

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ГУРСА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ВОЛОЧЕНИИ ПОЛОСЫ СКВОЗЬ ПРЯМОЛИНЕЙНУЮ МАТРИЦУ

И. Н. Зиновьев, А. С. Чеботарев

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 14.05.2012 г.

Аннотация: В работе исследовано напряженное состояние под прямолинейной матрицей при волочении полосы. Получены аналитические уравнения для линий скольжения, скоростей вдоль характеристик, напряжений в пластической зоне и предельной силы волочения. Показано, что полученные аналитические формулы сходятся с численными расчетами.

Ключевые слова: Идеальная пластичность, плоская деформация, предел текучести, волочение полосы, линии скольжения, сила волочения.

Abstract: Intense-deformed condition the stress state under linear matrix when drawing the strip. The analytical equations obtained for the slip lines, velocities along the characteristics, stresses in the plastic zone and the maximum drawing force. We show that the analytical formulas agree with the numerical calculations.

Keywords: ideal plasticity, plane strain, the limit flow, drawing the strip, slip lines, the power of drawing.

Введение. Как известно, уравнения плоской деформации для идеальной жесткопластической модели среды представляют собой дифференциальные уравнения в частных производных гиперболического типа [1]—[4]:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \theta = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \theta = 0.$$

Методом изложенным в [1], [2] данная система может быть приведена к одному уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} + f = 0, \quad (1)$$

известному в теории как “телеграфное”. Этому уравнению удовлетворяют переменные введенные Михлиным [1], составляющие скоростей u и v вдоль характеристик α и β , а так же радиусы кривизн линий скольжения. Если для функции $f(a, b)$ известны граничные условия на двух характеристиках α и β , то решение краевой задачи Гурса будет определяться формулой Римана, подробно описанной в [5]:

$$f(a, b) = f(0, 0)J_0(2\sqrt{ab}) + \int_0^a J_0(2\sqrt{(a-\alpha)b}) \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha + \int_0^b J_0(2\sqrt{a(b-\beta)}) \frac{\partial f}{\partial \beta} d\beta \quad (2)$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Используемые интегралы. В некоторых случаях выражения содержащие квадратуры от функции Бесселя удается выразить через специальные функции, если известны значения следующих интегралов:

$$I1 = \int_0^a J_0(2\sqrt{(a-\alpha)b}) \cos \alpha d\alpha,$$

$$I2 = \int_0^b J_0(2\sqrt{a(b-\beta)}) \sin \beta d\beta,$$

$$I3 = \int_0^a J_0(2\sqrt{(a-\alpha)b}) \sin \alpha d\alpha,$$

$$I4 = \int_0^b J_0(2\sqrt{a(b-\beta)}) \cos \beta d\beta.$$

$$I5 = \int_0^{\varphi+\gamma} a \sin(a) J_0(2\sqrt{-\varphi a}) da,$$

$$I6 = \int_0^{\varphi+\gamma} a \sin(a) \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) da$$

$$I7 = \int_0^{\varphi+\gamma} a \cos(a) J_0(2\sqrt{-\varphi a}) da,$$

$$I8 = \int_0^{\varphi+\gamma} a \cos(a) \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) da$$

$$I9 = \int_0^{\varphi+\gamma} \sin(a) J_0(2\sqrt{-\varphi a}) da,$$

$$I10 = \int_0^{\varphi+\gamma} \sin(a) \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) da$$

$$I11 = \int_0^{\varphi+\gamma} \cos(a) J_0(2\sqrt{-\varphi a}) da,$$

$$I12 = \int_0^{\varphi+\gamma} \cos(a) \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) da$$

Рассмотрим $I1 = \int_0^a (2\sqrt{(a-\alpha)b}) \cos \alpha d\alpha$. Введем следующую замену: $t = \sqrt{b(a-\alpha)}$ тогда:

$\alpha = a - \frac{t^2}{b}$, $d\alpha = -\frac{2}{b} t dt$. Границы преобразуются:

$\alpha = a \rightarrow t = 0$
 $\alpha = 0 \rightarrow t = \sqrt{ba}$. В итоге получим

$$\begin{aligned} I1 &= \int_{\sqrt{ba}}^0 J_0(2t) \cos\left(a - \frac{t^2}{b}\right) \left(-\frac{2}{b} t\right) dt = \\ &= \frac{2}{b} \int_0^{\sqrt{ba}} J_0(2t) \cos\left(a - \frac{t^2}{b}\right) t dt = \\ &= \frac{2}{b} \int_0^{\sqrt{ba}} t J_0(2t) \left(\cos(a) \cos\left(\frac{t^2}{b}\right) + \sin(a) \sin\left(\frac{t^2}{b}\right) \right) dt = \\ &= \frac{2}{b} \cos(a) \int_0^{\sqrt{ba}} t \cos\left(\frac{t^2}{b}\right) J_0(2t) dt + \\ &+ \frac{2}{b} \sin(a) \int_0^{\sqrt{ba}} t \sin\left(\frac{t^2}{b}\right) J_0(2t) dt. \end{aligned}$$

Согласно [6]:

$$\int_0^x x^{v+1} \begin{Bmatrix} \sin ax^2 \\ \cos ax^2 \end{Bmatrix} J_\nu(bx) dx = \quad (3)$$

$$= \frac{b^v}{(2a)^{v+1}} \begin{bmatrix} U_{v+1}(2ax^2, bx) \begin{Bmatrix} \sin ax^2 \\ \cos ax^2 \end{Bmatrix} \mp \\ \mp U_{v+2}(2ax^2, bx) \begin{Bmatrix} \cos ax^2 \\ \sin ax^2 \end{Bmatrix} \end{bmatrix}.$$

где $U_\nu(z, w) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{z}{w}\right)^{2k+\nu} J_{2k+\nu}(w)$ — функция

Ломмеля двух переменных [7].

Значит,

$$\begin{aligned} &\int_0^{\sqrt{ba}} t \cos\left(\frac{t^2}{b}\right) J_0(2t) dt = \\ &= \frac{b}{2} \left[U_1(2a, 2\sqrt{ba}) \cos(a) + U_2(2a, 2\sqrt{ba}) \sin(a) \right], \end{aligned}$$

$$\int_0^{\sqrt{ba}} t \sin\left(\frac{t^2}{b}\right) J_0(2t) dt =$$

$$= \frac{b}{2} \left[U_1(2a, 2\sqrt{ba}) \sin(a) - U_2(2a, 2\sqrt{ba}) \cos(a) \right].$$

Продолжая вычисление $I1$ получаем:

$$I1 = \frac{2}{b} \left(\cos(a) \frac{b}{2} \left[U_1(2a, 2\sqrt{ba}) \cos(a) + U_2(2a, 2\sqrt{ba}) \sin(a) \right] + \right.$$

$$\left. + \sin(a) \frac{b}{2} \left[U_1(2a, 2\sqrt{ba}) \sin(a) - U_2(2a, 2\sqrt{ba}) \cos(a) \right] \right) =$$

$$= \left[U_1(2a, 2\sqrt{ba}) \cos^2(a) + U_2(2a, 2\sqrt{ba}) \sin(a) \cos(a) \right] +$$

$$+ \left[U_1(2a, 2\sqrt{ba}) \sin^2(a) - U_2(2a, 2\sqrt{ba}) \cos(a) \sin(a) \right] =$$

$$= U_1(2a, 2\sqrt{ba}).$$

Окончательно получим:

$$I1 = U_1(2a, 2\sqrt{ba}) \quad (4)$$

С помощью аналогичных рассуждений получим:

$$I3 = U_2(2a, 2\sqrt{ba}) \quad (5)$$

Рассмотрим теперь $I4 = \int_0^b (2\sqrt{a(b-\beta)}) \times$

$\times \cos \beta d\beta$, замена: $t = \sqrt{a(b-\beta)}$ тогда: $\beta = b - \frac{t^2}{a}$,

$d\beta = -\frac{2}{a} t dt$. Границы преобразуются:

$\beta = b \rightarrow t = 0$

$\beta = 0 \rightarrow t = \sqrt{ba}$. В результате имеем:

$$\begin{aligned} I4 &= \int_{\sqrt{ba}}^0 J_0(2t) \cos\left(b - \frac{t^2}{a}\right) \left(-\frac{2}{a} t\right) dt = \\ &= \frac{2}{a} \int_0^{\sqrt{ba}} J_0(2t) \cos\left(b - \frac{t^2}{a}\right) t dt. \end{aligned}$$

