УДК 517.972

О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ С ЗАВИСИМЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

И. О. Дубровский

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 8.02.2012 г.

Аннотация: находится математическое ожидание решения начальной задачи для двумерного уравнения диффузии в случае известного характеристического функционала случайных процессов.
Ключевые слова: уравнение диффузии, случайный процесс, моментные функции, вариационная производная.

Abstract: mathematical expectation for solution of Cauchy problem for two-dimensional diffusion equation is found in case of known characteristic functionals of random processes.
Key words: diffusion equation, random processes, moment function, variational derivative.

1. Введение. Рассмотрим задачу Коши для уравнения диффузии с двумя фазовыми переменными

$$\frac{\partial u(t,x_1,x_2)}{\partial t} = \varepsilon_1(t)\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)(u(t,x_1,x_2)) + \varepsilon_2(t)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}\right)(u(t,x_1,x_2)) + \varepsilon_3(t)u(t,x_1,x_2), \tag{1}$$

$$u(t_0,x_1,x_2) = u_0(x_1,x_2), \tag{2}$$

где $u(t,x_1,x_2)$ — искомая функция, $\varepsilon_i : T \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, i=\overline{1,3}, f : T\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ случайные процессы, $u_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

В литературе [1] обычно рассматривают задачи, в которых случайные коэффициенты ε_i имеют вид $\varepsilon_i = \alpha(t) + w_t$, где $\alpha(t)$ — заданная детерминированная функция, а w_t — белый шум. Случайные процессы $\varepsilon_i(t)$ могут быть заданы своими характеристическими функционалами.

Мы предполагаем, что случайные коэффициенты $\varepsilon_2(t)$ и $\varepsilon_3(t)$ заданы характеристическим функционалом

$$\psi(v) = \exp\left(i\int_T \left\langle \xi(s), v(s)\right\rangle ds\right) \times \left(1 + \int_T\int_T \left\langle B(s_1,s_2)v(s_1), v(s_2)\right\rangle ds_1 ds_2 + \varphi_{11}(v)\varphi_{22}(v)\right)^{-1}, \tag{3}$$

где символ $<\cdot,\cdot>$ обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$, $v_1 : L_1(T) \to \mathbb{R}$, $v_2 : L_1(T) \to \mathbb{R}$,
$v(s) = \begin{pmatrix} v_1(s) \\ v_2(s) \end{pmatrix}$, $\xi(t) = \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix}$, $B(s_1,s_2) = \begin{pmatrix} b_{11}(s_1,s_2) & b_{12}(s_1,s_2) \\ b_{12}(s_1,s_2) & b_{22}(s_1,s_2) \end{pmatrix}$, $b_{ij} : L_1(T\times T) \to \mathbb{R}$, $b_{ij}(s_1,s_2)$ — симметрическая функция по переменным (s_1,s_2), $\varphi_{ij}(v) = \int_T\int_T b_{ij}(s_1,s_2)v_i(s_1)v_j(s_2)\,ds_1ds_2$, $i,j=\overline{1,2}$.

Задача состоит в нахождении математического ожидания $M(u(t,x_1,x_2))$ решения задачи (1)—(2). Отметим, что случайные процессы $\varepsilon_2(t), \varepsilon_3(t)$ могут быть статистически зависимыми. В работе [2] получена формула для нахождения математического ожидания решения задачи (1), (2) с помощью характеристического функционала.

В данной работе мы получаем вид математического ожидания решения для частного вида характеристического функционала, причем не предполагается, что случайные процессы $\varepsilon_2(t), \varepsilon_3(t)$ независимы.

2. Связь параметров характеристического функционала со случайными коэффициентами $\varepsilon_2(t), \varepsilon_3(t)$.

