УДК 519-7

СНИЖЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ИЗБЫТОЧНОСТИ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА СПЕКТРОГРАММ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Л. С. Крыжевич

Курский государственный университет

Поступила в редакцию: 30.01.2012 г.

Аннотация: В работе рассматривается вопрос о спектральной составляющей изображения. Изменение базиса цветового пространства позволит уменьшить количество цветов в наборе, обеспечит уменьшение избыточной информации и устранит корреляционную зависимость между компонентами.
Ключевые слова: цветовое пространство, цвет, яркость, колориметрия, изображение, базис, вектор, спектр.

Abstract: This article is connected with the question of spectral redundancy. Spectral basis choice allow to reduce amount of colors in the set, let decrease of the redundant information and help to remove the correlation component dependence.
Keywords: color space, color, brightness, colorimetry, image, basis, vector, spectrum.

ВВЕДЕНИЕ

Современный графический сигнал, как известно, избыточен. В теории вероятностей избыточность является следствием определенных корреляционных связей. Корреляция означает, что некоторый элемент изображения более или менее существенно зависит от соседей в пространстве и во времени. Различают избыточность по восприятию, структурную, спектральную избыточность и пространственную избыточность.

Избыточность по восприятию связана с особенностями зрения человека, благодаря которым удается, например, понизить цветовое разрешение по отношению к яркостному.

Учитывая особенность нашего зрения по восприятию мелких деталей цветного изображения, можно в несколько раз сократить полосу частот при передаче и кодировании сигналов цветности.

Структурная избыточность — итог особенностей стандарта разложения или преобразования изображения. В нем, например, периодически передаются неизменные по форме элементы сигнала: гасящие импульсы строк и полей. В цифровом сигнале нет необходимости передавать эти импульсы по каналу связи, т.к. они могут быть восстановлены в декодере по опорным сигналам синхронизации. Устранение из состава графического сигнала гасящих импульсов строк и полей увеличивает скорость передачи данных примерно на 23 %.

Спектральная избыточность проявляется как результат излишне высокой частоты дискретизации и использования излишнего количества цветов. В частности, принятая ортогональная структура дискретизации изображения в общем случае не является оптимальной в частотном пространстве. Используя интерполяцию и передискретизацию определенным образом выбранных групп отсчетов сигнала, можно, в принципе, видоизменить спектральный состав и снизить частоту дискретизации. Такая обработка обычно необратима и, как правило, ведет к некоторому снижению качества восстановленного изображения. В большинстве стандартов это вид избыточности не устраняется.

Под пространственной избыточностью понимают корреляционные связи между соседними (по вертикали и горизонтали) отсчетами сигнала. Сразу же надо подчеркнуть, что снижение избыточности в этом случае до определенных пределов обратимо, т. е. происходит без потерь информации.

Целью цифрового кодирования при записи является сокращение требуемой ёмкости памяти путём сокращения пространственной и спектральной избыточности сигнала изображения. Устранение избыточности производится линейной фильтрацией, уменьшающей коррелированность отсчётов видеосигнала. В систе-

© Крыжевич Л. С., 2012

мах цифровой видеозаписи используется, как правило, необратимое сжатие цифрового потока, сопровождающееся возникновением некоторой дополнительной по отношению к содержащейся в исходном графическом сигнале ошибки передачи информации. В соответствии с фундаментальным учением В. К. Зворыкина численное значение допустимой ошибки передачи изображений определяется свойствами зрения человека. Это положение можно распространить и на кодирование при записи — восстановленное изображение субъективно не должно отличаться от исходного. Владимир Козьмич разработал методику сравнения первоначальной картинки с кодированной/декодированной и, чтобы не надеяться на визуальное сравнение, использовал стандартную формулу:

$$P = 20\lg\left(\frac{255}{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\left(x_{\text{исх}}(i) - x_{\text{обр}}(i)\right)^2}}\right) \qquad (1)$$

Для устранения пространственной избыточности в системах цифровой записи производится так называемое кодирование с преобразованием, когда обработке подвергаются не отсчёты исходного изображения, а отсчёты его коэффициентов разложения в ряды по различным базисам. Определённое уменьшение ошибки воспроизведения при заданном коэффициенте сжатия может быть осуществлено путём учёта свойств типовых изображений без адаптации базиса. Но, начиная с некоторого критического коэффициента сжатия, ошибка восстановления неизбежно возрастает.

Итак, мы рассмотрели существующие на данный момент способы устранения пространственной избыточности в изображениях. Но большую долю информации занимает еще и спектральная избыточность, которая, как отмечалось выше, этими методами практически не устраняется.