Так как полученное выражение симметрично $I1$ относительно замены $a \leftrightarrow b$ то

$$I4 = U_1(2b, 2\sqrt{ba}) \quad (6)$$

И с помощью аналогичных рассуждений получаем:

$$I2 = U_2(2b, 2\sqrt{ba}) \quad (7)$$

Рассмотрим $I9 = \int_0^{\varphi+\gamma} \sin(a) J_0(2\sqrt{-\varphi a}) da$. Введем следующую замену:

$$\sqrt{a} = x, \quad (8)$$

тогда: $da = 2x dx$. Границы преобразуются $a = 0, \rightarrow x = 0$

$\theta = \varphi + \gamma, \rightarrow x = \sqrt{\varphi + \gamma}$. В итоге, получим

$$I9 = \int_0^{\sqrt{\varphi+\gamma}} 2x \sin(x^2) J_0(2\sqrt{-\varphi x}) dx$$

Используя формулу (3), получим

$$I9 = U_1(2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}) \sin(\varphi + \gamma) - U_2(2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}) \cos(\varphi + \gamma) \quad (9)$$

Проводя аналогичные рассуждения, получаем:

$$I11 = U_1(2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}) \cos(\varphi + \gamma) + U_2(2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}) \sin(\varphi + \gamma) \quad (10)$$

Р а с с м о т р и м $I10 = \int_0^{\varphi+\gamma} \sin(a) \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} \times J_1(2\sqrt{-\varphi a}) da$. Проводя аналогичную замену (8), получаем:

$$I10 = 2\sqrt{-\varphi} \int_0^{\sqrt{\varphi+\gamma}} \sin(x^2) J_1(2\sqrt{-\varphi x}) dx$$

Вычислим этот интеграл по частям $u = \sin(x^2), du = 2x \cos(x^2) dx$

$$dv = J_1(2\sqrt{-\varphi x}) dx, v = -\frac{J_0(2\sqrt{-\varphi x})}{2\sqrt{-\varphi}}$$

$$I10 = -J_0(2\sqrt{-\varphi x}) \sin(x^2) \Big|_0^{\sqrt{\varphi+\gamma}} + \int_0^{\sqrt{\varphi+\gamma}} 2x \cos(x^2) J_0(2\sqrt{-\varphi x}) dx,$$

$$I10 = -J_0(2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}) \sin(\varphi + \gamma) + U_1(2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}) \cos(\varphi + \gamma) + U_2(2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}) \sin(\varphi + \gamma) \quad (11)$$

Аналогично получаем:

$$I12 = -J_0(2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}) \cos(\varphi + \gamma) - U_1(2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}) \sin(\varphi + \gamma) + U_2(2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}) \cos(\varphi + \gamma) + 1 \quad (12)$$

$I5$ будем вычислять по частям после аналогичной замены:

$$I5 = \int_0^{\sqrt{\varphi+\gamma}} 2x^3 \sin(x^2) J_0(2\sqrt{-\varphi x}) dx$$

$$dv = 2x^3 \sin(x^2)$$

$$v = \int 2x^3 \sin(x^2) dx = \sin(x^2) - x^2 \cos(x^2)$$

$$u = J_0(2\sqrt{-\varphi x}) \quad du = -2\sqrt{-\varphi} J_1(2\sqrt{-\varphi x})$$

$$I5 = J_0(2\sqrt{-\varphi x}) (\sin(x^2) - x^2 \cos(x^2)) \Big|_0^{\sqrt{\varphi+\gamma}} + \int_0^{\sqrt{\varphi+\gamma}} (\sin(x^2) - x^2 \cos(x^2)) 2\sqrt{-\varphi} J_1(2\sqrt{-\varphi x}) dx = J_0(2\sqrt{-\varphi x}) (\sin(x^2) - x^2 \cos(x^2)) \Big|_0^{\sqrt{\varphi+\gamma}} + 2\sqrt{-\varphi} \left[\int_0^{\sqrt{\varphi+\gamma}} \sin(x^2) J_1(2\sqrt{-\varphi x}) dx - \int_0^{\sqrt{\varphi+\gamma}} x^2 \cos(x^2) J_1(2\sqrt{-\varphi x}) dx \right] =$$

$$= J_0(2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}) (\sin(\varphi + \gamma) - (\varphi + \gamma) \cos(\varphi + \gamma)) - J_0(2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}) \sin(\varphi + \gamma) + U_1(2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}) \cos(\varphi + \gamma) + U_2(2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}) \sin(\varphi + \gamma) - \varphi [U_2(2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}) \cos(\varphi + \gamma) + U_3(2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}) \sin(\varphi + \gamma)]$$

В итоге получаем:

$$I5 = U_1(2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}) \cos(\varphi + \gamma) + U_2(2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}) \times (\sin(\varphi + \gamma) + \varphi \cos(\varphi + \gamma)) + \varphi U_3(2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}) \sin(\varphi + \gamma) - (\varphi + \gamma) \cos(\varphi + \gamma) J_0(2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}) \quad (13)$$

Аналогично:

$$I7 = (\varphi + \gamma) \sin(\varphi + \gamma) J_0(2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}) - U_1(2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}) \sin(\varphi + \gamma) + U_2(2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}) \times (\cos(\varphi + \gamma) - \varphi \sin(\varphi + \gamma)) + \varphi U_3(2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}) \cos(\varphi + \gamma) \quad (14)$$

Р а с с м о т р и м $I6 = \int_0^{\varphi+\gamma} a \sin(a) \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} \times J_1(2\sqrt{-\varphi a}) da$. После аналогичной замены (8) данный интеграл преобразуется к виду

$$I6 = 2\sqrt{-\varphi} \int_0^{\sqrt{\varphi+\gamma}} x^2 \sin(x^2) J_1(2\sqrt{-\varphi}x) dx$$

В конечном итоге получаем:

$$I6 = -\varphi \left(U_2 \left(2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)} \right) \sin(\varphi + \gamma) - U_3 \left(2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)} \right) \cos(\varphi + \gamma) \right) \quad (15)$$

Аналогично:

$$I8 = -\varphi \left(U_2 \left(2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)} \right) \cos(\varphi + \gamma) + U_3 \left(2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)} \right) \sin(\varphi + \gamma) \right) \quad (16)$$

Таким образом, интегралы $I1 - I12$ выражаются через комбинацию функций Ломмеля двух переменных, имеющих в качестве аргументов выражения типа: $(2a, 2\sqrt{ab})$, $(2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)})$.

Решение задачи Гурса для координат.

Часто в задачах встречается сетка, построенная на двух окружностях, но координаты линий скольжения получены с помощью метода конечных разностей. Мы будем использовать интегралы $I1 - I4$ и интегрирование по методу Римана дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа. Пусть в системе координат xOy центры окружностей расположены в точках с координатами $(0, R)$ α -линия и $(-R, 0)$ β -линия. Параметрическое уравнение окружностей имеют следующий вид:

$$\alpha\text{-линия} \begin{cases} x = R \sin \alpha \\ y = R - R \cos \alpha \end{cases} \text{ и} \quad \beta\text{-линия} \begin{cases} x = -R + R \cos \beta \\ y = R \sin \beta \end{cases}$$

Используя переменные введенные Михлиным

$$\begin{cases} X = x \cos(\theta) + y \sin(\theta) \\ Y = -x \sin(\theta) + y \cos(\theta), \end{cases} \text{ при } \theta = \alpha + \beta$$

будем иметь следующие краевые условия начальной характеристической задачи: для α -линии

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \theta = \beta, \end{cases} \begin{cases} X = R - R \cos \beta \\ Y = R \sin \beta, \end{cases} \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial \beta} = R \sin \beta \\ \frac{\partial Y}{\partial \beta} = R \cos \beta. \end{cases}$$

для β -линии

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \theta = \alpha, \end{cases} \begin{cases} X = R \sin \alpha \\ Y = R \cos \alpha - R, \end{cases} \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial \alpha} = R \cos \alpha \\ \frac{\partial Y}{\partial \alpha} = -R \sin \alpha. \end{cases}$$