Моментные функции случайного процесса определяются вариационным дифференцированием характеристического функционала [3]

$$\frac{\delta\psi(v)}{\delta v_1(\tau)}\Big|_{v=0} = iM(\varepsilon_2(\tau)),$$

$$\frac{\delta\psi(v)}{\delta v_2(\tau)}\Big|_{v=0} = iM(\varepsilon_3(\tau)),$$

$$\frac{\delta^2\psi(v)}{\delta v_1(\tau)\delta v_2(t)}\Big|_{v=0} = i^2M(\varepsilon_2(\tau)\varepsilon_3(t)),$$

$$\frac{\delta^2\psi(v)}{\delta v_1(\tau)\delta v_1(t)}\Big|_{v=0} = i^2M(\varepsilon_2(\tau)\varepsilon_2(t)),$$

$$\frac{\delta^2\psi(v)}{\delta v_2(\tau)\delta v_2(t)}\Big|_{v=0} = i^2M(\varepsilon_3(\tau)\varepsilon_3(t)).$$

Эти соотношения позволяют выяснить связь коэффициентов ξ_j, b_{ij} со случайными коэффициентами ε_2, ε_3. Пусть $L_\infty(T)$ — пространство существенно ограниченных на T функций [4].

Теорема 1. Если реализации случайных процессов $\varepsilon_2(t), \varepsilon_3(t)$ принадлежат пространству $L_\infty(T)$, то

$$\xi_1(s) = M(\varepsilon_2(s)),\ \xi_2(s) = M(\varepsilon_3(s)),$$

$$b_{11}(\tau,t) = \frac{1}{2}(M(\varepsilon_2(\tau)\varepsilon_2(t)) - M\varepsilon_2(\tau)M\varepsilon_2(t)),$$

$$b_{12}(\tau,t) = \frac{1}{2}(M(\varepsilon_2(\tau)\varepsilon_3(t)) - M\varepsilon_2(\tau)M\varepsilon_3(t)),$$

$$b_{22}(\tau,t) = \frac{1}{2}(M(\varepsilon_3(\tau)\varepsilon_3(t)) - M\varepsilon_3(\tau)M\varepsilon_3(t)).$$

Доказательство. Запишем характеристический функционал (3) в виде

$$\psi(v_1,v_2) = (\exp(i\int_T(\xi_1(s)v_1(s) + \xi_2(s)v_2(s))ds))\Bigg(1 + \int_T\int_T(b_{11}(s_1,s_2)v_1(s_1)v_1(s_2) + 2b_{12}(s_1,s_2)v_1(s_1)v_2(s_2) + b_{22}(s_1,s_2)v_2(s_1)v_2(s_2))ds_1ds_2 + \int_T\int_T b_{11}(s_1,s_2)v_1(s_1)v_1(s_2)\,ds_1ds_2 \times \int_T\int_T b_{22}(s_1,s_2)v_2(s_1)v_2(s_2)\,ds_1ds_2\Bigg)^{-1}. \qquad (4)$$

Выясним связь функций $\xi_i(s)$, $b_{ij}(s_1,s_2)$, где $i,j = \overline{1,2}$, со статистическими характеристиками процессов $\varepsilon_2(t), \varepsilon_3(t)$.

Введем обозначения

$$u_1(v_1,v_2) = i\int_T(\xi_1(s)v_1(s) + \xi_2(s)v_2(s))ds,$$

$$u_2(v_1,v_2) = 1 + \int_T\int_T b_{11}(s_1,s_2)v_1(s_1)v_1(s_2)\,ds_1ds_2 + 2\int_T\int_T b_{12}(s_1,s_2)v_1(s_1)v_2(s_2)\,ds_1ds_2 + \int_T\int_T b_{22}(s_1,s_2)v_2(s_1)v_2(s_2)\,ds_1ds_2 + (\int_T\int_T b_{11}(s_1,s_2)v_1(s_1)v_1(s_2)\,ds_1ds_2)\times(\int_T\int_T b_{22}(s_1,s_2)v_2(s_1)v_2(s_2)\,ds_1ds_2).$$