Спектральная избыточность обусловлена тем, что в изображении присутствует огромное количество цветов, очень близких друг к другу по оттенку и при этом достаточно удаленных в пространстве. Это позволяет осуществить преобразование значений этих цветов в один новый цвет без значительных, субъективно заметных изменений. Этому факту способствует наличие распределения в изображении некоторых оттенков, имеющих малую статистическую частоту (менее 0,0001), которые в свою очередь благоприятно заменяются на очень близкие к ним по оттенку, но встречающиеся на порядок чаще. Приходим к выводу о необходимости снижения дискретизации частотного спектра и об объединении цветов в некоторые интервалы частот.

1. ПОСТРОЕНИЕ СПЕКТРОГРАММ ВХОДНОГО СИГНАЛА

Представим исходное изображение как матрицу c_{xy} точек цвета, каждая из которых имеет еще 3 компонента (r, g, b). Таким образом, входной сигнал f необходимо рассматривать как 5-мерную структуру точек c(x,y,r,g,b). Как указывалось выше, x, y представляют собой пространственную составляющую сигнала, меняющуюся со временем, а r, g, b, соответственно, спектральную составляющую. Из теории информации известно [1], что на цветовые компоненты отводится 1 байт памяти, и их значения находятся в диапазоне [0; 255].

Если ввести ортонормированную систему векторов (Red; Green; Blue), то цветовое пространство представляется кубом (рис. 1) с ребрами длинной в 256 единиц, в котором цвет любой точки изображения будет задан радиус-вектором с координатами (r,g,b).

Следует заметить, что количество различных цветов в построенной системе будет равно $256^3 = 16777216$. В итоге, для воспроизведения всех цветов необходимо изображение размером

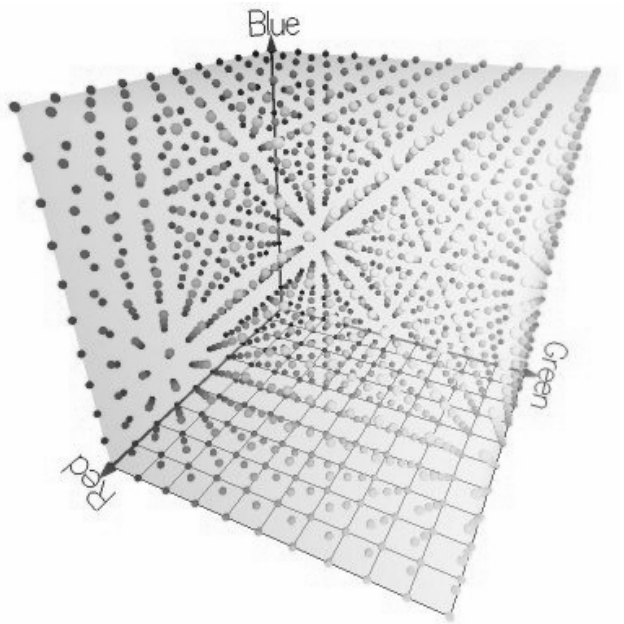


Рис.1. Пространство RGB в форме цветового куба

в 16.8 Mpix, что даже с технической стороны достаточно сложно. Поэтому можно сделать вывод, что в большинстве современных изображений используются далеко не все цвета, а зачастую в изображении встречаются пиксели, имеющие одинаковую спектральную составляющую.

Построим спектрограмму изображения. Она будет представлена точками в цветовом кубе. Частоту встречаемости цвета $c_{r_0 g_0 b_0}$ в непрерывном случае можно вычислить так:

$$\mathrm{F}(\mathrm{r}_0, \mathrm{g}_0, \mathrm{b}_0) = \frac{card(\{(x,y), f(x,y) = (\mathrm{r}_0, \mathrm{g}_0, \mathrm{b}_0)\})}{h \cdot w}. \quad (2)$$

где $card(\{(x,y), f(x,y) = (\mathrm{r}_0, \mathrm{g}_0, \mathrm{b}_0)\})$ — функция, вычисляющая число элементов области определения, в которых функция цвета принимает нужное значение, а $\boldsymbol{w}$ — количество пикселей в изображении по горизонтали, а $\boldsymbol{h}$, соответственно, — по вертикали. Таким образом, мы получаем функцию 3-х переменных.

Для более детального изучения свойств этой функции и удобства в изображении (пример приведен ниже), будем рассматривать наш цветовой куб через $\boldsymbol{rg}$, $\boldsymbol{rb}$, $\boldsymbol{gb}$ проекции. Для построения 3-х мерных проекций, произведем вычисление функции парных частот

$$\mathrm{F}(r,g) = \int_0^{255} F(\mathrm{r},\mathrm{g},\mathrm{b})db\,,\ \mathrm{F}(r,b) = \int_0^{255} F(\mathrm{r},\mathrm{g},\mathrm{b})dg\,,$$

$$\mathrm{F}(g,b) = \int_0^{255} F(\mathrm{r},\mathrm{g},\mathrm{b})dr\,. \quad (3)$$

