УДК 517.958

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ НЕНЬЮТОНОВОЙ ЖИДКОСТИ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ*

А. В. Звягин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 22 августа 2012 г.

Аннотация: в статье исследуется разрешимость в слабом смысле краевой задачи для системы уравнений, описывающей стационарное движение слабых водных растворов полимеров в неограниченной области с объективной производной в реологическом соотношении.
Ключевые слова: слабо концентрированные водные растворы полимеров, слабые решения, аппроксимационная задача, теорема существования.

Abstract: this paper establishes the solvability in weak sense for a model describing the stationary motion of weak aqueous polymer solutions in the unboundary domain with the objective derivative in the rheological relation.
Key words: weak aqueous polymer solutions, the solvability in weak sense, approximative problem, the existence theorem.

1. ВВЕДЕНИЕ.

Движение однородной несжимаемой жидкости с постоянной плотностью, в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n = 2,3,$ на отрезке времени $[0,T], T > 0,$ определяется системой дифференциальных уравнений в форме Коши (см., например, [1]). Формально эта система описывает течение всех видов жидкостей. Однако, число неизвестных этой системы больше числа уравнений. Для корректной постановки эту систему дополняют реологическим соотношением, которое обычно связывает между собой σ — девиатор тензора напряжения и тензор скоростей деформации $\mathcal{E}(v) = \left(\mathcal{E}_{ij}(v)\right)_{j=1,\dots,n}^{i=1,\dots,n},\ \mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$. Один из способов определения реологического соотношения — это метод механических моделей. Рассматриваемую среду моделируют с помощью пробирок, пружинок и т.д. и производят необходимые вычисления. Такой подход для вывода реологических соотношений использовался еще Кельвиным (см., например, [2]). Разумеется разные среды имеют разные механические модели и в результате расчетов получаются различные соотношения.

Для вязкоупругих жидкостей типа Фойгта хорошо известно соотношение

$$\sigma = 2\nu\mathcal{E} + 2\varkappa\dot{\mathcal{E}}, \tag{1.1}$$

где $\nu > 0$ — вязкость жидкости, $\varkappa > 0$ — время ретардации (запаздывания), а $\dot{\mathcal{E}}$ — производная по времени тензора скоростей деформации. Однако метод механических моделей не указывает какую производную (частную, полную или какую-то специальную) надо брать в реальных процессах, где наряду со временем участвуют и точки области.

Математические исследования начались с рассмотрением в (1) частной производной. Соответствующая модель получила название модель Фойгта. Затем А. П. Осколковым был рассмотрен случай некоторого упрощения полной производной [3], который моделировал движение слабо концентрированных водных растворов полимеров [4]. Но позднее О. А. Ладыженская обнаружила ошибки [5] и в последующем в [6] и [7] было дано полное доказательство существования слабых решений модели с полной производной. Для этой модели с полной производной в реологическом соотношении в работах [8], [9] для стационарного случая было доказано существование слабых решений.

В последние годы под влиянием идей рациональной механики [10] стали интересоваться

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-31188)

© Звягин А. В., 2012

такими реологическими соотношениями, которые не зависят от наблюдателя, т.е. не меняются при галилеевой замене переменных. Это оказалось связанным с использованием объективной производной. Иными словами, меняется ли исходная тензорная функция при изменении системы отсчета по закону:

$$t^* = t + a \tag{1.2}$$

$$x^* = x_0^*(t) + Q(t)(t - t_0), \tag{1.3}$$

где a — некоторое значение времени, x_0 — некоторая точка в пространстве, x_0^* — некоторая функция времени со значениями в точках пространства, а Q — некоторая функция времени со значениями в множестве ортогональных тензоров. Оказалось, что в случае частной и полной производных реологические соотношения, вычисленные в разных системах отсчета, меняются. Необходимую связь обеспечивает объективная производная.

Определение 1.1. Пусть $T(t,x)$ — произвольная тензорнозначная функция, не зависящая от наблюдателя. Оператор вида

$$\frac{DT(t,x)}{Dt} = \frac{dT(t,x)}{dt} + G\left(\nabla v(t,x), T(t,x)\right),$$

где G — некоторая матричнозначная функция двух матричных аргументов, называется объективной производной, если при любом изменении системы отсчета (1.2)—(1.3) выполнено равенство

$$\frac{D^*T^*(t,x)}{Dt^*} = Q(t)\frac{DT(t,x)}{Dt}Q(t)^T$$

для всех возможных функций T.