Характеристический функционал (4) можно представить в виде

$$\psi(v_1,v_2) = \psi(u_1(v_1,v_2),u_2(v_1,v_2)) = \frac{e^{u_1(v_1,v_2)}}{u_2(v_1,v_2)}.$$

По теореме о дифференцировании сложных функционалов [3, стр. 21]

$$\frac{\delta\psi(u_1(v_1,v_2),u_2(v_1,v_2))}{\delta v_1(\tau)} = \frac{\partial\psi(u_1(v_1,v_2),u_2(v_1,v_2))}{\partial u_1}\frac{\delta u_1(v_1,v_2)}{\delta v_1(\tau)} + \frac{\partial\psi(u_1(v_1,v_2),u_2(v_1,v_2))}{\partial u_2}\frac{\delta u_2(v_1,v_2)}{\delta v_1(\tau)}.$$

Заметим, что

$$\frac{\partial\psi(u_1,u_2)}{\partial u_1} = \frac{e^{u_1}}{u_2},\quad \frac{\partial\psi(u_1,u_2)}{\partial u_2} = -\frac{e^{u_1}}{u_2^2},$$

$$\frac{\delta u_1(v_1,v_2)}{\delta v_1(\tau)} = i\xi_1(\tau).$$

Далее

$$\frac{\delta u_2(v_1,v_2)}{\delta v_1(\tau)} = \frac{\delta}{\delta v_1(\tau)}(\int_T\int_T b_{11}(s_1,s_2)v_1(s_1)v_1(s_2)ds_1ds_2) + 2\frac{\delta}{\delta v_1(\tau)}(\int_T\int_T b_{12}(s_1,s_2)v_1(s_1)v_2(s_2)\,ds_1ds_2) + \frac{\delta}{\delta v_1(\tau)}(\int_T\int_T b_{11}(s_1,s_2)v_1(s_1)v_1(s_2)\,ds_1ds_2 \times \int_T\int_T b_{22}(s_1,s_2)v_2(s_1)v_2(s_2)\,ds_1ds_2).$$

Известно [3, стр. 14—15], что

$$\frac{\delta}{\delta v(t)}(\int_T\int_T b(s_1,s_2)v(s_1)v(s_2)\,ds_1\,ds_2) = 2\int_T b(s_1,t)v(s_1)\,ds_1,$$

$$\frac{\delta}{\delta v(t)}(\int_T b(s)v(s)\,ds) = b(t).$$

Следовательно,

$$\frac{\delta}{\delta v_1(\tau)}(\int_T\int_T b_{11}(s_1,s_2)v_1(s_1)v_1(s_2)\,ds_1ds_2) = \\ = 2\int_T b_{11}(s_1,\tau)v_1(s_1)\,ds_1,$$

$$\frac{\delta}{\delta v_1(\tau)}(\int_T\int_T b_{12}(s_1,s_2)v_1(s_1)v_2(s_2)\,ds_1ds_2) = \\ = \frac{\delta}{\delta v_1(\tau)}(\int_T(\int_T b_{12}(s_1,s_2)v_2(s_2)\,ds_2)v_1(s_1)\,ds_1) = \\ = \int_T b_{12}(\tau,s_2)v_2(s_2)\,ds_2.$$

$$\frac{\delta}{\delta v_1(\tau)}((\int_T\int_T b_{11}(s_1,s_2)v_1(s_1)v_1(s_2)\,ds_1ds_2)\times \\ \times(\int_T\int_T b_{22}(s_1,s_2)v_2(s_1)v_2(s_2)\,ds_1ds_2)) = \\ = (\int_T\int_T b_{22}(s_1,s_2)v_2(s_1)v_2(s_2)\,ds_1ds_2)\times \\ \times\frac{\delta}{\delta v_1(\tau)}(\int_T\int_T b_{11}(s_1,s_2)v_1(s_1)v_1(s_2)\,ds_1ds_2) = \\ = 2(\int_T\int_T b_{22}(s_1,s_2)v_2(s_1)v_2(s_2)\,ds_1ds_2)\times \\ \times(\int_T b_{11}(s_1,\tau)v_1(s_1)\,ds_1).$$