Как известно переменные Михлина X и Y удовлетворяют телеграфному уравнению (1) [2] решение которого задается формулой Римана (2). Для переменной X будем иметь:

$$X(a, b) = \int_0^a J_0 \left(2\sqrt{(a - \alpha)b} \right) R \cos \alpha d\alpha + \int_0^b J_0 \left(2\sqrt{a(b - \beta)} \right) R \sin \beta d\beta.$$

Для переменной Y будем иметь:

$$Y(a, b) = \int_0^a J_0 \left(2\sqrt{(a - \alpha)b} \right) (-R \sin \alpha) d\alpha + \int_0^b J_0 \left(2\sqrt{a(b - \beta)} \right) R \cos \beta d\beta.$$

Обратная подстановка к физическим координатам x, y дает квадратурные формулы линий скольжения:

$$\begin{cases} x(a, b) = X(a, b) \cos(a + b) - Y(a, b) \sin(a + b), \\ y(a, b) = X(a, b) \sin(a + b) + Y(a, b) \cos(a + b). \end{cases}$$

При этом легко заметить, что

$$\begin{cases} X(a, b) = R(I1 + I2), \\ Y(a, b) = R(-I3 + I4). \end{cases}$$

Подставляем полученные формулы (4)–(9) в результате получаем формулы для координат:

$$\begin{cases} x(a, b) = R \cos(a + b) \times \\ \times \left[U_1 \left(2a, 2\sqrt{ba} \right) + U_2 \left(2b, 2\sqrt{ba} \right) \right] - \\ - R \sin(a + b) \left[U_1 \left(2b, 2\sqrt{ba} \right) - U_2 \left(2a, 2\sqrt{ba} \right) \right] \\ y(a, b) = R \sin(a + b) \times \\ \times \left[U_1 \left(2a, 2\sqrt{ba} \right) + U_2 \left(2b, 2\sqrt{ba} \right) \right] + \\ + R \cos(a + b) \left[U_1 \left(2b, 2\sqrt{ba} \right) - U_2 \left(2a, 2\sqrt{ba} \right) \right] \end{cases} \quad (17)$$

Уравнения (17) дают возможность определять координаты линий скольжения не прибегая к методу конечных разностей. Для сравнения (Hill, стр. 186)

Решение задачи Гурса для радиуса кривизны. Способом изложенным выше мож-

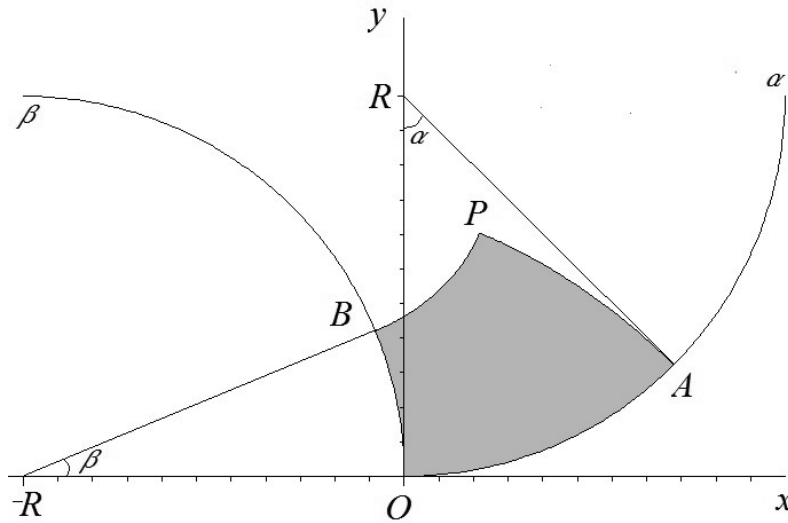


Рис. 1: К нахождению координат линий скольжения и их радиусов кривизны

но получить формулы для радиусов кривизн α и β линий и сравнить их с известными выражениями, приведенными в [1].

$$\begin{aligned}
 R(a, b) &= R(0, 0)J_0(2\sqrt{ab}) + \\
 &+ \int_0^a J_0(2\sqrt{(a-\alpha)b}) \frac{\partial R}{\partial \alpha} d\alpha + \\
 &+ \int_0^b J_0(2\sqrt{a(b-\beta)}) \frac{\partial R}{\partial \beta} d\beta \\
 S(a, b) &= S(0, 0)J_0(2\sqrt{ab}) + \\
 &+ \int_0^a J_0(2\sqrt{(a-\alpha)b}) \frac{\partial S}{\partial \alpha} d\alpha + \\
 &+ \int_0^b J_0(2\sqrt{a(b-\beta)}) \frac{\partial S}{\partial \beta} d\beta
 \end{aligned}$$

Если мы выберем систему осей (x, y) как показано на (рис. 1) то по всему полю α является положительным, а β отрицательным, следовательно:

$$\begin{cases} R(a, 0) = R \\ S(0, b) = -R, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha} = -R, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial \beta} = -R \\ \frac{\partial S}{\partial \beta} = 0. \end{cases}$$

Подставляя граничные условия, находим:

$$R(a, b) = R \left(J_0(2\sqrt{ab}) - \frac{\sqrt{ab}}{a} J_1(2\sqrt{ab}) \right). \quad (18)$$

$$S(a, b) = -R \left(J_0(2\sqrt{ab}) + \frac{\sqrt{ab}}{b} J_1(2\sqrt{ab}) \right). \quad (19)$$

Уравнения (18) и (19) аналогичны уравнениям (Hill, стр. 186, (31))

Решение задачи Гурса для скоростей.

В задачах волочения полосы через криволинейную или прямолинейную матрицу граничные условия для скоростей выглядят следующим образом [8]:

$$\begin{cases} u = U \sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) \\ v = V \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \end{cases} \quad (20)$$

Из соотношений Гейрингер

$$\begin{aligned} du - vd\varphi &= 0 \text{ вдоль } \alpha\text{-линии} \\ dv - ud\varphi &= 0 \text{ вдоль } \beta\text{-линии,} \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \alpha} = v = V \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \\ \frac{\partial v}{\partial \beta} = -u = -U \sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) \\ \frac{\partial u}{\partial \beta} = U \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) \\ \frac{\partial v}{\partial \alpha} = -V \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \end{cases}$$

Попытаемся найти решение в пластической зоне таким же образом как для кривизн и координат линий скольжения (2).

$$\begin{aligned} u(a, b) &= \frac{U}{\sqrt{2}} J_0(2\sqrt{ab}) + \\ &+ V \int_0^a J_0(2\sqrt{(a-\alpha)b}) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) d\alpha + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+U \int_0^b J_0 \left(2\sqrt{a(b-\beta)} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} + \beta \right) d\beta \\
 v(a,b) &= \frac{V}{\sqrt{2}} J_0 \left(2\sqrt{ab} \right) - \\
 &-V \int_0^a J_0 \left(2\sqrt{(a-\alpha)b} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) d\alpha - \\
 &-U \int_0^b J_0 \left(2\sqrt{a(b-\beta)} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \beta \right) d\beta
 \end{aligned}$$

Используя тригонометрические формулы, получим:

$$\begin{aligned}
 u(a,b) &= \frac{U}{\sqrt{2}} J_0 \left(2\sqrt{ab} \right) + \\
 &+ \frac{V}{\sqrt{2}} \left[\int_0^a J_0 \left(2\sqrt{(a-\alpha)b} \right) \cos(\alpha) d\alpha - \right. \\
 &\left. - \int_0^a J_0 \left(2\sqrt{(a-\alpha)b} \right) \sin(\alpha) d\alpha \right] + \\
 &+ \frac{U}{\sqrt{2}} \left[\int_0^b J_0 \left(2\sqrt{a(b-\beta)} \right) \cos(\beta) d\beta - \right. \\
 &\left. - \int_0^b J_0 \left(2\sqrt{a(b-\beta)} \right) \sin(\beta) d\beta \right] \\
 v(a,b) &= \frac{V}{\sqrt{2}} J_0 \left(2\sqrt{ab} \right) - \\
 &- \frac{V}{\sqrt{2}} \left[\int_0^a J_0 \left(2\sqrt{(a-\alpha)b} \right) \sin(\alpha) d\alpha - \right. \\
 &\left. - \int_0^a J_0 \left(2\sqrt{(a-\alpha)b} \right) \cos(\alpha) d\alpha \right] - \\
 &- \frac{U}{\sqrt{2}} \left[\int_0^b J_0 \left(2\sqrt{a(b-\beta)} \right) \sin(\beta) d\beta - \right. \\
 &\left. - \int_0^b J_0 \left(2\sqrt{a(b-\beta)} \right) \cos(\beta) d\beta \right] \\
 u(a,b) &= \frac{U}{\sqrt{2}} J_0 \left(2\sqrt{ab} \right) + \frac{V}{\sqrt{2}} [I1 - I3] + \frac{U}{\sqrt{2}} [I4 - I3] \\
 v(a,b) &= \frac{V}{\sqrt{2}} J_0 \left(2\sqrt{ab} \right) - \frac{V}{\sqrt{2}} [I3 - I1] - \frac{U}{\sqrt{2}} [I2 - I4]
 \end{aligned}$$