Или в частном случае имеем:

$$\mathrm{F}(r,g) = \sum_{\mathrm{b}=0}^{255} \mathrm{F}(\mathrm{r},\mathrm{g},\mathrm{b})\,,\ \mathrm{F}(r,b) = \sum_{g=0}^{255} \mathrm{F}(\mathrm{r},\mathrm{g},\mathrm{b})\,,$$

$$\mathrm{F}(\mathrm{g},b) = \sum_{r=0}^{255} \mathrm{F}(\mathrm{r},\mathrm{g},\mathrm{b}) \quad (4)$$

А так же спектральные составляющие компонентов:

$$\mathrm{F}(r) = \int_0^{255} db \int_0^{255} F(\mathrm{r},\mathrm{g},\mathrm{b})dg\,,$$

$$\mathrm{F}(g) = \int_0^{255} db \int_0^{255} F(\mathrm{r},\mathrm{g},\mathrm{b})dr\,,$$

$$\mathrm{F}(b) = \int_0^{255} dg \int_0^{255} F(\mathrm{r},\mathrm{g},\mathrm{b})dr \quad (5)$$

и

$$\mathrm{F}(r) = \sum_{g=0}^{255}\sum_{\mathrm{b}=0}^{255} \mathrm{F}(\mathrm{r},\mathrm{g},\mathrm{b}) \quad ,$$

$$\mathrm{F}(g) = \sum_{r=0}^{255}\sum_{b=0}^{255} \mathrm{F}(\mathrm{r},\mathrm{g},\mathrm{b}) \quad ,$$

$$\mathrm{F}(b) = \sum_{r=0}^{255}\sum_{g=0}^{255} \mathrm{F}(\mathrm{r},\mathrm{g},\mathrm{b}) \quad (6)$$

Результаты приведены на рисунке 2. В нижней части рисунка представлен вид сверху на поверхности $\mathrm{F}(\mathrm{r},\mathrm{g})$, $\mathrm{F}(\mathrm{r},\mathrm{b})$, $\mathrm{F}(\mathrm{g},\mathrm{b})$, рассчитанные по формулам (3) — (4), с градиентно-окрашенными уровнями частоты встречаемости точек.

2. КОРРЕЛИРУЕМОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО БАЗИСУ RGB

При анализе большого количества изображений (рис. 2) был замечен тот факт, что «облако» из точек вытянуто вдоль главной диагонали во всех трех проекциях. Вследствие чего выдвинем гипотезу о взаимосвязи между переменными $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{b}$. Поэтому проверим компоненты на корреляционную связь.

Данные этих функций представляют собой корреляционные таблицы возможной взаимосвязи переменных ($\boldsymbol{r}$,$\boldsymbol{g}$), ($\boldsymbol{r}$,$\boldsymbol{b}$), ($\boldsymbol{g}$,$\boldsymbol{b}$).

Чтобы выяснить уровень этой связи, вычислим коэффициенты парной корреляции по формуле (7) из:

$$r_{uv} = \frac{\overline{uv} - \overline{u}\overline{v}}{\sigma(u)\sigma(v)}, \quad (7)$$

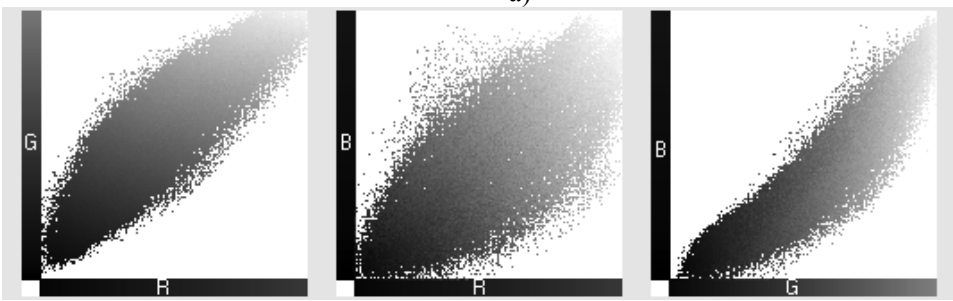
где $\sigma^2(u) = \overline{u^2} - \left(\overline{u}\right)^2$ и $\sigma^2(v) = \overline{v^2} - \left(\overline{v}\right)^2$ соответственно. Тогда, если обозначить за $e = \int_0^{255} du \int_0^{255} F(u,v)dv$, то все промежуточные характеристики, возможно вычислить так:

$$\overline{u} = \frac{\int_0^{255} udu \int_0^{255} F(u,v)dv}{e};\ \overline{v} = \frac{\int_0^{255} vdv \int_0^{255} F(u,v)du}{e};$$

