранжа. Поэтому их можно использовать двумя способами. Можно непосредственно применить формулы (4) и (5) (это делается в примере 3), а можно сначала интерполировать сеточные значения $f(kh)$ сдвигами функции β , а затем применять ПФ. В связи со вторым способом отметим работы [10, 11, 12], посвященные изучению интерполяции функций сдвигами функции Гаусса. Особо отметим работы [11, 12], в которых детально изучаются свойства семейств функций, обладающих интерполяционным свойством Лагранжа и построенных в виде (бесконечных) линейных комбинаций сдвигов

$\beta_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-kh)^2}{2\sigma^2}}$ функций Гаусса; в частности,

изучаются свойства, полезные при построении свертки и преобразований Фурье, в которых участвуют эти функции.

Пример 3. Возьмем в качестве Ψ и β функции Гаусса

$$\Psi(x) = e^{-\mu^2 x^2}, \quad \beta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Тогда аппроксимация (4) примет вид

$$f(x) \simeq e^{-\mu^2 x^2} h \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(kh) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-kh)^2}{2\sigma^2}}. \quad (11)$$

Представляется разумным выбирать σ , имеющим порядок $\frac{h}{2}$, а μ — имеющим порядок $\frac{H}{2\sqrt{2}}$.

Согласно теореме 10 и предложению 2 ПФ приближения (11) имеет вид

$$\begin{aligned} & \left[e^{-\mu^2 x^2} h \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(kh) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-kh)^2}{2\sigma^2}} \right]^\wedge = \\ & = \frac{\sqrt{\pi}}{\mu Nh} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{c}_m \exp \left[-\frac{1}{2} \sigma^2 (mH)^2 \right] \times \\ & \quad \times \exp \left[\frac{-(\omega - mH)^2}{4\mu^2} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Вычисление ПФ по формуле (12) иллюстрируют рис. 7—8.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Блэйхут Р.* Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1989.
2. *Нуссбаумер Г.* Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток. М.: Радио и связь, 1985.
3. *Жуков А. И.* Метод Фурье в вычислительной математике. М.: Наука, 1992.
4. *Бурбаки Н.* Спектральная теория. М.: Мир, 1972.
5. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.
6. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. Часть 1. М.: Наука, 1982.
7. *Котельников В. А.* О пропускной способности “эфира” и проволоки в электросвязи. УФН. 2006. Т. 176, 7. С. 762—770.

Курбатов А. В., аспирант кафедры радиоп физики, Воронежский государственный университет

E-mail: avkurbatov@gmail.com

Тел.: (473) 220-89-16

Курбатов В. Г., доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации

E-mail: kv51@inbox.ru

Тел.: (4742) 32-81-33

8. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.

9. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.

10. *Maz'ya V., Schmidt G.* Approximate approximations. AMS Mathematical Surveys and Monographs. 2007. V. 141.

11. *Журавлев М. В., Минин Л. А., Ситник С. М.* О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций. Научные ведомости Белгородского государственного университета. 2009. № 13 (68), вып. 17 (2). С. 89—99.

12. *Zhuravlev M. V., Kiselev E. A., Minin L. A., Sitnik S. M.* Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions. Journal of Mathematical Science. 2011. V. 173, 2. P. 231—241.

Kurbatov A. V., Post-graduate student of the Department of radiophysics, Voronezh State University

E-mail: avkurbatov@gmail.com

Тел.: (473) 220-89-16

Kurbatov V. G., Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, professor of the Department of higher mathematics, Finance University under the Government of the Russian Federation

E-mail: kv51@inbox.ru

Тел.: (4742) 32-81-33