Подставляя (4)–(9) получаем формулы для скоростей вдоль линий скольжения

$$\begin{cases}
 u(a,b) = \frac{HV}{h\sqrt{2}} J_0 \left(2\sqrt{ab} \right) + \\
 + \frac{V}{\sqrt{2}} \left[U_1 \left(2a, 2\sqrt{ba} \right) - U_2 \left(2a, 2\sqrt{ba} \right) \right] + \\
 + \frac{HV}{h\sqrt{2}} \left[U_1 \left(2b, 2\sqrt{ba} \right) - U_2 \left(2b, 2\sqrt{ba} \right) \right] \\
 v(a,b) = \frac{V}{\sqrt{2}} J_0 \left(2\sqrt{ab} \right) - \\
 - \frac{V}{\sqrt{2}} \left[U_1 \left(2a, 2\sqrt{ba} \right) + U_2 \left(2a, 2\sqrt{ba} \right) \right] - \\
 - \frac{HV}{h\sqrt{2}} \left[U_1 \left(2b, 2\sqrt{ba} \right) + U_2 \left(2b, 2\sqrt{ba} \right) \right]
 \end{cases} \quad (21)$$

Уравнения (21) позволяют найти распределение скоростей вдоль характеристик в пластической зоне, возникающей, например, при волочении полосы (рис. 2, область *DCEO*).

Постановка задачи о волочении полосы. Рассмотрим полосу толщиной $2H$ из материала, предел текучести которого есть k , протаскивается со скоростью U сквозь жесткую прямолинейную гладкую матрицу с углом раствора 2γ . До сужения материала скорость его V , после сужения — U , и части полос движутся как твердое тело. Используя свойство несжимаемости материала имеем $V = \frac{H}{h}U$, где h — толщина полосы после сужения материала. Для упрощения расчетов не учитывается трение на границе матрицы, и с учетом симметрии задачи для верхней половины предполагаемое поле линий скольжения представлено на рис. 2. Отметим, что решение зависит от

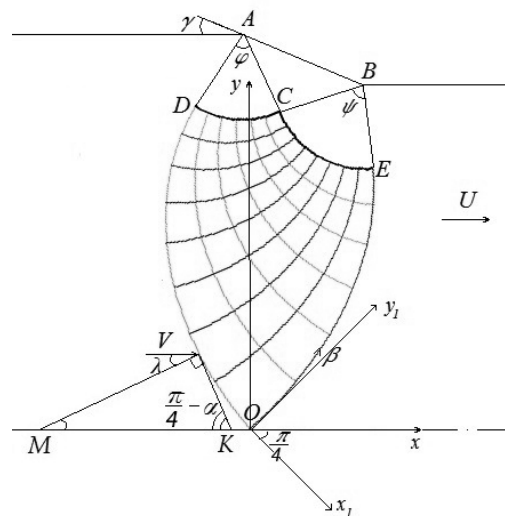


Рис. 2. Предполагаемое поле линий скольжения

предполагаемой границы жесткопластического тела. И как отмечено в работе [8] это определяет решение не единственным образом.

Здесь в треугольнике ABC однородное напряженное состояние, линии скольжения взаимно ортогональны и подходят к границе

AB под углом $\frac{\pi}{4}$. Так называемые центриро-

ванные поля [2] ACD и BCE содержат неизвестные углы φ и ψ соответственно. В криволинейном четырехугольнике $ODCE$ необходимо решить задачу Гурса по данным на линиях скольжения CD и CE .

При введении криволинейных координат α и β :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_0}{2k} - \left(\frac{\sigma}{2k} - \varphi \right) \right] \\ \beta = \frac{1}{2} \left[-\frac{\sigma_0}{2k} + \left(\frac{\sigma}{2k} + \varphi \right) \right], \end{cases}$$

где $p = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$, составляющая скоростей u, v

вдоль α и β удовлетворяет телеграфному уравнению (1) Введем две системы координат:

xOy — система координат, абсцисса которой лежит на оси симметрии полосы волочения, а начало координат расположено в точке O , находящейся на пересечении α и β линий скольжения, выходящих из граничных точек A и B , ограничивающих зону пластического деформирования.

x_1Oy_1 — система координат, повернутая в точке O относительно xOy на угол $\frac{\pi}{4}$, так как

линии скольжения подходят к оси симметрии под углом $\frac{\pi}{4}$. Найдем граничные условия для скоростей. Исходя из (рис. 2) видно, что на

α -линии нормальная составляющая скорости будет $v = V \cos \lambda$, а касательная составляющая u направлена под углом α к линии скольжения. Также известно, что линии скольжения составляют с осью симметрии угол равный $\frac{\pi}{4}$.

Исходя из этих данных и того, что угол $\alpha < 0$, мы получаем, что угол $MKN = \frac{\pi}{4} - \alpha$. Далее, учитывая что углы KMN и λ накрестлежа-

щие, мы получаем $\lambda = \frac{\pi}{4} + \alpha$, а проекция

$v = V \cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)$. Проводя аналогичные рас-

суждения на β -линии и учитывая, что $\beta > 0$, получаем $u = U \sin \left(\frac{\pi}{4} + \beta \right)$, что соответствует

(20). Таким образом, скорости в четырехугольнике $ODCE$ определяются по формуле (21).

Так как линии скольжения подходят под углом $\frac{\pi}{4}$ к границе, то условие непротекания

примет вид $u = v$. В силу того, что координаты точки $C(-\psi, \varphi)$, из уравнения $u(-\psi, \varphi) = v(-\psi, \varphi)$ найдем неявное задание кривой $u = v$ в плоскости (α, β) . Подставив полученные формулы (21) получим

$$\frac{H-h}{h} J_0 \left(2\sqrt{-\varphi\psi} \right) + \frac{2H}{h} U_1 \left(2\varphi, 2\sqrt{-\varphi\psi} \right) + 2U_1 \left(-2\psi, 2\sqrt{-\varphi\psi} \right) = 0 \quad (22)$$

С помощью данной формулы при различных значениях φ и ψ можно построить линию непротекания. При различных $\frac{h}{H} = 0.7, 0.8, 0.9$

построим график линии непротекания в плоскости (α, β) (рис. 3). Можно заметить, что при большем сужении, значения функции уменьшаются. Так как линии скольжения пересека-

ют ось под углом $\frac{\pi}{4}$, то можно воспользовать-

ся соотношением, связывающем углы φ и ψ [2] $\psi = \varphi + \gamma$ и (4) запишется в виде

$$\frac{H-h}{h} J_0 \left(2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)} \right) + \frac{2H}{h} U_1 \left(2\varphi, 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)} \right) + 2U_1 \left(-2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)} \right) = 0 \quad (23)$$

В уравнении (23) определяется угол φ при фиксированных переменных H, h, γ .

