УДК 517.9

ОПЕРАТОР КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА НА СИСТЕМЕ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ ОКРУЖНОСТЕЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ К ОДНОМУ КЛАССУ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ДИСКРЕТНЫХ СВЕРТКАХ

В. Б. Дыбин, Е. В. Бурцева

Южный федеральный университет

Поступила в редакцию 26 апреля 2012 г.

Аннотация: на основе матричного операторного исчисления порядка 2n построена теория односторонней обратимости оператора R краевой задачи Римана в пространстве Лебега на составном контуре, который является объединением 2n концентрических окружностей, указаны конструкции обратных операторов и описаны подпространства $KerR$ и ImR. В качестве приложения рассмотрена система дискретных уравнений типа свертки в пространстве последовательностей, суммируемых с показательными весами, порождаемая оператором R. Для этой системы построена теория односторонней обратимости, найдены обратные операторы, описаны дефектные подпространства.
Ключевые слова: оператор краевой задачи Римана, символ, факторизация, обратные операторы, дискретные свертки, дефектные подпространства, теория обратимости.

Abstract: the theory of the one-sided invertibility of the Riemann operator R based on matrix operator calculus is constructed in Lebesgue space on composite contour which is combination of 2n concentric circumferences. The constructions of inverse operators are given, subspaces $Ker\ R$ and $Im\ R$ are described. In the capacity of application the R-operator-generated system of discrete equations of convolution type in the space of the sequences those are summed with the exponential weights is considered. For this system the theory of the one-sided invertibility is constructed, the inverse operators and deficient subspaces are described.
Key words: operator of the Riemann boundary value problem, symbol, inverse operators, factorization, discrete convolutions, theory of invertibility, deficient subspaces.

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой работе излагается новый метод исследования сингулярных интегральных уравнений на составном контуре, состоящем из конечного числа концентрических окружностей на комплексной плоскости с центром в начале координат, альтернативный хорошо известным методам: Н. И. Мусхелишвили [1], Ф. Д. Гахов [2], И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник [3], Б. В. Хведелидзе [4] и др. Его особенностью является то, что для сингулярного интегрального оператора на контуре Γ (для простоты мы рассматриваем оператор $R(a) = P_\Gamma^+ + aP_\Gamma^-$) предлагается матричное операторное исчисление, которое позволяет построить теорию односторонней обратимости оператора $R(a)$ в пространствах Лебега, по форме совпадающую с классической теорией односторонней обратимости этого оператора для случая одного замкнутого контура.

Особенностью настоящего метода является то, что операторное исчисление опирается только на классическую факторизацию М. Г. Крейна в винеровской алгебре на единичной окружности [5].

Экзистенциально близкие идеи встречаются в ряде работ, выполненных в прошлом веке (см., например, [6], [1, Гл. II], [3, Гл. III]). Но реализация предлагаемого метода связана с необходимостью исследования новых классов систем дискретных уравнений типа свертки в пространствах последовательностей, суммируемых с показательными весами [7], и поэтому потребовала принципиальной доработки.

В последней части работы в качестве приложения этого метода построена теория односторонней обратимости одного нового класса систем дискретных уравнений типа свертки в пространстве последовательностей, суммируемых с показательными весами.

Результаты этой работы доложены на заседании международного научного семинара «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения», Ростов-на-Дону, 2011, [8], а ее частный случай опубликован нами в [9]. Краткое изложение этих результатов содержится в [10].

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Составной контур $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{2n} \Gamma_j$ является системой концентрических окружностей Γ_j радиуса r_j, $0 < r_1 < r_2 < ... < r_{2n} < \infty$, лежащих в комплексной плоскости с центром в начале координат. Окружности Γ_j с нечетными номерами ориентированы по часовой стрелке, а с четными номерами — против часовой стрелки. Указанная ориентация разбивает комплексную плоскость на две области D^+ и D^-, где D^+ лежит слева от Γ и является объединением n колец

$$D^+ = \bigcup_{i=1}^{n} K_i^+,\ K_i^+ = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid r_{2i-1} < \mid z \mid < r_{2i} \right\},$$
$$\text{а } D^- = \mathbb{C} \setminus \overline{D^+}.$$

Пусть $1 < p < \infty$, $L_p(\Gamma) = L_p(\Gamma_1) \times L_p(\Gamma_2) \times \times ... \times L_p(\Gamma_{2n})$. Если $t_j \in \Gamma_j, j \in \overline{1,2n}$, $t = (t_1, t_2, ..., t_{2n}) \in \Gamma$, то $f(t) \in L_p(\Gamma)$ означает, что

$$f(t) = \left(f_1(t_1), ..., f_{2n}(t_{2n}) \right)^\tau, \text{ где } f_j(t_j) \in L_p(\Gamma_j).$$

Введение в $L_p(\Gamma)$ нормы

$$\|f\|_{L_p(\Gamma)} = \|f_1\|_{L_p(\Gamma_1)} + \|f_2\|_{L_p(\Gamma_2)} + ... + \|f_{2n}\|_{L_p(\Gamma_{2n})}$$

превращает его в банахово пространство.

Сингулярный интегральный оператор Коши—Лебега S_j на Γ_j задаётся формулой

$$S_j f_j(t_j) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{f_j(\tau_j)}{\tau_j - t_j} d\tau_j,\ j = 1, 2, ..., 2n. \quad (1)$$

Через $\chi_j, j \in \overline{1,2n}$ обозначим характеристические функции окружностей Γ_j на контуре Γ. Тогда оператор S_Γ на пространстве $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$ определяется формулой

$$S_\Gamma f = \begin{pmatrix} \chi_1 S_1 f_1 + \chi_1 S_2 f_2 + ... + \chi_1 S_{2n} f_{2n} \\ \chi_2 S_1 f_1 + \chi_2 S_2 f_2 + ... + \chi_2 S_{2n} f_{2n} \\ ... \\ \chi_{2n} S_1 f_1 + \chi_{2n} S_2 f_2 + ... + \chi_{2n} S_{2n} f_{2n} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

На пространстве $L_p(\Gamma), 1 < p < \infty$ справедливо равенство $S_\Gamma^2 = I$ [3, гл. I, § 3]. Поэтому оператор I и аналитические проекторы $P_\Gamma^\pm$ имеют следующие матричные представления:

$$I = (I_{ij})_{i,j=1}^{2n}, \text{ где } I_{ij} = \delta_{ij} I_i,$$

$$P_\Gamma^\pm = \frac{1}{2}(I \pm S_\Gamma) = (P_{ij}^\pm)_{i,j=1}^{2n}, \text{ где } P_{ii}^\pm = \chi_i P_i^\pm,$$
$$P_{ij}^\pm = (\pm 1/2) \chi_i S_j,\ i \neq j, \quad (3)$$

$P_j^\pm = 1/2 \left(I_j \pm S_j \right)$ — стандартные аналитические проекторы, δ_{ij} — символ Кронекера.