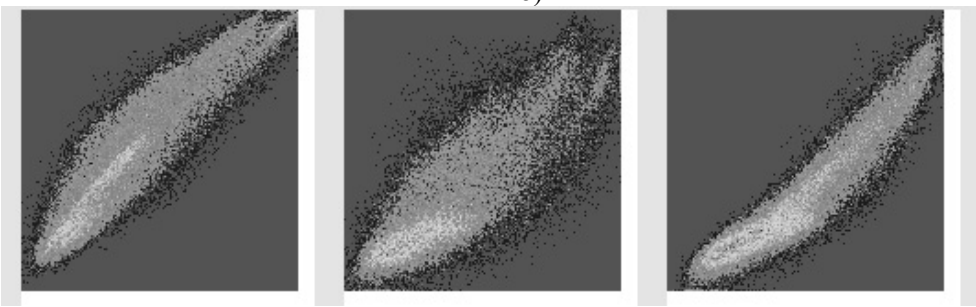
$$\overline{u^2} = \frac{\int_0^{255} u^2du \int_0^{255} F(u,v)dv}{e};\ \overline{v^2} = \frac{\int_0^{255} v^2dv \int_0^{255} F(u,v)du}{e}.$$

$$\overline{uv} = \frac{\int_0^{255}\int_0^{255} u \cdot v \cdot F(u,v)dudv}{e} = \frac{\int_0^{255} vdv \int_0^{255} u \cdot F(u,v)du}{e} =$$

а)



б)



в)

Рис. 2. Пример спектрограммы изображения: а) исходной изображение; б) проекции rg, rb, gb; в) уровни частоты

$$= \frac{\int_0^{255} u du \int_0^{255} v \cdot F(u,v) dv}{e};$$

В дискретном случае определенные интегралы преобразуются в суммы, и формулы становятся значительно проще. Упрощения подробно описываются в [2].

Построим матрицу выборочных коэффициентов корреляции:

$$q_p = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{pmatrix} \quad (8)$$

В нашем случае данная матрица выглядит так:

$$q_p = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}912 & 0{,}813 \\ 0{,}912 & 1 & 0{,}938 \\ 0{,}813 & 0{,}938 & 1 \end{pmatrix}$$

Степень линейной взаимосвязи одной переменной с совокупностью других в целом, измеряется с помощью множественного коэффициента корреляции по формуле:

$$R_{i.123} = \sqrt{1 - \frac{|q_p|}{q_{ii}}}, \quad (9)$$

где $|\boldsymbol{q_p}|$ — определитель матрицы $\boldsymbol{q_p}$, а $\boldsymbol{q_{ii}}$ — алгебраическое дополнение элемента $\boldsymbol{r_{ii}}$.

Для дальнейших вычислений нам понадобятся следующие данные: $|\boldsymbol{q_p}| = 0{,}018414$; $\boldsymbol{q_{11}} = 0{,}120156$, $\boldsymbol{q_{22}} = 0{,}339031$, $\boldsymbol{q_{33}} = 0{,}168256$; $\boldsymbol{q_{12}} = -0{,}14941$, $\boldsymbol{q_{13}} = -0{,}04246$, $\boldsymbol{q_{23}} = -0{,}19654$.

Вычислим по формуле (9) множественные коэффициенты корреляции, и тогда получим:

$R^2_{1.23}$= 84,67 % или $\boldsymbol{R}_{1.23}$= 0,9202,

$R^2_{2.13}$= 94,57 % или $\boldsymbol{R}_{2.13}$= 0,9725,

$\boldsymbol{R}^2_{3.12}$= 89,06 % или $\boldsymbol{R}_{3.12}$= 0,9437.

Покажем, что данная тенденция проявляет себя в изображениях разных стилей (рис. 3).

С помощью множественного коэффициента корреляции (по мере приближения R к 1) делается вывод о тесноте взаимосвязи, причем по всем трем направлениям, что говорит о расположении цветов вдоль главной пространственной диагонали куба (рис.3). Напомним, что вдоль данной диагонали цветового куба расположены точки, соответствующие градациям