Построим график пересечения линии непротекания при $\frac{h}{H} = 0.66$ с линией $\varphi - \psi + \gamma = 0$

при $\gamma = \frac{\pi}{12}$

Уравнения координат вдоль линий скольжения имеют вид (17), записанных в системе координат x_2Cy_2 (рис. 5)

Ось симметрии, проходящая через точку O в этой системе координат имеет уравнение

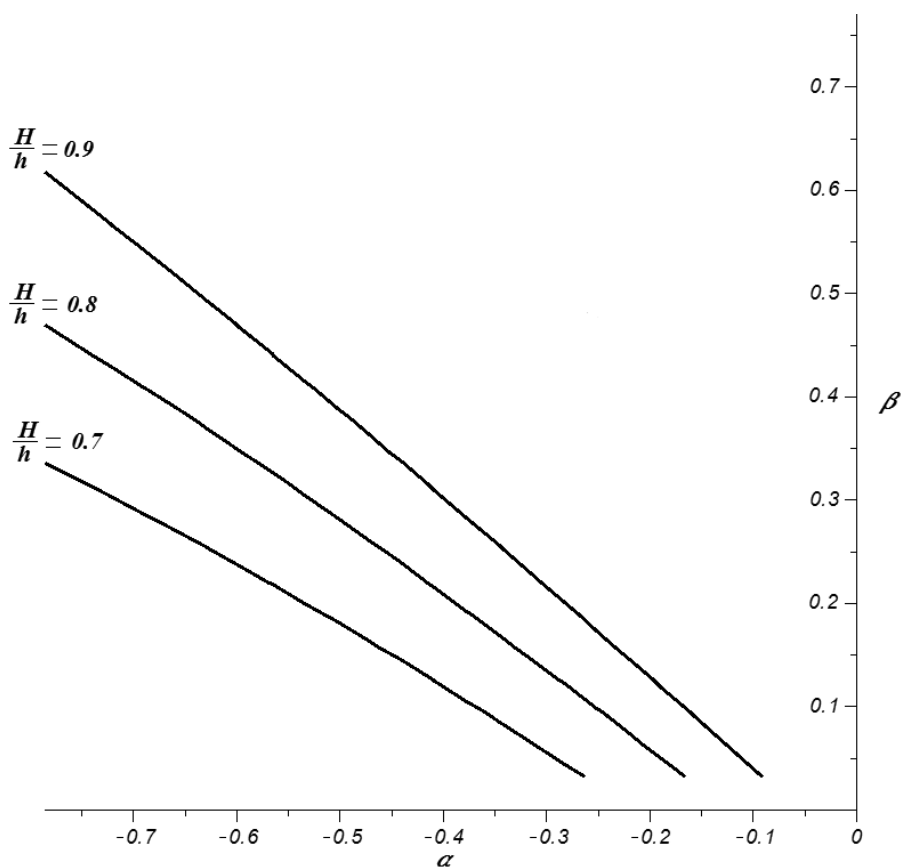


Рис. 3. Кривая $u = v$ в плоскости (α, β) при различных соотношениях $\frac{h}{H}$

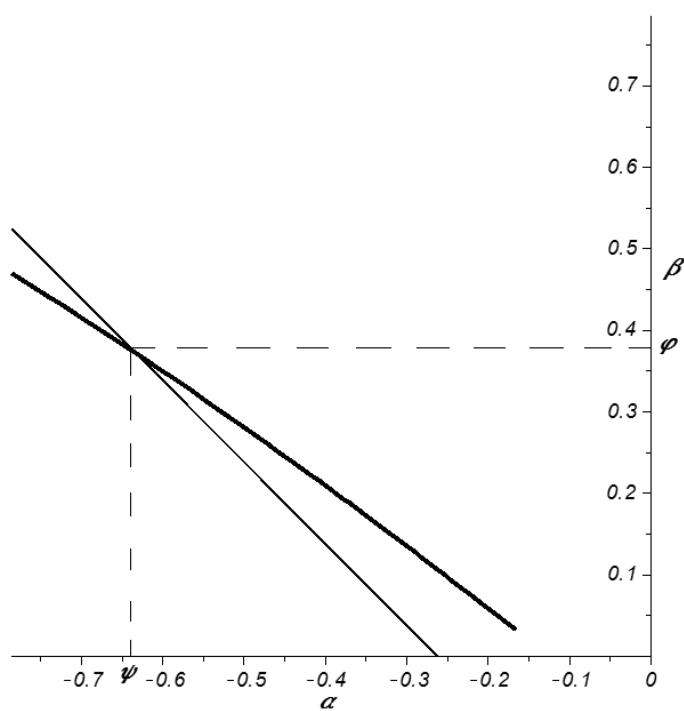


Рис.4. Условие определения угла раскрытия веера φ используя соотношения для скоростей

прямой $y = kx + b$, где угловой коэффициент $k = \left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right)$, а величина $b = -CL$ (рис. 6)

Из (рис. 5) легко заметить, что $\sin \gamma = \frac{H-h}{AB}$,

а $BC = \frac{AB}{\sqrt{2}}$. Таким образом получается, что

$$BC = \frac{H-h}{2\sqrt{2} \sin \gamma}$$

Из (рис. 6) видно, что $CK + BC \sin\left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right) = \frac{h}{2}$, следовательно

$$CK = \frac{h}{2} - \frac{H-h}{2\sqrt{2} \sin \gamma} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right)$$

Из прямоугольного треугольника CLK можно выписать соотношение $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \gamma\right) = \frac{CK}{CL}$, следовательно

$$CL = \frac{\sqrt{2}h \sin \gamma - H \sin\left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right) + h\left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right)}{2\sqrt{2} \sin \gamma \cos\left(\frac{\pi}{4} + \gamma\right)}$$

Таким образом, уравнение оси симметрии в системе координат x_2Cy_2 имеет вид:

$$y = \left(\frac{\pi}{4} + \gamma\right)x + \frac{(h-H) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right) - \sqrt{2}h \sin \gamma}{2\sqrt{2} \sin \gamma \cos\left(\frac{\pi}{4} + \gamma\right)} \quad (24)$$

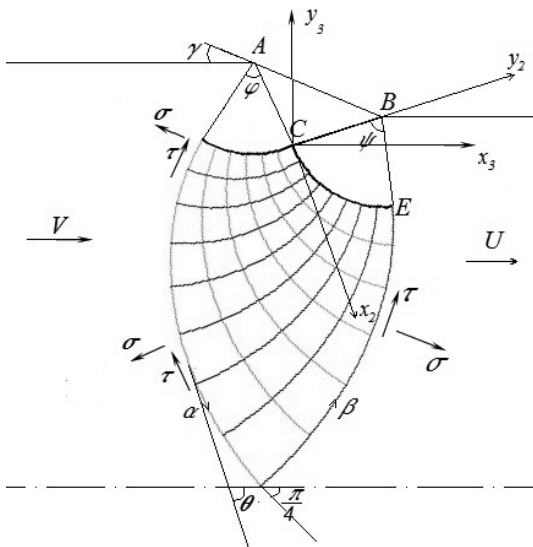


Рис. 5: Нахождение напряжения и силы волочения

Запишем теперь условие для определения угла φ — угла раскрытия веера CAD : α -линия DO пересекается с осью симметрии, значит подставляя $x(\chi + \gamma, -\varphi)$ и $y(\chi + \gamma, -\varphi)$ из системы (17) в уравнение (24) получим следующее уравнение для определения φ .

$$y(\varphi + \gamma, -\varphi) = \left(\frac{\pi}{4} + \gamma\right)x(\varphi + \gamma, -\varphi) + \frac{(h-H) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right) - \sqrt{2}h \sin \gamma}{2\sqrt{2} \sin \gamma \cos\left(\frac{\pi}{4} + \gamma\right)} \quad (25)$$

Подставляя (17) в (26) получим уравнение для определения угла раскрытия веера φ при фиксированных переменных H, h, γ .

Сравним полученные формулы (23) и (26). Для этого при фиксированном соотношении $\frac{H}{h}$ равном 0.7, 0.8, 0.9 построим график зависимости углов φ соответственно от γ (рис. 7).