Пусть $W(\Gamma_j)$, $j \in \overline{1,2n}$ — аналог алгебры Винера на окружности Γ_j, $W(\Gamma) = W(\Gamma_1) \times W(\Gamma_2) \times ... \times W(\Gamma_{2n})$ — алгебра с поэлементными сложением и умножением векторов, $a(t) = \left(a_1(t_1), a_2(t_2), ..., a_{2n}(t_{2n}) \right)^\tau \in W(\Gamma)$. Введением нормы $\|a\| = \|a_1\|_{W(\Gamma_1)} + \|a_2\|_{W(\Gamma_2)} + + ... + \|a_{2n}\|_{W(\Gamma_{2n})}$, $\|a_j\|_{W(\Gamma_j)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} r_j^{-k} \left| a_{jk} \right|$ превращаем $W(\Gamma)$ в коммутативную банахову алгебру с единицей $E = (1, 1, ..., 1)^\tau$. Через $GW(\Gamma)$ обозначим группу обратимых элементов в алгебре $W(\Gamma)$, $GW(\Gamma) = GW(\Gamma_1) \times GW(\Gamma_2) \times ... \times GW(\Gamma_{2n})$. Подалгебры $W^\pm(\Gamma)$ вводим следующим образом:

$$W^+(\Gamma) = P_\Gamma^+ W(\Gamma),$$
$$W^-(\Gamma) = (\mathbb{O} \times \mathbb{O} \times ... \times \mathbb{O} \times \mathbb{C}) + P_\Gamma^- W(\Gamma),$$

где $(\mathbb{O} \times ... \times \mathbb{O} \times \mathbb{C})$ — одномерное подпространство векторного пространства $\mathbb{C}^{2n}$.

Подалгебра $W^+(\Gamma)$ состоит из 2n-мерных векторов следующего вида:

$$a^+ \in W^+(\Gamma),\ a^+ = \left(a_i^+ \right)_{i=1}^{2n}, \text{ где } a_i^+(t_i) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{ik} t_i^k,$$

при этом $a_i^+(t_i) = a_{i+1}^+(t_i)$, $i = 1, 3, ..., 2n-1$.

Подалгебра $W^-(\Gamma)$ состоит из 2n-мерных векторов следующего вида:

$$a^- \in W^-(\Gamma),\ a^- = \left(a_i^- \right)_{i=1}^{2n}, \text{ где}$$

$$a_1^-(t_1) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{1k} t_1^k,\ a_{2n}^-(t_{2n}) = \sum_{k=-\infty}^{0} a_{2n,k} t_{2n}^k,$$

$$a_i^-(t_i) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{ik} t_i^k,\ i = 2, 3, ..., 2n-1,$$

при этом $a_i^-(t_i) = a_{i+1}^-(t_i)$, $i = 2, 4, ..., 2n-2$.

Пусть $a^\pm(t) \in W^\pm(\Gamma)$, $f(t) \in L_p(\Gamma)$, тогда [3, Гл. I, § 4] справедливы стандартные формулы:

$$P_\Gamma^\pm \left(a^\pm I \right) P_\Gamma^\pm f = \left(a^\pm I \right) P_\Gamma^\pm f, \quad (4)$$

$$P_\Gamma^\pm \left(a^\mp I \right) P_\Gamma^\mp f = 0. \quad (5)$$

Ниже изучается оператор

$$R(a) = P_\Gamma^+ + aP_\Gamma^- = P_\Gamma^+ + (aI)P_\Gamma^-, \qquad (6)$$

где

$$aI = \left(A_{ij}\right)_{i,j=1}^{2n}, \; A_{ij} = \delta_{ij} a_i I_i,$$

а вектор-функция $a \in W(\Gamma)$ и называется символом оператора $R(a)$.

Таким образом, матричное представление оператора $R(a)$ имеет вид

$$R(a) = (R_{ij})_{i,j=1}^{2n}, \text{ где } R_{ij} = \begin{cases} \chi_i(P_i^+ + a_i P_i^-), \\ \text{если } i = j, \\ (1/2)\, \chi_i(1-a_i)S_j, \\ \text{если } i \neq j. \end{cases} \qquad (7)$$

3. ФАКТОРИЗАЦИЯ

Пусть $a(t) = \left(a_1(t_1), a_2(t_2), ..., a_{2n}(t_{2n})\right)^\tau \in GW(\Gamma)$. Тогда функции $a_j(t_j)$ допускают факторизацию [5] в алгебрах $W(\Gamma_j), j = 1,2,..,2n$:

$$a_j(t_j) = b_j^+(t_j) \cdot t_j^{-\aleph_j} \cdot b_j^-(t_j), \qquad (8)$$

$$b_j^+(t_j) = \sum_{k=-\infty}^{0} b_{jk}^+ t_j^k, \; b_j^-(t_j) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{jk}^- t_j^k, \; j = 1,3,...,2n-1,$$

$$a_j(t_j) = b_j^+(t_j) \cdot t_j^{\aleph_j} \cdot b_j^-(t_j), \qquad (9)$$

$$b_j^+(t_j) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{jk}^+ t_j^k, \; b_j^-(t_j) = \sum_{k=-\infty}^{0} b_{jk}^- t_j^k, \; j = 2,4,...,2n.$$

В областях K_i^+ зафиксируем точки $z = z_i$, $i = 1,...,n$ и введем обозначения:

$$\aleph = \underset{\Gamma}{ind}\, a(t) = \sum_{i=1}^{2n} \aleph_i = \sum_{i=1}^{2n} \underset{\Gamma_i}{ind}\, a_i(t_i) = \\ = \underset{\Gamma}{ind} \prod_{i=1}^{n} (t - z_i)^{\aleph_{2i-1}+\aleph_{2i}}, \qquad (10)$$

$$a_0(t) = \frac{\prod_{i=1}^{n} (t-z_i)^{\aleph_{2i-1}+\aleph_{2i}}}{t^\aleph} = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - z_i t^{-1}\right)^{\aleph_{2i-1}+\aleph_{2i}}. \qquad (11)$$

Определение. *Будем говорить, что функция $a(t)$ допускает факторизацию в алгебре $W(\Gamma)$ и писать $a(t) \in fakt\, W(\Gamma)$, если эта функция допускает представление*

$$a(t) = a^+(t) \cdot a_0(t) \cdot a^-(t), \qquad (12)$$

где $a^\pm(t) \in GW^\pm(\Gamma), a_0(t)$ имеет вид (11), $\aleph \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что функция $a_0(t)$ является стационарной на контуре Γ, то есть $a_0(t)\,|_{\Gamma_i} = a_0(t_i)$, $i \in \overline{1,2n}$, и $a_0(t) \in W^-(\Gamma)$, если $\aleph \leq 0$, и $(1/a_0)(t) \in W^-(\Gamma)$, если $\aleph \geq 0$.