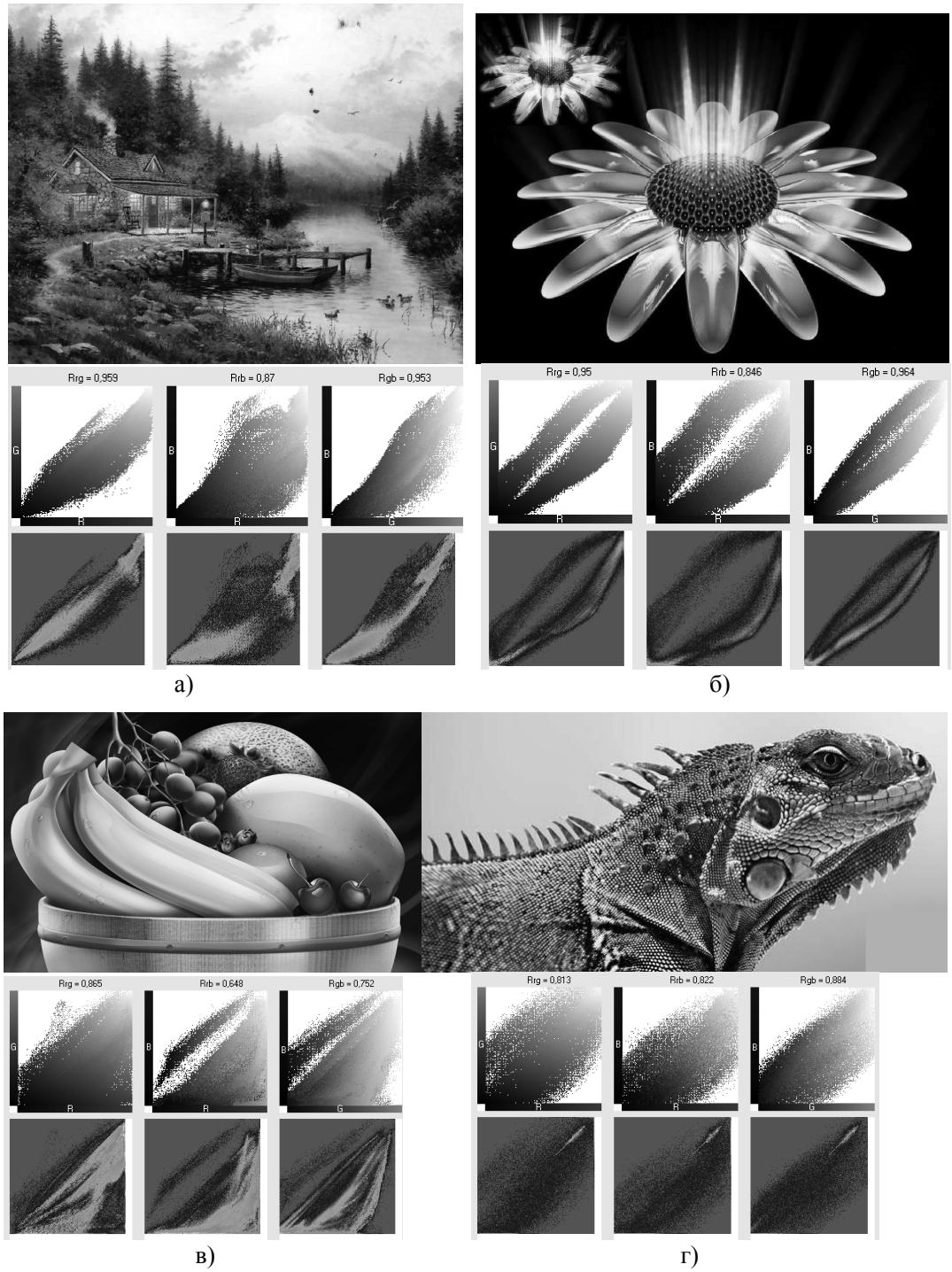


Рис. 3. Различные изображения, и их спектрограммы а) пейзаж; б) компьютерная графика; в) натюрморт; г) макрофотография.

серого цвета, которые отвечают за яркостную составляющую в изображении. Выборочный множественный коэффициент детерминации показывает, что практически 90 % вариации исследуемой переменной объясняет вариация остальных переменных. Таким образом, мы приходим к выводу о зависимости цветовых компонентов между собой, т.е. большинство точек в цветовой составляющей отличается только лишь яркостью и имеет незначительные отличия по колориметрическому составу. Этот факт подтверждается разработками в направлении исследований человеческого глаза и метамерией [4], где говорится, что человеческое восприятие на порядок чувствительнее к яркости и освещенности объекта, чем к составляющим его цвета. Это приводит нас к необходимости смены цветового пространства, основанного на новом базисе. За первый вектор $\boldsymbol{Y}$ новой системы будем принимать вектор, направленный вдоль оси яркости изображения. Следовательно, значения вектора $\boldsymbol{Y}$ представляют собой черно-белую копию данной информации. Изображение за вычетом яркостной составляющей представляет собой снимок с равноконтрастным спектральным составом, где цвет каждой точки вычисляется по формуле:

$$(r - y + 128; g - y + 128; b - y + 128). \quad (10)$$

3. СМЕНА ЦВЕТОВОГО БАЗИСА

Дальнейшие исследования [4] установили, что к цветовым переходам разного рода глаз имеет различную чувствительность. Таким образом, восприятие зависит от интенсивности потока фотонов, поступающего в человеческий глаз, и условно делится на два типа: дневное и ночное зрение. В случае ночного зрения, все цвета воспринимаются в форме теплых (близких к желтому) и холодных (близких к синему), как показано на диаграмме рис. 4.