Нахождение напряжения в четырехугольнике $ODCE$

Чтобы найти напряжения в точке O повернем оси x_2Oy_2 на угол $\frac{\pi}{4} + \gamma$, полученные оси

обозначим x_3Oy_3 (рис. 5) Спроектируем все напряжения вдоль α -линии на ось x_3O . Так как вдоль α -линии выполняются соотношения Генки, то взяв на α -линии произвольную точку M , получаем:

$$\frac{\sigma_O}{2k} - \theta_O = \frac{\sigma_M}{2k} - \theta_M$$

Известно, что $\theta_O = -\frac{\pi}{4}$. Подставляя это значения получаем

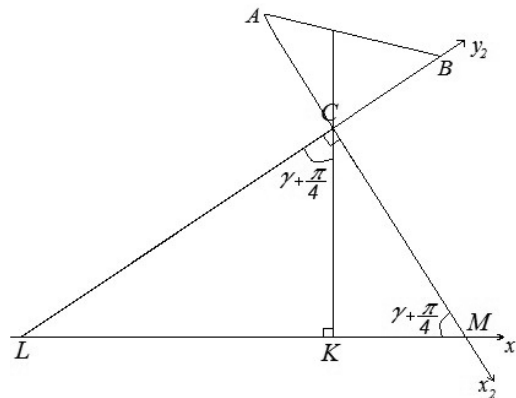


Рис. 6: Нахождение коэффициентов k и b

$$\sigma_M = \sigma_o + 2k \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$$

В силу произвольности точки M , можно записать $\sigma_M = \sigma$ и следовательно:

$$\sigma = \sigma_o + 2k \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \quad (26)$$

Аналогично получаем:

$$\sigma_D = \sigma_o - 2k(\varphi + \gamma)$$

Запишем проекцию напряжений вдоль AOD на ось x_3O . Она состоит из прямолинейного участка AD и криволинейного DO (рис. 5):

$$\begin{aligned} P_x^{AD} &= (\sigma_D \sin \theta_D - \tau \cos \theta_D) AD \\ P_x^{DO} &= \int_S (\sigma \sin \theta - \tau \cos \theta) dS = \\ &= \int_S \left[\left[\sigma_o + 2k \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \right] \sin \theta - \tau \cos \theta \right] dS \end{aligned}$$

Для перехода от криволинейного интеграла к определенному нам необходимо знать радиус кривизны вдоль α -линии. Он определяется по формуле (18), при этом $R = \frac{H-h}{2\sqrt{2} \sin(\gamma)} = AD$.

При замене $dS = R(a, -\varphi) da$ в криволинейном интеграле пределы интегрирования будут $0 \leq a \leq \varphi + \gamma$, при этом вдоль линии скольжения $\tau = k$. Получим:

$$\begin{aligned} P_x^{DO} &= AD \int_0^{\varphi+\gamma} \left[\sigma_o + 2k(a - \varphi - \gamma) \right] \times \\ &\quad \times \sin \left(a - \frac{\pi}{4} - \varphi - \gamma \right) \times \\ &\quad \times \left(J_0(2\sqrt{-\varphi a}) - \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) \right) - \\ &\quad - k \cos \left(a - \frac{\pi}{4} - \varphi - \gamma \right) \times \\ &\quad \times \left(J_0(2\sqrt{-\varphi a}) - \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) \right) da. \end{aligned}$$

Проекция напряжений вдоль AD будет:

$$\begin{aligned} P_x^{AD} &= (\sigma \sin \theta - \tau \cos \theta) AD = \\ &= -(\sigma_o - 2k(\varphi + \gamma)) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma \right) - \\ &\quad - k \cos \left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma \right) AD \end{aligned}$$

Так как противонапряжение отсутствует, то $P_x^{DO} + P_x^{AD} = 0$, получаем

$$\begin{aligned} &\sigma_o \left(\int_0^{\varphi+\gamma} \sin \left(a - \frac{\pi}{4} - \varphi - \gamma \right) \times \right. \\ &\quad \times \left. \left(J_0(2\sqrt{-\varphi a}) - \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) \right) da - \right. \\ &\quad \left. - \sin \left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma \right) \right) = \\ &= k \left(\int_0^{\varphi+\gamma} \cos \left(a - \frac{\pi}{4} - \varphi - \gamma \right) \times \right. \\ &\quad \times \left. \left(J_0(2\sqrt{-\varphi a}) - \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) \right) da \right. \\ &\quad \left. + \cos \left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma \right) \right) - \\ &- 2k \left(\int_0^{\varphi+\gamma} (a - \varphi - \gamma) \sin \left(a - \frac{\pi}{4} - \varphi - \gamma \right) \times \right. \\ &\quad \times \left. \left(J_0(2\sqrt{-\varphi a}) - \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) \right) da + \right. \\ &\quad \left. + (\varphi + \gamma) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma \right) \right) \end{aligned}$$

Перейдем к вычислению интегралов. Для начала воспользуемся тригонометрическими формулами синуса и косинуса разности углов.

$$\begin{aligned} &\int_0^{\varphi+\gamma} \sin \left(a - \frac{\pi}{4} - \varphi - \gamma \right) \times \\ &\quad \times \left(J_0(2\sqrt{-\varphi a}) - \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) \right) da = \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma \right) \left[\int_0^{\varphi+\gamma} \sin a J_0(2\sqrt{-\varphi a}) da - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\varphi+\gamma} \sin a \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) da \right] - \\ &- \sin \left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma \right) \left[\int_0^{\varphi+\gamma} \cos a J_0(2\sqrt{-\varphi a}) da - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\varphi+\gamma} \cos a \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) da \right] = \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma \right) (I9 - I10) - \\ &\quad - \sin \left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma \right) (I11 - I12) \end{aligned}$$

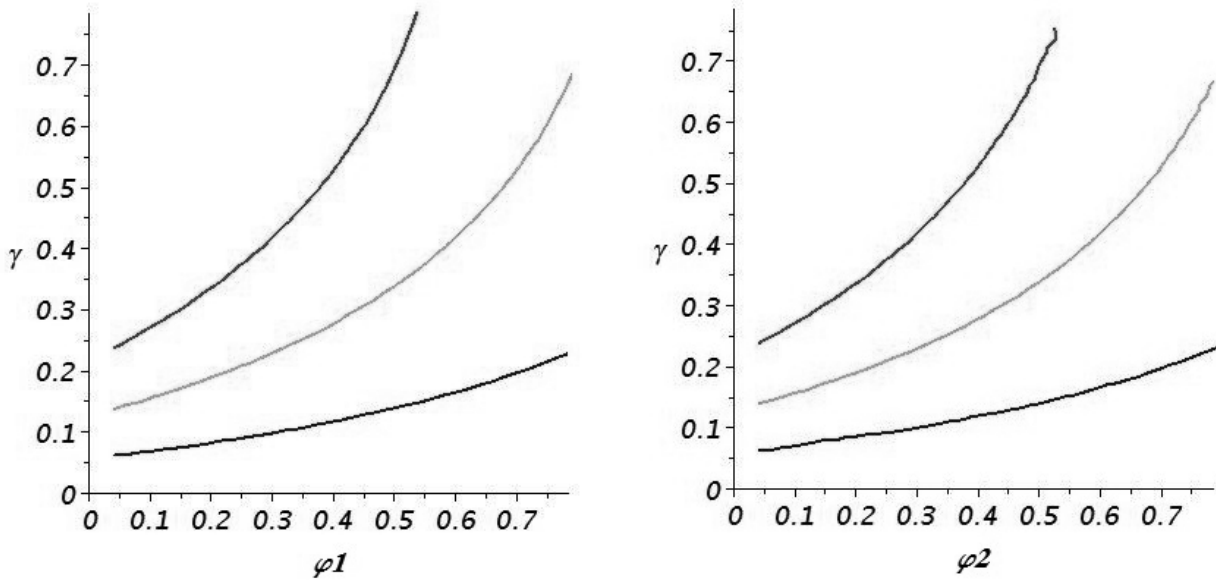


Рис. 7. φ_1 — угол раскрытия веера, полученный с помощью соотношений для скоростей вдоль линий скольжения; φ_2 — угол раскрытия веера, полученный с помощью уравнений линий скольжения в координатах

Аналогично:

$$\int_0^{\varphi+\gamma} \cos\left(a - \frac{\pi}{4} - \varphi - \gamma\right) \times \left(J_0(2\sqrt{-\varphi a}) - \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) \right) da =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma\right) (I11 - I12) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma\right) (I9 - I10)$$

$$\int_0^{\varphi+\gamma} (a - \varphi - \gamma) \sin\left(a - \frac{\pi}{4} - \varphi - \gamma\right) \times \left(J_0(2\sqrt{-\varphi a}) - \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) \right) da =$$

$$\int_0^{\varphi+\gamma} a \sin\left(a - \frac{\pi}{4} - \varphi - \gamma\right) \times \left(J_0(2\sqrt{-\varphi a}) - \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) \right) da -$$

$$-(\varphi + \gamma) \int_0^{\varphi+\gamma} \sin\left(a - \frac{\pi}{4} - \varphi - \gamma\right) \times \left(J_0(2\sqrt{-\varphi a}) - \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) \right) da =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma\right) (I5 - I6) - \sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma\right) (I7 - I8) - (\varphi + \gamma) \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma\right) (I1 - I2) - \sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma\right) (I3 - I4) \right)$$