Одним из примеров объективной производной является сглаженная производная Яуманна [11]:

$$\frac{DT(t,x)}{Dt} = \frac{dT(t,x)}{dt} + T(t,x)W_\rho(t,x) - \\ -W_\rho(t,x)T(t,x),$$

$$W_\rho(v)(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(x-y)W(t,y)\,dy,$$

где $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкая функция с компактным носителем такая, что $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(y)\,dy = 1$ и $\rho(x) = \rho(y)$ для x и y с одинаковыми евклидовыми нормами; $W(v) = \left(W_{ij}(v)\right)_{j=1,\dots,n}^{i=1,\dots,n}$, $W_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$ — тензор завихренности.

Подставляя реологическое соотношение (1.1) со сглаженной производной Яуманна в систему уравнений движения несжимаемой жидкости в форме Коши и рассматривая стационарный случай, получим следующую систему уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu\Delta v - 2\varkappa \mathrm{Div}\left(v_k \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_k}\right) - \\ -2\varkappa \mathrm{Div}\left(\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\right) + \mathrm{grad} p = f, \tag{1.4}$$

$$\mathrm{div} v = 0, \quad x \in \Omega; \tag{1.5}$$

$$v\,|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.6}$$

где v — вектор-функция скоростей в точке области Ω пространства $\mathbb{R}^n, n = 2,3,$ p — функция давления, f — плотность внешних сил.

В работе исследуется слабая разрешимость краевой задачи (1.4)—(1.6) для системы уравнений, описывающей движение слабых водных растворов полимеров в неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n = 2,3,$ с объективной производной в реологическом соотношении.

2. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Пусть Ω — неограниченная область евклидова пространства $\mathbb{R}^n, n = 2,3$. Через $\mathfrak{D}(\Omega)^n$ будем обозначать пространство функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^n$ класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в Ω; $\mathcal{V}(\Omega) = \{v : v \in \mathfrak{D}(\Omega)^n, \mathrm{div} v = 0\}$ — подмножество соленоидальных функций пространства $\mathfrak{D}(\Omega)^n$; $V(\Omega)$ — замыкание $\mathcal{V}(\Omega)$ по норме пространства $W_2^1(\Omega)^n$; $X(\Omega)$ — замыкание $\mathcal{V}(\Omega)$ по норме пространства $W_2^3(\Omega)^n$.

Обозначим через Ω_m пересечение Ω с шаром B_m с центром в нуле радиуса $m = 1,2,3,...$ в пространстве $R^n, n = 2,3$. Аналогично случаю с ограниченной областью введем новые обозначения:

Через $L_p(\Omega_m)^n, 1 \leqslant p < \infty$, будем обозначать множество всех измеримых функций $v : \Omega_m \to \mathbb{R}^n$, суммируемых с p-той степенью; $\mathfrak{D}(\Omega_m)^n$ — пространство функций на Ω_m со значениями в $\mathbb{R}^n$ класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в Ω_m; $\mathcal{V}(\Omega_m) = \{v : v \in \mathfrak{D}(\Omega_m)^n, \mathrm{div} v = 0\}$ — подмножество соленоидальных функций пространства $\mathfrak{D}(\Omega_m)^n$;; $X(\Omega_m)$ — замыкание $\mathcal{V}(\Omega_m)$ по норме пространства $W_2^3(\Omega_m)^n$. Аналогично введем обозначения $V(B_k)$ и $L_4(B_k)$, где B_k — шар с центром в нуле и радиусом k.

Определение 2.1. Пусть $f \in V^*$. Слабым решением краевой задачи (1.4)—(1.6) называется функция $v \in V$, удовлетворяющая для любого $\varphi \in \mathcal{V}$ равенству:

$$-\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \nu \int_\Omega \nabla v : \nabla \varphi \, dx - -\varkappa \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx - -\varkappa \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx + +2\varkappa \int_\Omega \Big(\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v) \mathcal{E}(v) \Big) : \nabla \varphi \, dx = \langle f, \varphi \rangle \quad (2.1)$$

Основным результатом работы является следующая теорема:

Теорема 2.1. Пусть Ω — неограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $n = 2,3$. Тогда для любого $f \in V^*$ краевая задача (1.4)—(1.6) имеет хотя бы одно слабое решение $v_* \in V$.