Теорема 1. *Пусть $a(t) \in GW(\Gamma)$, тогда $a(t) \in faktW(\Gamma)$, то есть выполняется равенство* (12), *где $a_0(t)$ имеет вид* (11), (10), *а*

$$a^+(t) = \left(a_j^+(t_j)\right)_{j=1}^{2n}, \; a^-(t) = \left(a_j^-(t_j)\right)_{j=1}^{2n},$$

где

$$a_j^+(t_j) = \prod_{k=1}^{(j+1)/2} b_{2k-1}^+(t_j)\left[b_{2k-2}^-(t_j)\right]^{-1} \cdot t_j^{\aleph - \sum_{k=1}^{j} \aleph_k} \cdot \\ \cdot \prod_{k=(j+1)/2}^{n} b_{2k}^+(t_j)\left[b_{2k+1}^-(t_j)\right]^{-1} = \\ = a_{j+1}^+(t_j),\; b_0(t_j) = b_{2n+1}(t_j) = 1,\; j = 1,3,...,2n-1, \qquad (13)$$

$$a_j^-(t_j) = \prod_{k=1}^{j/2} b_{2k}^-(t_j)\left[b_{2k-1}^+(t_j)\right]^{-1} \cdot \\ \cdot \prod_{k=(j+2)/2}^{n} b_{2k-1}^-(t_j)\left[b_{2k}^+(t_j)\right]^{-1} \cdot \\ \cdot t_j^{\sum_{k=1}^{j} \aleph_k} \cdot \prod_{k=1}^{n} (t_j - z_k)^{-\aleph_{2k-1}-\aleph_{2k}} = a_{j+1}^-(t_j), \\ j = 2,4,...,2n-2,$$

$$a_1^-(t_1) = \prod_{k=1}^{n} b_{2k-1}^-(t_1)\left[b_{2k}^+(t_1)\right]^{-1} \cdot \prod_{k=1}^{n} (t_1 - z_k)^{-\aleph_{2k-1}-\aleph_{2k}},$$

$$a_{2n}^-(t_{2n}) = \prod_{k=1}^{n} b_{2k}^-(t_{2n})\left[b_{2k-1}^+(t_{2n})\right]^{-1} \cdot t_{2n}^{\aleph} \cdot \\ \cdot \prod_{k=1}^{n} (t_{2n} - z_k)^{-\aleph_{2k-1}-\aleph_{2k}}. \qquad (14)$$

◄ Заметив сначала [9], что

$$a^\pm(t), 1/a^\pm(t) = \left(1/\left(a_j^\pm(t_j)\right)\right)_{j=1}^{2n} \in W^\pm(\Gamma),$$

и кроме того,

$$\underset{\Gamma}{ind}\left(a^+(t)a^-(t)\right) = \underset{\Gamma}{ind}\, a^+(t) + \underset{\Gamma}{ind}\, a^-(t) = 0,$$

элементарной проверкой убеждаемся в том, что $a_0(t)a^+(t)a^-(t) = a(t)$. ►

Введем обозначение

$$R(c,d) = cP_\Gamma^+ + dP_\Gamma^-,\; c,d \in W(\Gamma).$$

Следствие. *В условиях теоремы 1 справедливо равенство*

$$R(a) = (a^+I)R(a_0)R(1/a^+, a^-). \qquad (15)$$

Данное утверждение непосредственно вытекает из формул (4), (5).

Замечание 1. В дальнейшем нам понадобится более подробное описание действия проекторов $P_\Gamma^\pm$ на вектор-функцию $f(t)$. Пусть $p = 2$. Представим функции $f_j(t_j), j \in \overline{1,2n}$ рядами

$$f_j(t_j) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{jk} t_j^k,$$

сходящимися в пространстве $L_2(\Gamma_j)$ в среднеквадратичном. Рассмотрим сначала проекторы $P_\Gamma^\pm$,

$$\left(P_\Gamma^- f\right)(t) = \left(f_1^-(t_1), f_2^-(t_2), ..., f_{2n}^-(t_{2n})\right)^\tau,$$

где $f_1^-(t_1) = P_1^- \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{1k} t_1^k - \sum_{l=2}^{2n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_l} \frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{lk}\tau_l^k}{\tau_l - t_1} d\tau_l,$

$$f_{2n}^-(t_{2n}) = P_{2n}^+ \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{2n,k} t_{2n}^k - \sum_{l=1}^{2n-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_l} \frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{lk}\tau_l^k}{\tau_l - t_{2n}} d\tau_l,$$

$$f_j^-(t_j) = P_j^- \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{jk} t_j^k - \sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{2n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_l} \frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{lk}\tau_l^k}{\tau_l - t_j} d\tau_l,$$
$$j \in \overline{2, 2n-1}.$$

После элементарных вычислений каждая из трех функций принимает вид:

$$f_1^-(t_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{2n} (-1)^{l+1} f_{lk} t_1^k,$$

$$f_{2n}^-(t_{2n}) = \sum_{k=-\infty}^{-1} \sum_{l=1}^{2n} (-1)^l f_{lk} t_{2n}^k,$$

$$f_j^-(t_j) = \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{-1} \sum_{l=1}^{j} (-1)^l f_{lk} t_j^k + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=j+1}^{2n} (-1)^{l+1} f_{lk} t_j^k, \\ j = 2m, \\ \sum_{k=-\infty}^{-1} \sum_{l=1}^{j-1} (-1)^l f_{lk} t_j^k + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=j}^{2n} (-1)^{l+1} f_{lk} t_j^k, \\ j = 2m+1, m \in \overline{1, n-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_j^-(t_j) = f_{j+1}^-(t_j),\ j = 2, 4, ..., 2n-2.$$

Кроме того, $(P_\Gamma^+ f)(t) = f(t) - (P_\Gamma^- f)(t) =$

$$= \{f_j^+(t_j)\}_{j=1}^{2n}, \text{ где } f_j^+(t_j) = f_{j+1}^+(t_j) = \qquad (16)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-1} \sum_{l=1}^{j} (-1)^{l+1} f_{lk} t_j^k + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=j+1}^{2n} (-1)^l f_{lk} t_j^k,$$
$$j = 1, 3, ..., 2n-1.$$

4. ОБРАТИМОСТЬ

Теперь мы можем предъявить критерий односторонней обратимости оператора $R(a)$, конструкцию соответствующих обратных операторов и одновременно описать подпространства $Ker R(a)$ и $Im R(a)$.

Теорема 2. *Пусть $a(t) \in W(\Gamma)$, $\aleph = \underset{\Gamma}{ind}\ a(t)$. Для того, чтобы оператор $R(a)$ был односторонне обратимым* **Ф**- *оператором в пространстве $L_p(\Gamma), 1 < p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:*

$$a(t) \neq 0,\ t \in \underline{\Gamma,} \qquad (17)$$

т.е. $a_j(t_j) \neq 0$, $t_j \in \Gamma_j$, $j \in \overline{1, 2n}$. Если условие (17) выполнено, тогда: при $\aleph = 0$ оператор $R(a)$ обратим, при $\aleph > 0$ оператор $R(a)$ обратим справа, при $\aleph < 0$ оператор $R(a)$ обратим слева, а оператор $\left[R(a)\right]^{-1}$ соответствующего вида может быть представлен в форме

$$[R(a)]^{-1} = R(a^+, 1/a^-) R(1/a_0)((1/a^+)I), \quad (18)$$

где функции $a_0(t), a^\pm(t)$ определены формулами (11), (13), (14).