Легко заметить, что интегралы аналогичны I5 — I12 и вычисляются по формулам (9) — (16). После простых преобразований получаем:

$$\int_0^{\varphi+\gamma} \sin\left(a - \frac{\pi}{4} - \varphi - \gamma\right) \times \left(J_0(2\sqrt{-\varphi a}) - \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) \right) da =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} J_0(2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma\right) - \sqrt{2} U_1(2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)})$$

$$\int_0^{\varphi+\gamma} \cos\left(a - \frac{\pi}{4} - \varphi - \gamma\right) \times \left(J_0(2\sqrt{-\varphi a}) - \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) \right) da =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} J_0(2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma\right) - \\
 &\quad - \sqrt{2} U_2(2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}) \\
 &\quad \int_0^{\varphi + \gamma} (a - \varphi - \gamma) \sin\left(a - \frac{\pi}{4} - \varphi - \gamma\right) \times \\
 &\quad \times \left(J_0(2\sqrt{-\varphi a}) - \frac{\sqrt{-\varphi}}{\sqrt{a}} J_1(2\sqrt{-\varphi a}) \right) da = \\
 &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \right] U_1(2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}) - \\
 &\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} U_2(2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}) - \\
 &\quad \varphi \sqrt{2} U_3(2(\varphi + \gamma), 2\sqrt{-\varphi(\varphi + \gamma)}) - \\
 &\quad - \sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \gamma\right) (\varphi + \gamma)
 \end{aligned}$$

Из соотношения $P_x^{AO} = P_x^{AD} + P_x^{DO} = 0$ выразим σ_o учитывая, что $\varphi + \gamma = \psi$

$$\begin{aligned}
 \sigma_o &= \\
 &= \frac{\frac{k}{\sqrt{2}} J_0(2\sqrt{-\varphi\psi}) - 2k \left[U_1(2\psi, 2\sqrt{-\varphi\psi}) - \right. \\
 &\quad \left. - \varphi \sqrt{2} U_3(2\psi, 2\sqrt{-\varphi\psi}) \right]}{-\frac{1}{\sqrt{2}} J_0(2\sqrt{-\varphi\psi}) - \sqrt{2} U_1(2\psi, 2\sqrt{-\varphi\psi})} \quad (27)
 \end{aligned}$$

Нахождение силы волочения. Перейдем к нахождению среднего напряжения волочения. Для этого спроектируем все напряжения вдоль кривой OEB на ось x (рис. 5). Сумма всех проекций будет равна $\frac{P}{2}$. Так как вдоль β -линии выполняются соотношения Генки, то взяв на β -линии произвольную точку M , получаем $\frac{\sigma_M}{2k} + \theta_M = \frac{\sigma_o}{2k} + \theta_o$.

Известно, что $\theta_o = -\frac{\pi}{4}$. Подставляя это значения получаем

$$\sigma_M = \sigma_o + 2k \left(-\theta - \frac{\pi}{4} \right)$$

В силу произвольности точки M , можно записать $\sigma_M = \sigma$ и следовательно:

$$\sigma = \sigma_o + 2k \left(-\theta - \frac{\pi}{4} \right)$$

Аналогично получаем:

$$\sigma_E = \sigma_o - 2k\varphi$$

Запишем проекцию напряжений вдоль OEB на ось x_3O . Она состоит из прямолинейного участка BE и криволинейного EO (рис. 5):

$$\begin{aligned}
 P_x^{EB} &= (\sigma_E \cos \theta_E - \tau \sin \theta_A) BE \\
 P_x^{OE} &= \int_S (\sigma \cos \theta - \tau \sin \theta) dS = \\
 &= \int_S \left[\left[\sigma_o + 2k \left(-\theta - \frac{\pi}{4} \right) \right] \cos \theta - \tau \sin \theta \right] dS
 \end{aligned}$$

Для перехода от криволинейного интеграла к определенному нам необходимо знать радиус кривизны вдоль β -линии. Он определяется по формуле (19), при этом $R = \frac{H - h}{2\sqrt{2} \sin(\gamma)} = BE$

. При замене $dS = S(\psi, b) db$ в криволинейном интеграле, получаем:

$$\begin{aligned}
 P_x^{OE} &= BE \int_{-\varphi}^0 \left[\sigma_o + 2k(-b - \varphi) \right] \times \\
 &\times \cos\left(b + \varphi - \frac{\pi}{4}\right) \left(J_0(2\sqrt{\psi b}) + \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) \right) - \\
 &- k \sin\left(b + \varphi - \frac{\pi}{4}\right) \left(J_0(2\sqrt{\psi b}) + \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) \right) db \\
 P_x^{EB} &= \left((\sigma_o - 2k\varphi) \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) - k \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \right) BE
 \end{aligned}$$

Так как $P_x^{OE} + P_x^{EB} = \frac{P}{2}$, получаем:

$$\begin{aligned}
 \frac{P}{2kh} &= \frac{H - h}{2\sqrt{2} \sin \gamma} \left[(\sigma_o - 2k\varphi) \times \right. \\
 &\times \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) - k \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + \\
 &\left. \int_{-\varphi}^0 \left[\left(\sigma_o + 2k(-b - \varphi) \right) \cos\left(b + \varphi - \frac{\pi}{4}\right) \times \right. \right. \\
 &\times \left. \left(J_0(2\sqrt{\psi b}) + \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) \right) - \right. \\
 &\left. \left. - k \sin\left(b + \varphi - \frac{\pi}{4}\right) \left(J_0(2\sqrt{\psi b}) + \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) \right) \right] db \right]
 \end{aligned}$$

Для нахождения искомой величины нам необходимо вычислить интегралы:

$$\int_{-\varphi}^0 \sin\left(b + \varphi - \frac{\pi}{4}\right) \left(J_0(2\sqrt{\psi b}) + \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) \right) db$$

$$\int_{-\varphi}^0 \cos\left(b + \varphi - \frac{\pi}{4}\right) \left(J_0(2\sqrt{\psi b}) + \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) \right) db$$

$$\int_{-\varphi}^0 b \sin\left(b + \varphi - \frac{\pi}{4}\right) \left(J_0(2\sqrt{\psi b}) + \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) \right) db$$

Поменяем местами пределы интегрирования и воспользуемся известными тригонометрическими формулами синуса и косинуса суммы углов. В итоге получим:

$$\int_{-\varphi}^0 \sin\left(b + \varphi - \frac{\pi}{4}\right) \left(J_0(2\sqrt{\psi b}) + \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) \right) db =$$

$$-\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \left[\int_0^{-\varphi} \cos(b) J_0(2\sqrt{\psi b}) db + \int_0^{-\varphi} \cos(b) \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) db \right] -$$

$$-\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \left[\int_0^{-\varphi} \sin(b) J_0(2\sqrt{\psi b}) db + \int_0^{-\varphi} \sin(b) \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) db \right] =$$

$$= -\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) [I11 + I12] - \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) [I9 + I10]$$

$$\int_{-\varphi}^0 \cos\left(b + \varphi - \frac{\pi}{4}\right) \left(J_0(2\sqrt{\psi b}) + \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) \right) db =$$

$$-\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \left[\int_0^{-\varphi} \cos(b) J_0(2\sqrt{\psi b}) db + \int_0^{-\varphi} \cos(b) \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) db \right] +$$

$$+\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \left[\int_0^{-\varphi} \sin(b) J_0(2\sqrt{\psi b}) db + \int_0^{-\varphi} \sin(b) \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) db \right] =$$

$$= -\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) [I11 + I12] + \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) [I9 + I10]$$

$$\int_{-\varphi}^0 b \sin\left(b + \varphi - \frac{\pi}{4}\right) \left(J_0(2\sqrt{\psi b}) + \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) \right) db =$$

$$-\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \left[\int_0^{-\varphi} b \cos(b) J_0(2\sqrt{\psi b}) db + \int_0^{-\varphi} b \cos(b) \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) db \right] +$$

$$+\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \left[\int_0^{-\varphi} b \sin(b) J_0(2\sqrt{\psi b}) db + \int_0^{-\varphi} b \sin(b) \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) db \right] =$$

$$= -\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) [I7 + I8] + \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) [I5 + I6]$$