Таким образом,

$$\frac{\delta u_2(v_1,v_2)}{\delta v_1(\tau)} = 2\int_T b_{11}(s_1,\tau)v_1(s_1)\,ds_1 + \\ +2\int_T b_{12}(\tau,s_2)v_2(s_2)\,ds_2 + \\ +2(\int_T\int_T b_{22}(s_1,s_2)v_2(s_1)v_2(s_2)\,ds_1ds_2)\times \\ \times(\int_T b_{11}(s_1,\tau)v_1(s_1)\,ds_1).$$

И, окончательно,

$$\frac{\delta\psi(u_1(v_1,v_2),u_2(v_1,v_2))}{\delta v_1(\tau)} = \\ = (\frac{\exp(i\int_T\langle\xi(s),v(s)\rangle\,ds)}{1+\int_T\int_T\langle B(s_1,s_2)v(s_1),v(s_2)\rangle\,ds_1ds_2+\varphi_{11}(v)\varphi_{22}(v)})i\xi_1(\tau) - \\ -(\frac{\exp(i\int_T\langle\xi(s),v(s)\rangle\,ds)}{(1+\int_T\int_T\langle B(s_1,s_2)v(s_1),v(s_2)\rangle\,ds_1ds_2+\varphi_{11}(v)\varphi_{22}(v))^2})\times \\ \times(2\int_T b_{11}(s_1,\tau)v_1(s_1)\,ds_1 + 2\int_T b_{12}(\tau,s_2)v_2(s_2)\,ds_2 + \\ +2(\int_T\int_T b_{22}(s_1,s_2)v_2(s_1)v_2(s_2)\,ds_1ds_2)(\int_T b_{11}(s_1,\tau)v_1(s_1)\,ds_1)).$$

При $v=0$ имеем

$$\frac{\delta\psi(v)}{\delta v_1(\tau)}\Big|_{v=0} = i\xi_1(\tau).$$

Условие

$$\frac{\delta\psi(v)}{\delta v_1(\tau)}\Big|_{v=0} = iM(\varepsilon_2(\tau))$$

будет выполнено, если $\xi_1(s)=M(\varepsilon_2(s))$.

Аналогично получаем равенство $\xi_2(s)=M(\varepsilon_3(s))$ из условия

$$\frac{\delta\psi(v)}{\delta v_2(\tau)}\Big|_{v=0} = iM(\varepsilon_3(\tau)).$$

Вычислим теперь

$$\frac{\delta^2\psi(v_1,v_2)}{\delta v_1(\tau)\delta v_2(t)} = \frac{\delta}{\delta v_2(t)}(\frac{\delta\psi(v_1,v_2)}{\delta v_1(\tau)}).$$

Обозначим

$$u_3(v_1,v_2) = 2\int_T b_{11}(s_1,\tau)v_1(s_1)\,ds_1 + \\ +2\int_T b_{12}(\tau,s_2)v_2(s_2)\,ds_2 + \\ +2(\int_T\int_T b_{22}(s_1,s_2)v_2(s_1)v_2(s_2)\,ds_1ds_2)\times \\ \times(\int_T b_{11}(s_1,\tau)v_1(s_1)\,ds_1),$$

$$g(u_1(v_1,v_2),u_2(v_1,v_2),u_3(v_1,v_2)) = \frac{\delta\psi(v_1,v_2)}{\delta v_1(\tau)}.$$