◄ Необходимость условия (17) получена в [3, Гл. III, Т. 7.1].

Пусть условие (17) выполняется. Тогда по теореме 1 символ $a(t)$ допускает факторизацию вида (12). Вследствие чего оператор $R(a)$ допускает представление (15), где операторы (a^+I) и $R(1/a^+, a^-)$ обратимы, $\left[R(1/a^+, a^-)\right]^{-1} = R(a^+, 1/a^-)$, $(a^+I)^{-1} = (1/a^+)I$, а оператор $R(a_0)$ обратим при $\aleph = 0$, обратим справа при $\aleph > 0$ и обратим слева при $\aleph < 0$.

Действительно, пусть $\aleph \geq 0$. Тогда $1/a_0(t) = t^{\aleph} \cdot \prod_{i=1}^{n} (t - z_i)^{-\aleph_{2i-1} - \aleph_{2i}} \in W^-(\Gamma)$, и в силу равенств (4), (5)

$$R(a_0)R(1/a_0) = \left(P_\Gamma^+ + a_0 P_\Gamma^-\right)\left(P_\Gamma^+ + (1/a_0)P_\Gamma^-\right) =$$
$$= P_\Gamma^+ + P_\Gamma^+(1/a_0)P_\Gamma^- + a_0 P_\Gamma^-(1/a_0)P_\Gamma^- = P_\Gamma^+ + P_\Gamma^- = I.$$

Пусть $\aleph \leq 0$. В этом случае $a_0(t) = t^{-\aleph} \cdot \prod_{i=1}^{n} (t - z_i)^{\aleph_{2i-1} + \aleph_{2i}} \in W^-(\Gamma)$. Поэтому

$$R(1/a_0)R(a_0) = \left(P_\Gamma^+ + (1/a_0)P_\Gamma^-\right)\left(P_\Gamma^+ + a_0 P_\Gamma^-\right) =$$
$$= P_\Gamma^+ + P_\Gamma^+ a_0 P_\Gamma^- + (1/a_0)P_\Gamma^- a_0 P_\Gamma^- = P_\Gamma^+ + P_\Gamma^- = I. ►$$

Теорема 3. *В условиях теоремы 2 при $\aleph > 0$ $dim\ Ker R(a) = \aleph$ и*

$$Ker R(a) =$$
$$= span\left(t^{-j}[a^+(t) - (a^-(t))^{-1}(a_0(t)^{-1})], j \in \overline{1, \aleph}\right). \quad (19)$$

При $\aleph < 0$ $dim\ CoKer R(a) = |\aleph|$, и для того, чтобы функция f принадлежала образу оператора $R(a)$ необходимо и достаточно выполнение следующих $|\aleph|$ условий ортогональности:

$$\int_\Gamma f(t) t^k \left(a^+(t)\right)^{-1} dt = 0,\ k \in \overline{\aleph, -1}. \qquad (20)$$

◄ Пусть $\aleph > 0$, покажем, что

$$\mathcal{L} = span\left(g_j,\ j \in \overline{1,\aleph}\right) \subset KerR(a).$$

где $g_j = t^{-j}\left[a^+(t) - \left(a^-(t)\right)^{-1}\left(a_0(t)^{-1}\right)\right],\ j \in \overline{1,\aleph}.$

Заметим, что $t^{-j} \in W^+(\Gamma), j \in \overline{1,\aleph}$. Кроме того, функция

$$t^{-j}\left(a_0(t)\right)^{-1} = t^{\aleph - j}\prod_{i=1}^{n}(t - z_i)^{-\aleph_{2i-1}-\aleph_{2i}} \in W^-(\Gamma),$$

так как она в точках $z = \infty$ и $z = 0$ имеет нули соответственно вида z^{-j} и $z^{\aleph - j}$, $j \in 1,\aleph$. Одновременно $z_i \in D_i^+$, $i \in 1,n.$. Поэтому

$$R(a)g_j(t) = P_\Gamma^+ g_j(t) + a^+(t)a_0(t)a^-(t)P_\Gamma^- g_j(t) =$$

$$= P_\Gamma^+\left(t^{-j}a^+(t)\right) - P_\Gamma^+\left(t^{-j}\left(a^-(t)\right)^{-1}\left[a_0(t)\right]^{-1}\right) +$$

$$+ a^+(t)a_0(t)a^-(t)P_\Gamma^-\left(t^{-j}a^+(t)\right) -$$

$$- a^+(t)a_0(t)a^-(t)P_\Gamma^-\left(t^{-j}\left(a^-(t)\right)^{-1}\left(a_0(t)\right)^{-1}\right) =$$

$$= t^{-j}a^+(t) - a^+(t)a_0(t)a^-(t)t^{-j}\left(a^-(t)\right)^{-1}\left(a_0(t)\right)^{-1} =$$

$$= t^{-j}a^+(t) - t^{-j}a^+(t) = 0.$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} \subset KerR(a).$$

Теперь покажем, что $KerR(a) \subset \mathcal{L}$. Рассмотрим сначала $KerR(a_0)$. Пусть $g \in KerR(a_0)$. Тогда $R(a_0)g = 0 \Leftrightarrow P_\Gamma^+ g + a_0 P_\Gamma^- g = 0 \Leftrightarrow P_\Gamma^+ g = -a_0 P_\Gamma^- g \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P_\Gamma^+ g = -t^{-\aleph}\prod_{i=1}^{n}(t - z_i)^{\aleph_{2i-1}+\aleph_{2i}} P_\Gamma^- g.$$

Не нарушая общности, будем считать, что $(\aleph_{2i-1} + \aleph_{2i}) < 0,\ i \in \overline{1,m}$ и $n_- = \sum_{i=1}^{m}(\aleph_{2i-1} + \aleph_{2i})$,

$(\aleph_{2i-1} + \aleph_{2i}) \geq 0,\ i \in \overline{m+1,m}\ n_+ = \sum_{i=m+1}^{n}(\aleph_{2i-1} + \aleph_{2i}).$

При этом, так как $\aleph > 0$, то $\left|n_-\right| < n_+$. Тогда

$$P_\Gamma^+ g = -t^{-n_+}\prod_{i=m+1}^{n}(t - z_i)^{\aleph_{2i-1}+\aleph_{2i}} \cdot$$

$$\cdot t^{-n_-}\prod_{i=1}^{m}(t - z_i)^{\aleph_{2i-1}+\aleph_{2i}} P_\Gamma^- g.$$

Заметим, что

$$\prod_{i=1}^{m}(t - z_i)^{\aleph_{2i-1}+\aleph_{2i}} \in W^-(\Gamma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \widehat{g}^- = \prod_{i=1}^{m}(t - z_i)^{\aleph_{2i-1}+\aleph_{2i}} P_\Gamma^- g \in L_p^-(\Gamma).$$