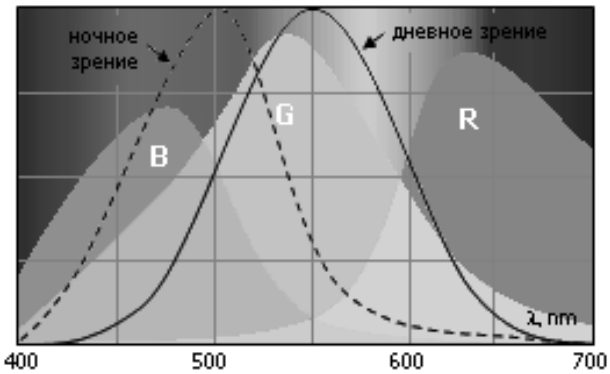


Рис. 4. Особенности восприятия человека

В связи с данными [5] по рисунку 4, два других вектора $\boldsymbol{V_r}$ и $\boldsymbol{V_b}$ направим в стороны распространения оттенков внутри цветового куба для дневного и ночного зрения. В результате получим следующие правила перехода из пространства $\boldsymbol{RGB}$ в $\boldsymbol{YV_rV_b}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Y} &= 0{,}29147 \cdot \mathrm{R} + 0{,}58329 \cdot \mathrm{G} + 0{,}12494 \cdot \mathrm{B}, \\ \mathrm{V_r} &= -0{,}50005 \cdot \mathrm{R} + 0{,}4999 \cdot \mathrm{G} - 0{,}00005 \cdot \mathrm{B}, \\ \mathrm{V_b} &= 0{,}16665 \cdot \mathrm{R} + 0{,}33328 \cdot \mathrm{G} - 0{,}5 \cdot \mathrm{B}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\boldsymbol{Y}$ — яркостная составляющая, $\boldsymbol{V_r}$ — формат дневного зрения, $\boldsymbol{V_b}$ — формат ночного зрения. И обратный переход:

$$\begin{aligned} \mathrm{R} &= Y - 1{,}33356 \cdot \mathrm{V_r} + 0{,}25003 \cdot \mathrm{V_b}, \\ \mathrm{G} &= Y + 0{,}66644 \cdot \mathrm{V_r} + 0{,}24993 \cdot \mathrm{V_b}, \\ \mathrm{B} &= Y - 0{,}00026 \cdot \mathrm{V_r} - 1{,}75008 \cdot \mathrm{V_b}, \end{aligned} \quad (12)$$

После преобразования базиса $\boldsymbol{RGB}$ в базис $\boldsymbol{YV_rV_b}$ цветовое пространство может быть представлено в виде фигуры на рис. 5.

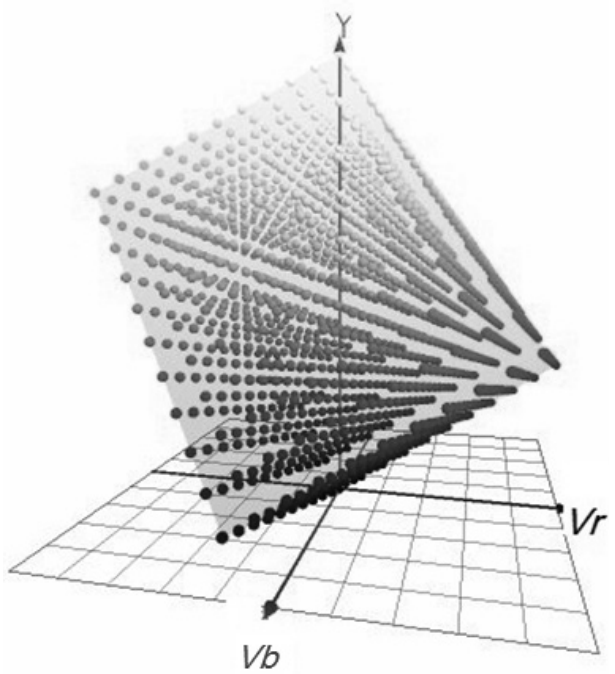


Рис. 5. Цветовое пространство $\boldsymbol{YVrVb}$

Например, в сечении цветового тела равноконтрастной плоскостью $\boldsymbol{V_rV_b}$ (рис. 5) при фиксированном значении $\boldsymbol{Y}$ будут располагаться цвета, обладающие одинаковой яркостью.

На рисунке 6 представлено изображение из рассмотренного выше примера, трансформированное через компоненты новой системы.