По теореме о дифференцировании сложных функционалов

$$\frac{\delta g(u_1(v_1,v_2),u_2(v_1,v_2),u_3(v_1,v_2))}{\delta v_2(t)} = \\ = \frac{\partial g(u_1,u_2,u_3)}{\partial u_1}\frac{\delta u_1(v_1,v_2)}{\delta v_2(t)} + \\ + \frac{\partial g(u_1,u_2,u_3)}{\partial u_2}\frac{\delta u_2(v_1,v_2)}{\delta v_2(t)} + \\ + \frac{\partial g(u_1,u_2,u_3)}{\partial u_3}\frac{\delta u_3(v_1,v_2)}{\delta v_2(t)}.$$

Заметим, что

$$g(u_1,u_2,u_3) = \frac{e^{u_1}}{u_2}i\xi_1(\tau) - \frac{e^{u_1}}{u_2^2}u_3,$$

$$\frac{\partial g(u_1,u_2,u_3)}{\partial u_1} = \frac{e^{u_1}}{u_2}i\xi_1(\tau) - \frac{e^{u_1}}{u_2^2}u_3,$$

$$\frac{\partial g(u_1,u_2,u_3)}{\partial u_2} = -\frac{e^{u_1}}{u_2^2}i\xi_1(\tau) - 2\frac{e^{u_1}}{u_2^3}u_3,$$

$$\frac{\partial g(u_1,u_2,u_3)}{\partial u_3} = -\frac{e^{u_1}}{u_2^2}.$$

При $v=0$ получим

$$u_1(v_1,v_2)\,|_{v=0}=0,\ u_2(v_1,v_2)\,|_{v=0}=1,\ u_3(v_1,v_2)\,|_{v=0}=0.$$

Отсюда

$$\frac{\partial g(u_1(v_1,v_2),u_2(v_1,v_2),u_3(v_1,v_2))}{\partial u_1}\,|_{v=0}=i\xi_1(\tau),$$

$$\frac{\partial g(u_1(v_1,v_2),u_2(v_1,v_2),u_3(v_1,v_2))}{\partial u_2}\,|_{v=0}=-i\xi_1(\tau),$$

$$\frac{\partial g(u_1(v_1,v_2),u_2(v_1,v_2),u_3(v_1,v_2))}{\partial u_3}\,|_{v=0}=-1.$$

Тогда

$$\frac{\delta^2\psi(v_1,v_2)}{\delta v_1(\tau)\delta v_2(t)}\,|_{v=0}=i\xi_1(\tau)\cdot\left(\frac{\delta u_1(v_1,v_2)}{\delta v_2(t)}\right)|_{v=0}-$$
$$-i\xi_1(\tau)\cdot\left(\frac{\delta u_2(v_1,v_2)}{\delta v_2(t)}\right)|_{v=0}-\left(\frac{\delta u_3(v_1,v_2)}{\delta v_2(t)}\right)|_{v=0}.$$

Найдем теперь вариационные производные

$$\frac{\delta u_1(v_1,v_2)}{\delta v_2(t)}=i\xi_2(t),$$

$$\frac{\delta u_2(v_1,v_2)}{\delta v_2(t)}=$$
$$=2\frac{\delta}{\delta v_2(t)}\left(\int_T\int_T b_{12}(s_1,s_2)v_1(s_1)v_2(s_2)\,ds_1ds_2\right)+$$
$$+\frac{\delta}{\delta v_2(t)}\left(\int_T\int_T b_{22}(s_1,s_2)v_2(s_1)v_2(s_2)\,ds_1ds_2\right)+$$
$$+\left(\int_T\int_T b_{11}(s_1,s_2)v_1(s_1)v_1(s_2)\,ds_1ds_2\right)\times$$
$$\times\frac{\delta}{\delta v_2(t)}\left(\int_T\int_T b_{22}(s_1,s_2)v_2(s_1)v_2(s_2)\,ds_1ds_2\right)=$$
$$=2\int_T b_{12}(t,s_2)v_1(s_2)\,ds_2+2\int_T b_{22}(s_1,t)v_2(s_1)\,ds_1+$$
$$+2\left(\int_T\int_T b_{11}(s_1,s_2)v_1(s_1)v_1(s_2)\,ds_1ds_2\right)\times$$
$$\times\left(\int_T b_{22}(s_1,t)v_2(s_1)\,ds_1\right),$$