Учитывая последнее равенство, имеем:

$$P_\Gamma^+ g = -t^{-n_+}\prod_{i=m+1}^{n}(t - z_i)^{\aleph_{2i-1}+\aleph_{2i}} \cdot t^{-n_-}\widehat{g}^- \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_\Gamma^+ g = -t^{-n_-}\prod_{i=m+1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{\aleph_{2i-1}+\aleph_{2i}}(-1)^k C^k_{\aleph_{2i-1}+\aleph_{2i}} z_i^k t^{-k}\right)\widehat{g}^-.$$

Подействуем проектором P_Γ^+ на полученное равенство:

$$P_\Gamma^+ g = \sum_{k=0}^{n_+} d_k P_\Gamma^+ t^{-k-n_-}\widehat{g}^-.$$

С учетом формулы (3) получим:

$$P_\Gamma^+ t^{-k-n_-}\widehat{g}^- =$$

$$= P_\Gamma^+\begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{2n}(-1)^{l+1} g_{lj} t_1^{j-k-n_-} \\ \sum_{j=-\infty}^{-1}(g_{2j} - g_{1j})t_2^{j-k-n_-} + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{l=3}^{2n}(-1)^{l+1} g_{lj} t_2^{j-k-n_-} \\ \sum_{j=-\infty}^{-1}(g_{2j} - g_{1j})t_3^{j-k-n_-} + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{l=3}^{2n}(-1)^{l+1} g_{lj} t_3^{j-k-n_-} \\ \cdots \\ \sum_{j=-\infty}^{-1}\sum_{l=1}^{2n-2}(-1)^{l} g_{lj} t_{2n-1}^{j-k-n_-} + \sum_{j=0}^{\infty}(g_{2n-1,j} - g_{2n,j})t_{2n-1}^{j-k-n_-} \\ \sum_{j=-\infty}^{-1}\sum_{l=1}^{2n}(-1)^{l} g_{lj} t_{2n}^{j-k-n_-} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{k+n_- -1}\sum_{l=1}^{2n}(-1)^{l+1} g_{lj} t_i^{j-k-n_-}\right)_{i=1}^{2n} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k+n_- -1} g_j^1 t^{j-k-n_-},\quad g_j^1 = \{\sum_{l=1}^{2n}(-1)^{l+1} g_{lj}\}_{j=1}^{2n}.$$

Поэтому

$$P_\Gamma^+ g = \sum_{k=0}^{n_+} d_k \sum_{j=0}^{k+n_- -1} g_j^1 t^{j-k-n_-} = \sum_{m=1}^{\aleph} c_m t^{-m},$$

$$P_\Gamma^- g = -\left(a_0(t)\right)^{-1} P_\Gamma^+ g = -\left(a_0(t)\right)^{-1} \cdot \sum_{m=1}^{\aleph} c_m t^{-m},$$

$$g = \sum_{m=1}^{\aleph} c_m t^{-m}\left(1 - (a_0(t))^{-1}\right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\aleph} c_m t^{-m}\left(1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - z_i t^{-1})^{-\aleph_{2i-1}-\aleph_{2i}}\right).$$

Откуда следует, что $KerR(a_0) = span\left(t^{-m}\left[1 - (a_0(t))^{-1}\right], m \in \overline{1,\aleph}\right).$

В общем случае, с учетом формулы (15)

$$KerR(a) = R(a^+, 1/a^-)(KerR(a_0)) =$$

$$= \left(a^+P_\Gamma^+ + (1/a^-)P_\Gamma^-\right)\left(span(t^{-j}\left[1 - (a_0(t))^{-1}\right], j \in \overline{1,\aleph})\right) =$$

$$= span\left(t^{-j}\left[a^+(t) - (a^-(t))^{-1}(a_0(t))^{-1}\right], j \in \overline{1,\aleph}\right) = \mathcal{L}.$$

Пусть $\aleph < 0$. Так как

$$f \in ImR(a_0) \Leftrightarrow P_\Gamma^+ f(t) = P_\Gamma^+ g(t),$$
$$P_\Gamma^- f(t) = t^{-\aleph} \cdot \prod_{i=1}^{n} (t - z_i)^{\aleph_{2i-1}+\aleph_{2i}} g^-(t),$$

где $g^-(t) = P_\Gamma^- g(t)$, то, учитывая замечание 1, получаем, что интеграл

$$\int_\Gamma f(t)t^k\,dt = \int_\Gamma P_\Gamma^- f(t)t^k\,dt =$$
$$= \int_\Gamma t^{k-\aleph} \cdot \prod_{i=1}^{n} (t - z_i)^{\aleph_{2i-1}+\aleph_{2i}} g^-(t)\,dt$$

представляется как сумма $2n$ интегралов $\int_{\Gamma_j} t_j^{k-\aleph} \cdot \prod_{i=1}^{n} (t_j - z_i)^{\aleph_{2i-1}+\aleph_{2i}} g^-(t_j)\,dt_j,\ j \in \overline{1,2n},$ где интегралы по контурам Γ_j и Γ_{j+1}, $j = 2,4,...,2n-2$ взаимно противоположны по знаку и поэтому

$$\int_\Gamma f(t)t^k\,dt = \int_{\Gamma_1} t_1^{k-\aleph} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \tilde{g}_{1s} t_1^s\,dt_1 +$$
$$+\int_{\Gamma_{2n}} t_{2n}^k \cdot \sum_{s=-\infty}^{-1} \tilde{g}_{2n,s} t_{2n}^s\,dt_{2n} = 0 \Rightarrow$$
$$\int_\Gamma f(t)t^k dt = 0,\ k \in \overline{\aleph,-1}. \tag{21}$$

Покажем, что из (21) следует $f \in ImR(a_0)$:

$$\int_\Gamma P_\Gamma^- f(t)t^k dt = \int_{\Gamma_1} \sum_{s=0}^{\infty} f_s^1 t_1^s \cdot t_1^k dt_1 + \int_{\Gamma_2} \sum_{s=-\infty}^{\infty} f_s^2 t_2^s \cdot t_2^k dt_2 + ... +$$
$$+\int_{\Gamma_{2n-1}} \sum_{s=-\infty}^{\infty} f_s^{2n-1} t_{2n-1}^s \cdot t_{2n-1}^k dt_{2n-1} + \int_{\Gamma_{2n}} \sum_{s=-\infty}^{-1} f_s^{2n} t_{2n}^s \cdot t_{2n}^k dt_{2n} =$$
$$= \sum_{s=0}^{\infty} f_s^1 \int_{\Gamma_1} t_1^{s+k} dt_1 + \sum_{s=-\infty}^{\infty} f_s^2 \int_{\Gamma_2} t_2^{s+k} dt_2 + ... +$$
$$+\sum_{s=-\infty}^{\infty} f_s^{2n-1} \int_{\Gamma_{2n-1}} t_{2n-1}^{s+k} dt_{2n-1} + \sum_{s=-\infty}^{-1} f_s^{2n} \int_{\Gamma_{2n}} t_{2n}^{s+k} dt_{2n} =$$
$$= 2\pi i\left(-f_{-k-1}^1 + f_{-k-1}^2 - f_{-k-1}^3 + ... + f_{-k-1}^{2n-2} - f_{-k-1}^{2n-1}\right) =$$
$$= -2\pi i f_{-k-1}^1 = 0, k \in \overline{\aleph,-1},$$