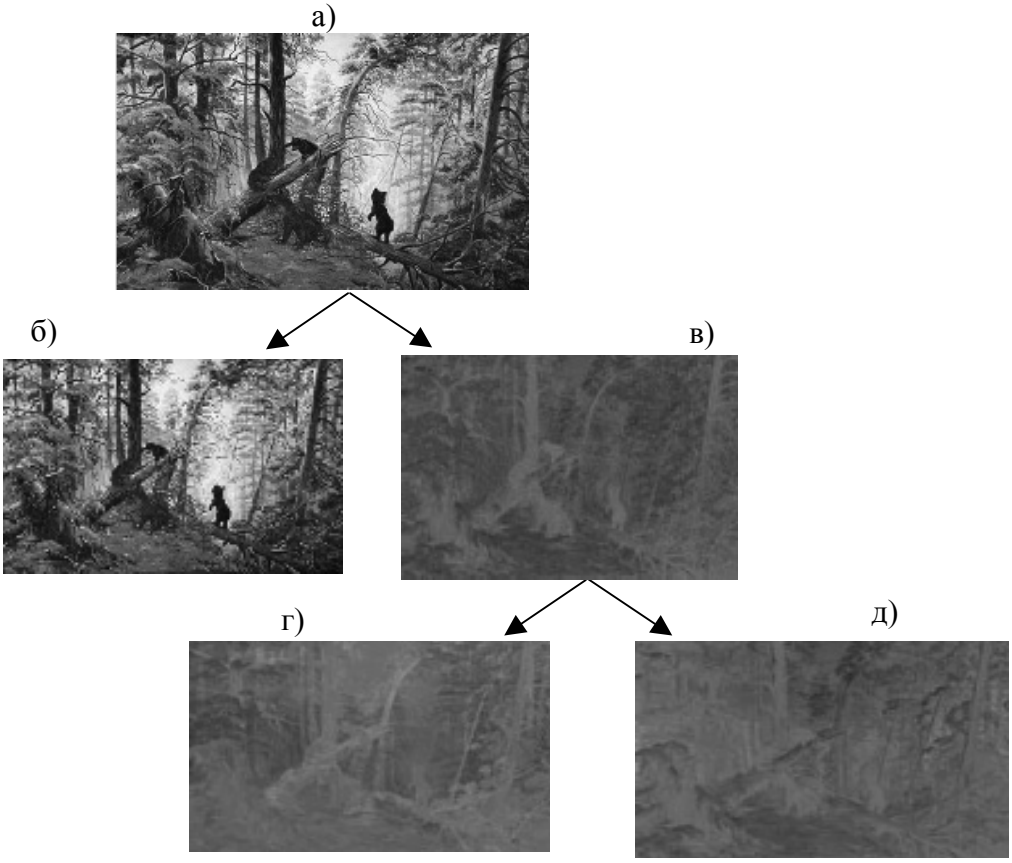


Рис. 6. Разложение изображения по базису $\boldsymbol{YV_rV_b}$: а) исходное изображение; б) черно-белая копия (яркостная составляющая Y); в) снимок с равноконтрастным спектральным составом (проекция на $\boldsymbol{V_rV_b}$-плоскость); г) изображение в формате дневного зрения (компонента $\boldsymbol{V_r}$); д) изображение в формате ночного зрения (компонента $\boldsymbol{V_b}$)

4. АПРОБАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ

По аналогии с вышеизложенными рассуждениями построим проекции нового цветового пространства на плоскости $\boldsymbol{YV_rV_b}$ на плоскости $\boldsymbol{V_rV_b}$, $\boldsymbol{YV_r}$ и $\boldsymbol{YV_b}$ соответственно (рис. 6). И также проверим на наличие корреляционных связей между компонентами, используя формулы (7) и (8). В итоге получим попарные коэффициенты корреляции $\boldsymbol{r_{12}}$=0,06; $\boldsymbol{r_{13}}$=0,04; $\boldsymbol{r_{23}}$=0,23. Матрица выборочных коэффициентов корреляции выглядит так:

$$q_p = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}06 & 0{,}04 \\ 0{,}06 & 1 & 0{,}23 \\ 0{,}04 & 0{,}23 & 1 \end{pmatrix}$$

Аналогично вычислим по формуле (9) множественные коэффициенты корреляции, и получим:

$$\boldsymbol{R^2_{1.23}} = 0{,}43\% \text{ или } \boldsymbol{R_{1.23}} = 0{,}0658,$$

$$\boldsymbol{R^2_{2.13}} = 5{,}55\% \text{ или } \boldsymbol{R_{2.13}} = 0{,}235552,$$

$$\boldsymbol{R^2_{3.12}} = 5{,}36\% \text{ или } \boldsymbol{R_{3.12}} = 0{,}231493.$$

Можно заметить, что связь является очень слабой и можно считать, что взаимосвязь между расположением точек внутри компонент отсутствует. Сделаем вывод, что новый базис более точно описывает природу взаимодействия и образование новых цветов.

Обратим внимание, что на плоскости $\boldsymbol{V_rV_b}$ (рис. 7) проекция занимает лишь малую долю от всевозможных значений. Таким образом, возможно, напрямую снизить объем памяти, которая отдается на хранение значений коэффициентов перед векторами $\boldsymbol{V_r}$ и $\boldsymbol{V_b}$. Из явления метамерии [4] известно, что человеческий глаз воспринимает от 7 до 13 уровней по насыщенности и порядка 10—14 градаций по цветовому тону.