$$\frac{\delta u_3(v_1,v_2)}{\delta v_2(t)}=2\frac{\delta}{\delta v_2(t)}\left(\int_T b_{12}(\tau,s_2)v_2(s_2)\,ds_2\right)+$$
$$+2\left(\int_T b_{11}(s_1,\tau)v_1(s_1)\,ds_1\right)\times$$
$$\times\frac{\delta}{\delta v_2(t)}\left(\int_T\int_T b_{22}(s_1,s_2)v_2(s_1)v_2(s_2)\,ds_1ds_2\right)=$$
$$=2b_{12}(\tau,t)+4\left(\int_T b_{11}(s_1,\tau)v_1(s_1)\,ds_1\right)\times$$
$$\times\left(\int_T b_{22}(s_1,t)v_2(s_1)\,ds_1\right).$$

При $v=0$ получим

$$\frac{\delta u_1(v_1,v_2)}{\delta v_2(t)}\,|_{v=0}=i\xi_2(t),$$

$$\frac{\delta u_2(v_1,v_2)}{\delta v_2(t)}\,|_{v=0}=0,$$

$$\frac{\delta u_3(v_1,v_2)}{\delta v_2(t)}\,|_{v=0}=2b_{12}(\tau,t).$$

Следовательно,

$$\frac{\delta^2\psi(v_1,v_2)}{\delta v_1(\tau)\delta v_2(t)}\Big|_{v=0}=(i\xi_1(\tau))(i\xi_2(t))-2b_{12}(\tau,t).$$

Из условия

$$\frac{\delta^2\psi(v_1,v_2)}{\delta v_1(\tau)\delta v_2(t)}=i^2M(\varepsilon_2(\tau)\varepsilon_3(t))$$

получим равенство

$$b_{12}(\tau,t)=\frac{1}{2}((i\xi_1(\tau))(i\xi_2(t))-i^2M(\varepsilon_2(\tau)\varepsilon_3(t)))=$$
$$=\frac{1}{2}(M(\varepsilon_2(\tau)\varepsilon_3(t))-M\varepsilon_2(\tau)M\varepsilon_3(t)).$$

Аналогично из условий

$$\frac{\delta^2\psi(v)}{\delta v_1(\tau)\delta v_1(t)}\Big|_{v=0}=i^2M(\varepsilon_2(\tau)\varepsilon_2(t)),$$

$$\frac{\delta^2\psi(v)}{\delta v_2(\tau)\delta v_2(t)}\Big|_{v=0}=i^2M(\varepsilon_3(\tau)\varepsilon_3(t)),$$

получаем

$$b_{11}(\tau,t)=\frac{1}{2}(M(\varepsilon_2(\tau)\varepsilon_2(t))-M\varepsilon_2(\tau)M\varepsilon_2(t)),$$

$$b_{22}(\tau,t)=\frac{1}{2}(M(\varepsilon_3(\tau)\varepsilon_3(t))-M\varepsilon_3(\tau)M\varepsilon_3(t)).$$

Теорема доказана.

Замечание. В случае, когда процессы $\varepsilon_2(t)$ и $\varepsilon_3(t)$ независимы

$$b_{12}(\tau,t)=\frac{1}{2}(M(\varepsilon_2(\tau)\varepsilon_3(t))-(M\varepsilon_2(\tau))(M\varepsilon_3(t)))=$$
$$=\frac{1}{2}(M\varepsilon_2(\tau)M(\varepsilon_3(t)-M\varepsilon_2(\tau)M\varepsilon_3(t))=0,$$