3. АППРОКСИМАЦИОННАЯ ЗАДАЧА

Добавим в уравнение (1.4) слагаемое $-\varepsilon \Delta^3 v, \varepsilon > 0$. Полученные уравнения называют $\varepsilon-$аппроксимациями уравнения (1.4). Увеличение порядка уравнения приводит к необходимости введения дополнительных граничных условий. Поэтому рассматривается следующая краевая задача с малым параметром, которую будем называть $\varepsilon-$аппроксимацией исходной задачи (1.4)—(1.6):

$$-\varepsilon \Delta^3 v - \nu \Delta v + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - 2\varkappa \mathrm{Div}\left(v_k \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_k} \right) - -2\varkappa \mathrm{Div}\Big(\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v) \mathcal{E}(v) \Big) + \mathrm{grad} p = f; \quad (3.1)$$

$$\mathrm{div} v = 0, \quad x \in \Omega; \quad (3.2)$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial n^2}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.3)$$

Здесь ε — некоторое фиксированное положительное число; n — внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Предполагается, что $f \in V^*$.

Определение 3.1. Слабым решением краевой задачи (3.1)—(3.3) называется функция $v \in X$, удовлетворяющая для любого $\varphi \in \mathcal{V}$ равенству:

$$\varepsilon \int_\Omega \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta \varphi) dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + +\nu \int_\Omega \nabla v : \nabla \varphi \, dx - \varkappa \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx - -\varkappa \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx + +2\varkappa \int_\Omega \Big(\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v) \mathcal{E}(v) \Big) : \nabla \varphi \, dx = \langle f, \varphi \rangle \quad (3.4)$$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1

Для доказательства данной теоремы воспользуемся следующими результатами для рассматриваемой стационарной модели, полученными в работе [9], в случае ограниченности области $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n = 2,3$.

Теорема 4.1. Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $n = 2,3$. Тогда для любого $f \in V^*$ краевая задача (1.4)—(1.6) имеет хотя бы одно слабое решение $v_* \in V$.

Теорема 4.2. Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $n = 2,3$. Если $v \in X$ — решение уравнения (2.1), то для него имеет место следующая оценки:

$$\varepsilon \|v\|_X^2 \leqslant C_1, \text{ где } C_1 = \frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\nu}, \quad (4.1)$$

$$\nu \|v\|_V^2 \leqslant C_2, \text{ где } C_2 = \frac{\|f\|_{V^*}^2}{\nu}. \quad (4.2)$$

Лемма 4.1. Для любой функции $v \in V$ выполнены следующие оценки:

$$\|\mathcal{E}(v)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \le C_3 \|v\|_V; \quad \|W_\rho(v)\|_{L_2(\Omega)^{n^2}} \le C_4 \|v\|_{L_2(\Omega)^{n^2}}.$$

Следуя [13], с. 117, можно рассмотреть сужение f на $\Omega_m : f|_{\Omega_m} \in V^*(\Omega_m)$, которое задается формулой: $\langle f|_{\Omega_m}, \varphi \rangle = \langle f, \tilde{\varphi} \rangle$, где φ — произвольная функция из $\mathcal{V}(\Omega_m)$, а $\tilde{\varphi}$ — продолжение φ нулем на все Ω. Очевидно, $\|f|_{\Omega_m}\|_{V^*(\Omega_m)} \le \|f\|_{V^*(\Omega)}$.

На каждой области Ω_m рассмотрим задачу (3.4). Заменим в (3.4) f на $f|_{\Omega_m}$ и пусть $\varepsilon = \dfrac{1}{m}$. По теореме 4.1 эти задачи имеют хотя бы одно решение v_m. Обозначим через $\tilde{v}_m$ продолжение v_m нулем на все Ω (последнее выполнено в силу существования граничных условий (3.3)). По теореме 4.2 нормы $\|\tilde{v}_m\|_{V(\Omega)} = \|v_m\|_{V(\Omega_m)}$ равномерно ограничены. Поэтому при $m \to \infty$ без ограничения общности можно считать, что $\tilde{v}_m \rightharpoonup \tilde{v}_0$ слабо в V. Покажем, что $\tilde{v}_0$ есть решение задачи (2.1).

Возьмем произвольное $\varphi \in \mathcal{V}$. При некотором k носитель φ лежит в Ω_k. Обозначим через v_m^* продолжение $\tilde{v}_m$ нулем за пределы Ω, суженное на B_k. Ясно, что $v_m^* \to v_0^*$ слабо в $V(B_k)$, и значит, сильно в $L_4(B_k)$.