так как в силу формулы (14) $f_{-k-1}^2 = f_{-k-1}^3, ..., f_{-k-1}^{2n-2} = f_{-k-1}^{2n-1}$. Тогда

$$g^-(t) = \begin{pmatrix} \prod_{i=1}^{n} (1 - z_i t_1^{-1})^{-\aleph_{2i-1}-\aleph_{2i}} \sum_{s=-\aleph}^{\infty} f_s^1 t_1^s \\ \cdots\cdots\cdots \\ \prod_{i=1}^{n} (1 - z_i t_k^{-1})^{-\aleph_{2i-1}-\aleph_{2i}} \sum_{s=-\infty}^{\infty} f_s^k t_k^s \\ \cdots\cdots\cdots \\ \prod_{i=1}^{n} (1 - z_i t_{2n}^{-1})^{-\aleph_{2i-1}-\aleph_{2i}} \sum_{s=-\infty}^{-1} f_s^{2n} t_{2n}^s \end{pmatrix} \in L_p^-(\Gamma).$$

Таким образом, $f(t) \in ImR(a_0) \Leftrightarrow (21)$.

В общем случае, принимая во внимание следствие из теоремы 1, получаем, что условие $f \in ImR(a)$ равносильно выполнению условий (20). ►

5. ДИСКРЕТНЫЕ СВЕРТКИ

Пусть $\rho_1 > \rho_2 > ... > \rho_{2n}, \rho_j \in (0,\infty), j \in \overline{1,2n}$. Через $\{\rho_{2j},\rho_{2j-1}\}_p, 1 \le p < \infty$, обозначим банахово пространство комплексных последовательностей вида

$$f_j = \{f_{jk}\}_{k\in\mathbb{Z}},\ f_{jk} = \rho_{2j}^k (P_+\tilde{f}_j)_k + \rho_{2j-1}^k (P_-\tilde{f}_j)_k,$$

где

$$\tilde{f}_j = \{\tilde{f}_{jk}\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l_p(\mathbb{Z}), 1 \le p < \infty,$$
$$P_\pm \tilde{f}_j = \left\{1/2(1 \pm sign\ k)\tilde{f}_{jk}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}.$$

Норма в этом пространстве вводится внешним образом, $\left\|f_j\right\|_{\{\rho_{2j},\rho_{2j-1}\}_p} = \left\|\tilde{f}_j\right\|_p$.

Если $a = \{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \{\rho_{2j},\rho_{2j-1}\}_1$, то оператор дискретной свертки

$$C(a)f_j = \left\{\sum_{s=-\infty}^{\infty} a_{k-s} f_{js}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

ограничен в пространстве $\{\rho_{2j},\rho_{2j-1}\}_p$, $1 \le p < \infty$ [11].

Рассмотрим матричный оператор порядка $2n$

$$\widehat{R}(a) = \widehat{P}_+ + C(a)\widehat{P}_-$$

в пространстве

$$X = \{\rho_2,\rho_1\}_p^2 \times \{\rho_4,\rho_3\}_p^2 \times ... \times \{\rho_{2n},\rho_{2n-1}\}_p^2 =$$
$$= \{\rho_2,\rho_1\}_p \times \{\rho_2,\rho_1\}_p \times \{\rho_4,\rho_3\}_p \times \{\rho_4,\rho_3\}_p \times ...$$
$$\times \{\rho_{2n},\rho_{2n-1}\}_p \times \{\rho_{2n},\rho_{2n-1}\}_p.$$

Здесь взаимно дополнительные проекторы $\widehat{P}_\pm$, операторы $C(a)$ и $\widehat{R}(a)$ имеют следующие матричные представления порядка $2n$:

$$\widehat{P}_\pm = \begin{pmatrix} P_\mp & \pm P_+ & \mp P_+ & \pm P_+ & ... & \mp P_+ & \pm P_+ \\ \pm P_- & P_\pm & \mp P_+ & \pm P_+ & ... & \mp P_+ & \pm P_+ \\ \pm P_- & \mp P_- & P_\mp & \pm P_+ & ... & \mp P_+ & \pm P_+ \\ ...... & .... & ...... & ...... & ... & .... & ...... \\ \pm P_- & \mp P_- & \pm P_- & \mp P_- & ... & P_\mp & \pm P_+ \\ \pm P_- & \mp P_- & \pm P_- & \mp P_- & ... & \pm P_- & P_\pm \end{pmatrix},$$

$$C(a) = \left(C_{ij}\right)_{i,j=1}^{2n},\ C_{ij} = \delta_{ij} C(a_i),$$

$$\widehat{R}(a) = \left(R_{ij}\right)_{i,j=1}^{2n},$$

$$R_{ij} = \begin{cases} (-1)^{j+1}P_- + (-1)^j C(a_i)P_-, \text{ если } j < i, \\ (-1)^j P_+ + (-1)^{j+1}C(a_i)P_+, \text{ если } j > i, \\ P_- + C(a_i)P_+, \text{ если } j = i = 2k-1, k \in \overline{1,n}, \\ P_+ + C(a_i)P_-, \text{ если } j = i = 2k, k \in \overline{1,n}. \end{cases}$$

Лемма 1. *Оператор $\widehat{R}(a)$ является линейным ограниченным оператором, действующим из пространства X в пространство*

$$Y = \{\rho_1\}_p \times \{\rho_2\}_p \times \ldots \times \{\rho_{2n}\}_p = \\ = \{\rho_1, \rho_1\}_p \times \{\rho_2, \rho_2\}_p \times \ldots \times \{\rho_{2n}, \rho_{2n}\}_p, \\ 1 \le p < \infty.$$

Лемма 2. *Оператор $\widehat{R}(a)$ подобен при $\rho_j = r_j^{-1}$, $j \in \overline{1,2n}$, $p = 2$ оператору $R(a)$ вида (4),*

$$R(a) = T \cdot \widehat{R}(a) \cdot T^{-1}, \; T = \left(T_{ij}\right)_{i,j=1}^{2n}, \; T_{ij} = \delta_{ij} L_{t_j},$$

где L_{t_j} — преобразование Лорана, действующее из пространства $\{\rho_j, \rho_j\}_2$ в пространство $L_2(\Gamma_j)$, $j \in \overline{1,2n}$.

Символ $a(t) = \left(a_1(t_1), a_2(t_2), \ldots, a_{2n}(t_{2n})\right)$ оператора $R(a)$ одновременно называется символом оператора $\widehat{R}(a)$.

Ниже под оператором $\widehat{R}(c,d)$ понимается оператор $C(c)\widehat{P}_+ + C(d)\widehat{P}_-$.