Легко заметить, что в данных формулах все интегралы аналогичны интегралам I5 — I12. Подставим ранее полученные значения данных интегралов (9) — (16) и после приведения подобных получим:

$$\int_{-\varphi}^0 \sin\left(b + \varphi - \frac{\pi}{4}\right) \left(J_0(2\sqrt{\psi b}) + \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) \right) db =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} J_0(2\sqrt{-\varphi\psi}) - \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} U_2(-2\varphi, 2\sqrt{-\varphi\psi})$$

$$\int_{-\varphi}^0 \cos\left(b + \varphi - \frac{\pi}{4}\right) \left(J_0(2\sqrt{\psi b}) + \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) \right) db =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} J_0(2\sqrt{-\varphi\psi}) - \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} U_1(-2\varphi, 2\sqrt{-\varphi\psi})$$

$$\int_{-\varphi}^0 b \sin\left(b + \varphi - \frac{\pi}{4}\right) \left(J_0(2\sqrt{\psi b}) + \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{b}} J_1(2\sqrt{\psi b}) \right) db =$$

$$= \sqrt{2} \psi U_3(-2\varphi, 2\sqrt{-\varphi\psi}) -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \left(J_0(2\sqrt{-\varphi\psi}) + U_1(-2\varphi, 2\sqrt{-\varphi\psi}) + U_2(-2\varphi, 2\sqrt{-\varphi\psi}) \right)$$

Подставим полученные формулы в выражение $\frac{P}{2kh} = \frac{P_x^{OE} + P_x^{EB}}{kh}$. После упрощения получим:

$$\frac{P}{2kh} = \left(\frac{H - h}{2\sqrt{2}kh \sin \gamma} \right) \times$$

$$\times \left[\sigma_o \left(\frac{1}{\sqrt{2}} J_0(2\sqrt{-\varphi\psi}) - \sqrt{2} U_1(-2\varphi, 2\sqrt{-\varphi\psi}) \right) + \right.$$

$$+2kU_1(-2\varphi, 2\sqrt{-\varphi\psi}) \left(\sqrt{2\varphi} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - 2\sqrt{2}\psi U_3(-2\varphi, 2\sqrt{-\varphi\psi}) + \frac{k}{\sqrt{2}} J_0(2\sqrt{-\varphi\psi}) \quad (28)$$

Построим график зависимости между средним напряжением волочения и относительным уменьшением толщины для различных значений угла раствора матрицы.

Легко заметить, что (рис. 8) идентичен представленному в [1].

Обсуждение результатов. В ходе данной работы были вычислены интегралы, содержащие функции Бесселя, тригонометрические и степенные функции, в виде комбинаций функций Ломмеля от двух переменных (4)–(16). Были получены аналитические формулы для скоростей в четырехугольнике *OCDE* по решению задачи Гурса (21), уравнения линий скольжения с дуг окружностей в параметрическом виде (17), неявная зависимость для скоростей на линии непротекания $u = v$ (22), формулы для определения угла раскрытия веера φ (угол *DAC*) двух типов: из соотношений для скоростей (23) и для координат (26). В программе Maple были построены линии

скольжения используя формулы (17), которые получились аналогичны представленным в [1], [2], [3]. Была получена аналитическая зависимость для среднего напряжения σ в точке *O* из граничных условий вдоль α —линии *ODA* (27) (выполнение граничных условий в интегральном смысле). Была получена аналитическая формула для силы волочения (28) и построен график зависимости силы волочения от степени сужения раствора матрицы. Сравнение с численными расчетами представленными в [1] показывают хорошую сходимость численных методов даже при небольшом числе точек разбиения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хилл, Р. Математическая теория пластичности / Р. Хилл. — М. : Наука, 1956. — 408 с.
2. Качанов, Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. — М. : Наука, 1969. — 420 с.
3. Соколовский, В. В. Теория пластичности / В. В. Соколовский. — М. : Высшая школа, 1969. — 608 с.
4. Ивлев, Д. Д. Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. — М. : Наука, 1966. — 136 с.
5. Соболев, С. Л. Уравнения математической физики / С. Л. Соболев. — М. : Наука, 1966. — 444 с.

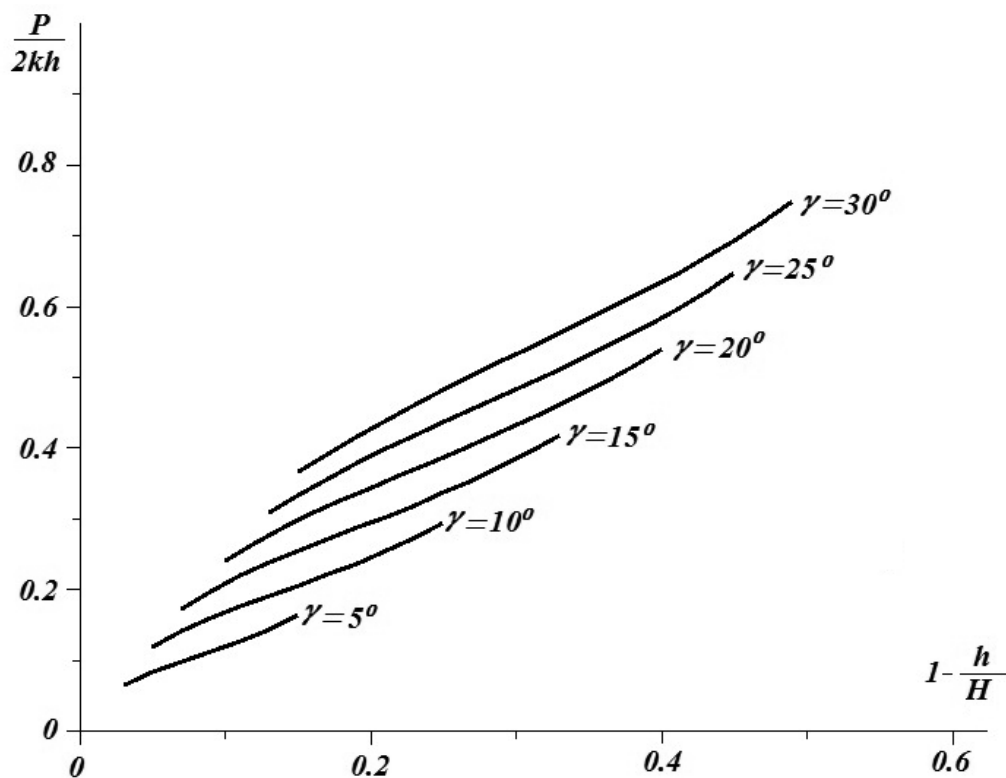


Рис. 8. График зависимости между средним напряжением волочения и относительным уменьшением толщины для различных значений угла раствора матрицы

6. Прудников, А. П. Интегралы и ряды. Специальные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. — М. : Наука, 1993.

7. Ватсон, Г. Н. Теория Бесселевых функций. Часть первая. / Г. Н. Ватсон. — М. : Издательство иностранной литературы, 1949. — 798 с.

Зиновьев И. Н., студент магистратуры 1-го курса кафедры теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет

E-mail: bekiz@email.ru

Чеботарев А. С., доцент кафедры теоретической и прикладной механики факультета ПММ, кандидат физико-математических наук, Воронежский государственный университет

Тел.: 2-208-763

E-mail: xeba@amm.vsu.ru

8. Быковцев, Г. И. К теории волочения жесткопластической полосы через криволинейные матрицы / Г. И. Быковцев, Ю. М. Мяснянкин. — Изв. АН СССР. ОТН. Мех. и машиностр., 1964, № 3. — С. 113—116.

Zinovjev I. N., Graduate student 1st course, Department of Theoretical and Applied Mechanics, Voronezh State University

E-mail: bekiz@email.ru

Chebotarev A. S., Associate professor of faculty of applied mathematics information technologies and mechanics, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Voronezh State University

Tel: (473)220-87-63

E-mail: xeba@amm.vsu.ru