Поэтому в силу существования сходимости в пространствах $V(B_k)$ и $L_4(B_k)$, а также в силу леммы 4.1, все слагаемые (3.4) с $\varepsilon = \dfrac{1}{m}, v = \tilde{v}_m$:

$$\frac{1}{m}\int_\Omega \nabla(\Delta(\tilde{v}_m)) : \nabla\left(\Delta\varphi\right) dx -$$
$$-\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\tilde{v}_m)_i (\tilde{v}_m)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \nu \int_\Omega \nabla \tilde{v}_m : \nabla \varphi \, dx -$$
$$-\varkappa \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (\tilde{v}_m)_k \frac{\partial (\tilde{v}_m)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx -$$
$$-\varkappa \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (\tilde{v}_m)_k \frac{\partial (\tilde{v}_m)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx +$$
$$+2\varkappa \int_\Omega \left(\mathcal{E}(\tilde{v}_m) W_\rho(\tilde{v}_m) - W_\rho(\tilde{v}_m)\mathcal{E}(\tilde{v}_m)\right) : \nabla \varphi \, dx =$$
$$= \left\langle f, \varphi \right\rangle$$

сходятся к соответствующим слагаемым (2.1):

$$-\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\tilde{v}_0)_i (\tilde{v}_0)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \nu \int_\Omega \nabla \tilde{v}_0 : \nabla \varphi \, dx -$$
$$-\varkappa \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (\tilde{v}_0)_k \frac{\partial (\tilde{v}_0)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx -$$
$$-\varkappa \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (\tilde{v}_0)_k \frac{\partial (\tilde{v}_0)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx +$$
$$+2\varkappa \int_\Omega \left(\mathcal{E}(\tilde{v}_0) W_\rho(\tilde{v}_0) - W_\rho(\tilde{v}_0)\mathcal{E}(\tilde{v}_0)\right) : \nabla \varphi \, dx =$$
$$= \left\langle f, \varphi \right\rangle,$$

причем, без ограничения общности, в силу оценки (4.1) теоремы 4.2 получаем:

$$\frac{1}{m}\int_\Omega \nabla(\Delta(\tilde{v}_m)) : \nabla(\Delta\varphi)\, dx \to 0 \quad \text{при } m \to \infty.$$

Итак, $\tilde{v}_0$ удовлетворяет тождеству (2.1) при всех $\varphi \in \mathcal{V}$. Значит $\tilde{v}_0$ является слабым решением задачи (1.4)—(1.6).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольдштейн Р. В.* Механика сплошных сред. Часть I. / Р. В. Гольдштейн, В. А. Городцов. Наука. Физматлит, 2000. 256 с.

2. *Рейнер М.* Реология / М. Рейнер. М.: Физматгиз, 1965. 224 с.

3. *Осколков А. П.* О некоторых квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей / А. П. Осколков // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1975. Т. 52. С. 128—157.

4. *Павловский В. А.* К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров / В. А. Павловский // ДАН СССР, 1971. Т. 200, № 4. С. 809—812.

5. *Ладыженская О. А.* О погрешностях в двух моих публикациях по уравнениям Навье—Стокса и их исправлениях / О. А. Ладыженская // Записки научных семинаров ПОМИ. 2000. Т. 271. С. 151—155.

6. *Звягин В. Г.* Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина—Фойгта / В. Г. Звягин, М. В. Турбин // Современная математика. Фундаментальные направления. 2009. Т. 31. С. 3—144.

7. *Звягин В. Г.* Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред / В. Г. Звягин, М. В. Турбин. М.: КРАСАНД (URSS), 2012. 416 с.

8. *Звягин А. В.* О разрешимости стационарной модели движения слабых водных растворов полимеров / А. В. Звягин // Известия вузов. Математика. 2011. № 2. С. 103—105.

9. *Звягин А. В.* Исследование разрешимости стационарной модели движения слабых водных растворов полимеров / А. В. Звягин // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2011. № 1. С. 147—156.

10. *Труcделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред / К. Трусделл. М.: Мир, 1975. 592 с.

11. *Zvyagin V. G.* Approximating-topological methods in some problems of hydrodinamics / V. G. Zvyagin, D. A. Vorotnikov // Journal of Fixed Point Theory and Applications. 2008. V. 3, № 1. P. 23—49.

12. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О. А. Ладыженская. М.: ГИФМЛ, 1961. 204 с.

Звягин А. В., младший научный сотрудник НИИМ Воронежского государственного университета

E-mail: zvyagin.a@mail.ru

Тел.: 8-915-587-75-88

Zvyagin A. V., junior researcher of the Research Institute of Mathematics of Voronezh State University

E-mail: zvyagin.a@mail.ru

Tel.: 8-915-587-75-88