Таким образом, будет достаточно установить порядка 16 отсчетов для коэффициентов каждого из компонент. Следовательно, получаем 256 оттенков возможного цветового спектра в проекции на плоскость $\boldsymbol{V_rV_b}$.

Такое преобразование уменьшает спектральный состав изображения в 256 раз, струк-

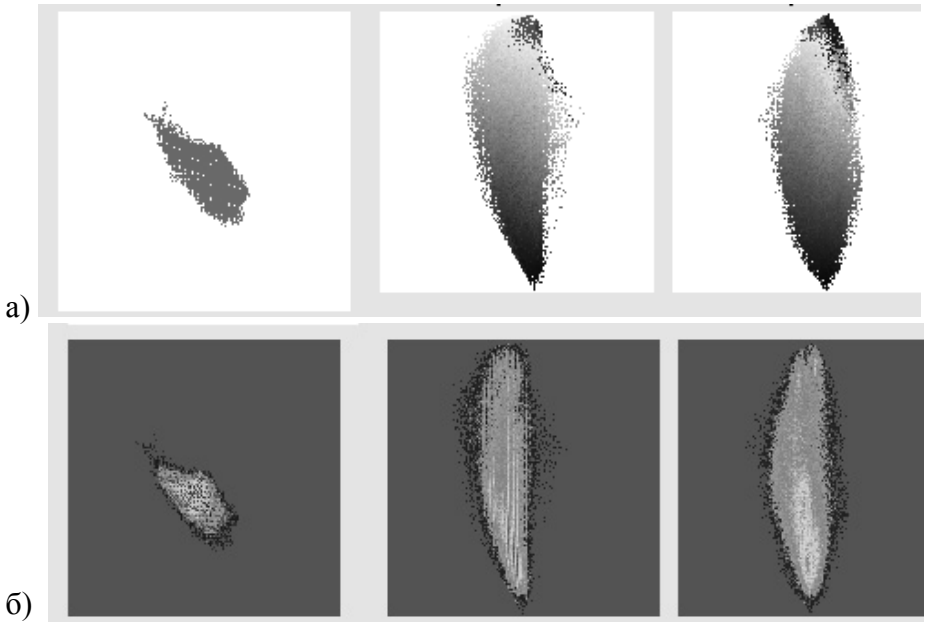


Рис. 7. Спектрограмма изображения в плоскостях новой системы: а) проекции V_rV_b,YV_b, YV_r; б) уровни частоты

турно не изменяя самого изображения (рис. 8), и уменьшает объем необходимой памяти на 1/3.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе с помощью использования спектрограмм изображений удалось выявить значимую корреляционную связь между расположением точек в цветовом пространстве и значениями каждого из компонентов цветового базиса. Было также обнаружено, что множества этих точек располагаются вдоль некоторой оси, которая, как было выявлено позже, количественно соответствует оси яркости цвета в изображении. Удалось математически обосновать и подчеркнуть необходимость в смене базиса, в результате чего было разработано новое цветовое пространство, базисом которого являются векторы с более слабыми и незначительными корреляционными связями, адаптированными к человеческому восприятию. Этот факт позволяет с помощью различных методов группирования цветовых тонов или разбиения оттенков на интервалы устранить корреляционные связи и снизить спектральную избыточность, присутствующую в большинстве изображений. Эффект заключается в том, что для хранения каждой точки $\boldsymbol{c}_{xy}$ потребуется не более одного байта на яркость и байта на цвет, что позволяет уменьшить объем памяти, требуемой для хранения изображения, как минимум на треть.

ЛИТЕРАТУРА

1. Артюшин Л.Ф. Основы воспроизведения цвета в фотографии, кино и полиграфии. М.: Искусство, 1970. 548 с.

2. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. 2-е изд., перераб. и доп.— М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. - 573 с.

3. Крыжевич Л. С. Математические методы в теории сжатия изображений. Математика и ее приложения в современной науке и практике: сб. науч. ст. по материалам Междунар. науч.-практ. конф. студентов и аспирантов, Юго-Зап. гос. ун-т. Курск. 2011. 430с.

4. Толкова Е. И., Чернышев А. В. Рационалистическая модель механизма цветоразличения человека. Оптика и спектроскопия, 2000. №: 4. С. 647—660.

Крыжевич Л. С. Выбор и преобразование цветового пространства. Материалы электронного научного журнала Курского государственного университета “Ученые записки” № 4 (20). 2011.

Крыжевич Л.С., аспирант кафедры математического анализа и прикладной математики Курского государственного университета.

Тел.: 89051583924

E-mail: Leonid@programist.ru

Kryzhevich L. S., post-graduated student of Department of mathematical analysis and applied mathematics of Kursk State University.

Tel.: 89051583924

E-mail: Leonid@programist.ru

Рис. 8. Исходное и преобразованное изображения