Теорема 4. *Пусть $\rho_j = r_j^{-1}$, $j \in \overline{1,2n}$. В условиях теоремы 3: если $\aleph = 0$, то оператор $\widehat{R}(a)$ обратим, если $\aleph > 0$, то оператор $\widehat{R}(a)$ обратим справа, если $\aleph < 0$, то оператор $\widehat{R}(a)$ обратим слева, а соответствующий обратный оператор $\left[\widehat{R}(a)\right]^{-1}$ может быть представлен в виде:*

$$\left[\widehat{R}(a)\right]^{-1} = \widehat{R}(a^+, 1/a^-) \cdot \widehat{R}(1/a_0) \cdot C(1/a^+). \qquad (22)$$

Кроме того, если $\aleph > 0$, то $dim\ Ker\widehat{R}(a) = \aleph$ и

$$Ker\ \widehat{R}(a) = \\ = span\left(\left[C(a^+) - C(1/a^-)C(1/a_0)\right] \cdot V^{-j}\widehat{e}, \; j \in \overline{1,\aleph}\right), \qquad (23)$$

где V^{-1} — оператор левого сдвига, $V^{-1}\{f_n\} = \{f_{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\widehat{e} = \{e_k\}_{k=1}^{2n}$, e_k — единица в $l_1(\mathbb{Z})$.

Если $\aleph < 0$, то $dim\ Coker\widehat{R}(a) = -\aleph$, а последовательность f принадлежит образу оператора $\widehat{R}(a)$ тогда и только тогда, когда выполняются условия ортогональности

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{m\in\mathbb{Z}} d_{k-m}^{2j-1}\left(f_{2j-1,m} - f_{2j,m}\right) = 0, \; k \in \overline{0, |\aleph|-1}, \qquad (24)$$

где $d = \left(d_m^j\right)_{m\in\mathbb{Z}} = L_z^{-1}\left(1/a^+(t)\right)$, $j \in \overline{1,2n}$.

◄ Справедливость первой части теоремы при $p = 2$ является следствием теоремы 3 и подобия операторов $R(a)$ и $\widehat{R}(a)$.

Если $p \neq 2$, приведенные в формулировке теоремы обратные операторы ограничены в пространстве X, а соответствующие операторные равенства ($\widehat{R}(a) \cdot \left[\widehat{R}(a)\right]^{-1} = I$ и т.д.) выполняются на счетном всюду плотном в X, множестве финитных последовательностей и по непрерывности распространяются на все пространство.

Пусть $\aleph > 0$. Докажем равенство (23). Так как $\widehat{R}(a) = C(a^+)\widehat{R}(a_0)\widehat{R}(1/a^+, a^-)$, то

$$f \in Ker\ \widehat{R}(a) \Leftrightarrow \widehat{R}(1/a^+, a^-)f \in Ker\ \widehat{R}(a_0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f \in \widehat{R}(a^+, 1/a^-)(Ker\ \widehat{R}(a_0)).$$

Рассмотрим оператор $\widehat{R}(a_0) = \widehat{P}_+ + C(a_0)\widehat{P}_-$. Пусть $\mathcal{L}_0 = span\left(f_j, \; j \in \overline{1,\aleph}\right)$, $f_j = [I - C(1/a_0)]V^{-j}\widehat{e}$.

Покажем, что $\mathcal{L}_0 = Ker\ \widehat{R}(a_0)$.

Действительно, так как $V^{-j}\widehat{e} \in \widehat{P}_+X$, $V^{\aleph-j}\widehat{e} \in \widehat{P}_-X$ (см (11)), то

$$\widehat{R}(a_0)f_j = \left(\widehat{P}_+ + C(a_0)\widehat{P}_-\right)\left([I - C(1/a_0)]V^{-j}\widehat{e}\right) = \\ = V^{-j}\widehat{e} - V^{-j}\widehat{e} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathcal{L}_0 \subset Ker\ \widehat{R}(a_0).$$

Теперь докажем противоположное вложение $Ker\ \widehat{R}(a_0) \subset \mathcal{L}_0$:

$$f \in Ker\ \widehat{R}(a_0) \Leftrightarrow \widehat{P}_+f = -C(a_0)\widehat{P}_-f \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \widehat{P}_+f = -\prod_{i=1}^{n}(I - z_iV^{-1})^{\aleph_{2i-1}+\aleph_{2i}}\widehat{P}_-f = V^{-\aleph}\widehat{f}_-,$$

$$\text{где } \widehat{f}_- = -\prod_{i=1}^{n}(V - z_iI)^{\aleph_{2i-1}+\aleph_{2i}}\widehat{P}_-f \in \widehat{P}_-\left(X\right).$$

На последнее равенство подействуем проектором $\widehat{P}_+$:

$$\widehat{P}_+f = \widehat{P}_+V^{-\aleph}\widehat{f}_- = \sum_{m=1}^{\aleph} d_m u_m, \; u_m = \left(u_{mj}\right)_{j=1}^{2n},$$

$$u_{mj} = P_-V^{-m}P_+\tilde{f}, \; \tilde{f} = \sum_{l=1}^{2n}(-1)^{l+1}f_l$$

$$\Rightarrow \text{так как } P_-V^{-m}P_+\tilde{f} = \sum_{k=0}^{m-1}\tilde{f}_kV^{k-m}e,$$

$$\text{то } \widehat{P}_+f = \sum_{j=1}^{\aleph} d_j \sum_{k=0}^{j-1}\tilde{f}_kV^{k-j}\widehat{e} = \sum_{j=1}^{\aleph}\tilde{d}_jV^{-j}\widehat{e}$$

$$\Rightarrow f = \sum_{j=1}^{\aleph} \tilde{d}_j \left[I - C(1/a_0) \right] V^{-j} \widehat{e} \in \mathcal{L}_0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Ker\ \widehat{R}(a_0) = \mathcal{L}_0.$$

Пусть $\aleph < 0$. Тогда $f \in Im\widehat{R}(a_0) \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow f = \widehat{P}_+ g + \prod_{i=1}^{n} (I - z_i V^{-1})^{\aleph_{2i-1}+\aleph_{2i}} \widehat{P}_- g, \text{ где}$$
$$\widehat{P}_\pm g \in \widehat{P}_\pm \left(X\right) \Leftrightarrow \widehat{P}_+ f = \widehat{P}_+ g, \widehat{P}_- f =$$
$$= \prod_{i=1}^{n} (I - z_i V^{-1})^{\aleph_{2i-1}+\aleph_{2i}} \widehat{P}_- g.$$

Здесь учтено, что
$$\prod_{i=1}^{n} \left(I - z_i V^{-1}\right)^{\aleph_{2i-1}+\aleph_{2i}} \widehat{P}_- g \in \widehat{P}_- \left(X\right).$$
Второе равенство
$$\Leftrightarrow \widehat{P}_- g = \prod_{i=1}^{n} (I - z_i V^{-1})^{-\aleph_{2i-1}-\aleph_{2i}} \widehat{P}_- f \in \widehat{P}_- \left(X\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \widehat{P}_+ V^{\aleph} \prod_{i=1}^{n} (V - z_i I)^{-\aleph_{2i-1}-\aleph_{2i}} \widehat{P}_- f = 0.$$
Так как
$$\widehat{f}_- = \prod_{i=1}^{n} (V - z_i I)^{-\aleph_{2i-1}-\aleph_{2i}} \widehat{P}_- f \in \widehat{P}_- \left(X\right), \text{ то}$$
$$\widehat{P}_+ V^{\aleph} \prod_{i=1}^{n} (V - z_i I)^{-\aleph_{2i-1}-\aleph_{2i}} \widehat{P}_- f = 0 \Leftrightarrow \widehat{P}_+ V^{\aleph} \widehat{f}_- = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sum_{m=1}^{\aleph} c_m v_m = 0,\ v_m = \left(v_{mj}\right)_{j=1}^{2n},\ v_{mj} = P_- V^{-m} P_+ \tilde{f},$$
$$\tilde{f} = \{\tilde{f}_k\}_{k\in\mathbb{Z}} = \sum_{l=1}^{2n} (-1)^{l+1} f_l \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \tilde{f}_k = 0,\ k \in \overline{0, |\aleph| - 1}.$$

Таким образом, для оператора $\widehat{R}(a_0)$ аналог условий ортогональности вида (24) доказан. В общем случае,
$$f \in Im\widehat{R}(a) \Leftrightarrow f = \widehat{P}_+ g + C(a^+)C(a_0)C(a^-)\widehat{P}_- g \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow C(1/a^+)f = C(1/a^+)\widehat{P}_+ g +$$
$$+ \prod_{i=1}^{n} \left(I - z_i V^{-1}\right)^{\aleph_{2i-1}+\aleph_{2i}} C(a^-)\widehat{P}_- g \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow h = \widehat{P}_+ u + \prod_{i=1}^{n} \left(I - z_i V^{-1}\right)^{\aleph_{2i-1}+\aleph_{2i}} \widehat{P}_- u,$$
где
$$h = C(1/a^+)f,\ \widehat{P}_+ u = C(1/a^+)\widehat{P}_+ g,\ \widehat{P}_- u = C(a^-)\widehat{P}_- g.$$

Введем функцию
$$d^+(t) = 1/a^+(t) = \left(d_1^+(t_1), d_2^+(t_2), ..., d_{2n}^+(t_{2n})\right)^{\tau},$$
где $d_j^+(t_j) = d_{j+1}^+(t_j) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m^j t_j^m$, $j = 1, 3, ..., 2n-1$.

Тогда $h = C(d^+)f = \left(h_j\right)_{j=1}^{2n}$, где $h_j = \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_{n-m}^j f_{jm} \right\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $j = 1, 2, ..., 2n$. По доказанному
$$h \in Im\widehat{R}(a_0) \Leftrightarrow \tilde{h}_k = 0,$$
$$\tilde{h} = \left(\tilde{h}_k\right)_{k\in\mathbb{Z}} = \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} h_j,\ k \in \overline{0, |\aleph| - 1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_{k-m}^1 (f_{1m} - f_{2m}) + ... + d_{k-m}^{2n-1} (f_{2n-1,m} - f_{2n,m}) = 0,$$
$$k \in \overline{0, |\aleph| - 1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \sum_{m\in\mathbb{Z}} d_{k-m}^{2j-1} \left(f_{2j-1,m} - f_{2j,m}\right) = 0,\ k \in \overline{0, |\aleph| - 1}.$$

Откуда следуют условия (24). ►

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая работа выполнена в рамках развития нового научного направления «Уравнения типа свёртки и сингулярные интегральные уравнения с аналитическими символами», начало которого содержится в монографиях [7, 12], а продолжение — в работах [11, 13, 14]. Разработанный выше метод исследования оператора $R(a)$ обобщается на случай задачи Римана на плоскости с конечным числом произвольных «дыр» [2]. Мы намерены вернуться к этому вопросу в другой работе. С некоторыми приложениями полученных результатов можно познакомиться в работе [15].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

2. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.

3. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных операторов. Кишинев: Штиинца, 1973.

4. *Хведелидзе Б. В.* О краевой задаче Пуанкаре теории логарифмического потенциала для многосвязной области // Сообщ. АН ГрузССР. 1941. т. II, № 7, 10. С. 571—578, 865—872.

5. *Крейн М. Г.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // УМН. 1958. Т. 13, вып. 5. С. 3—120.

6. *Trjitzinsky W. J.* Singular integral equations with Cauchy kernels // Trans. Amer. Math. Soc., vol. 60, 2, 1946, P. 167—214.

7. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978.

8. *Дыбин В. Б., Бурцева Е. В.* Задача Римана на системе концентрических колец и дискретные уравнения типа свертки // Международный научный семинар «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения», г. Ростов-на-Дону, 24—28 апреля 2011 г., тезисы докладов, С. 8—9.

9. *Дыбин В. Б., Бурцева Е. В.* Оператор краевой задачи Римана на кольце и его приложение к одному классу систем уравнений в дискретных свертках. // Труды научной школы И. Б. Симоненко. Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ. 2010. С. 79—92.

10. *Дыбин В. Б., Бурцева Е. В.* Задача Римана на системе концентрических колец и дискретные уравнения типа свертки // Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна-2012: материалы международной конференции, г. Воронеж, 2012 г. С. 58—61.

11. *Дыбин В. Б., Джиргалова С. Б.* Оператор дискретной свертки в пространстве $\{\alpha, \beta\}_p, 1 \le p \le \infty$ // Известия СКНЦ ВШ. Естественные науки. Приложение. 2003. № 9. С. 3—16.

12. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1971.

13. *Дыбин В. Б.* Уравнение свёртки на вещественной прямой в пространстве функций, суммируемых с экспоненциальными весами, Части 1, 2 // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». 2011. № 2. С. 16—27; № 3. С. 39—48.

14. *Дыбин В. Б., Джиргалова С. Б.* Скалярные составные дискретные свертки в пространстве $\{\alpha, \beta\}_p, 1 \le p \le \infty$. Односторонняя обратимость // Известия СКНЦ ВШ. Естественные науки. Спецвыпуск, Псевдодифференциальные уравнения и некоторые проблемы математической физики. 2005. С. 56—63.

15. *Басова М. М., Обуховский В. В.* О некоторых краевых задачах для функционально-дифференциальных включений в банаховых пространствах // СМФН, 15 (2006). С. 36—44.

Дыбин В. Б., кандидат физ.-мат. наук, доцент, кафедра алгебры и дискретной математики, факультет математики, механики и компьютерных наук, Южный федеральный университет

E-mail: vladimir-dybin@yandex.ru

Тел.: (863) 222-75-54, 8 (928) 108-12-11

Бурцева Е. В., аспирант, кафедра алгебры и дискретной математики, факультет математики, механики и компьютерных наук, Южный федеральный университет

E-mail: evg-burceva@yandex.ru

Tel.: 8 (903) 435-17-75

Dybin V. B., Chair Algebra and Discrete Mathematics, Southern Federal University

E-mail: vladimir-dybin@yandex.ru

Tel.: (863) 222-75-54, 8 (928) 108-12-11

Burtseva E. V., Chair Algebra and Discrete Mathematics, Southern Federal University

E-mail: evg-burceva@yandex.ru

Tel.: 8 (903) 435-17-75