и выражение для характеристического функционала процессов $\varepsilon_2(t)$ и $\varepsilon_3(t)$ примет вид

$$\psi(v_1,v_2)=$$
$$=(\exp(i\int_T(M\varepsilon_2(s)v_1(s)+M\varepsilon_3(s)v_2(s))\,ds)\times$$
$$\times(1+\int_T\int_T(b_{11}(s_1,s_2)v_1(s_1)v_1(s_2)+$$
$$+b_{22}(s_1,s_2)v_2(s_1)v_2(s_2))\,ds_1\,ds_2+$$

$$+\int_T\int_T b_{11}(s_1,s_2)v_1(s_1)v_1(s_2)\,ds_1ds_2\times$$
$$\times\int_T\int_T b_{22}(s_1,s_2)v_2(s_1)v_2(s_2)\,ds_1ds_2)^{-1}=$$
$$=(\frac{\exp(i\int_T M\varepsilon_2(s)v_1(s)\,ds)}{1+\int_T\int_T b_{11}(s_1,s_2)v_1(s_1)v_1(s_2)\,ds_1\,ds_2})\times$$
$$\times(\frac{\exp(i\int_T M\varepsilon_3(s)v_2(s)\,ds)}{1+\int_T\int_T b_{22}(s_1,s_2)v_2(s_1)v_2(s_2)\,ds_1\,ds_2})=$$
$$=\psi_{\varepsilon_2}(v_1)\psi_{\varepsilon_3}(v_2),$$

где $\psi_{\varepsilon_2}(v_1)$, $\psi_{\varepsilon_3}(v_2)$ — характеристические функционалы процессов $\varepsilon_2(t)$ и $\varepsilon_3(t)$, обладающих распределением Лапласа.

3. Математическое ожидание решения задачи (1), (2)

В работе [4] получено выражение для математического ожидания решения задачи (1), (2)

$$M(u(t,x_1,x_2))=Mu_0(x_1,x_2)\overset{x}{*}$$
$$\overset{x}{*}F^{-1}_{\xi_1\xi_2}\Big[\psi(i(\xi_1^2+\xi_2^2)\chi(t_0,t),$$
$$-(\xi_1+\xi_2)\chi(t_0,t),-i\chi(t_0,t))\Big](x_1,x_2),$$

где $\psi(v_1,v_2,v_3)$ — характеристический функционал процессов $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$, $\varepsilon_3(t)$, символ $\overset{x}{*}$ обозначает свертку двух функций по переменным x_1, x_2.

Лемма 1. Пусть $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Тогда в пространстве обобщенных функций верно равенство

$$f(x_1,x_2)\overset{x}{*}\delta(x_1+a_1)\delta(x_2+a_2)=f(x_1+a_1,x_2+a_2).$$

Доказательство. Действительно, используя определение свертки двух функций и свойства дельта-функции, получим

$$f(x_1,x_2)\overset{x}{*}\delta(x_1+a_1)\delta(x_2+a_2)=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau_1,\tau_2)\delta(x_1-\tau_1+a_1)\times$$
$$\times\delta(x_2-\tau_2+a_2)d\tau_1d\tau_2=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau_1,\tau_2)\delta(\tau_1-(x_1+a_1))\times$$
$$\times\delta(x_2-\tau_2+a_2)\,d\tau_1)d\tau_2=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1+a_1,\tau_2)\delta(x_2-\tau_2+a_2)\,d\tau_2=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1+a_1,\tau_2)\delta(\tau_2-(x_2+a_2))\,d\tau_2=$$
$$=f(x_1+a_1,x_2+a_2).$$

Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть в задаче (1), (2) случайные процессы $\varepsilon_2(t)$, $\varepsilon_3(t)$ заданы характеристическим функционалом (3) и независимы с $\varepsilon_1(t)$. Тогда

$$M(u(t,x_1,x_2))=$$
$$=Mu_0(x_1,x_2)\overset{x}{*}F^{-1}_{\xi_1\xi_2}\Big[\psi_{\varepsilon_1}(i(\xi_1^2+\xi_2^2)\chi(t_0,t))\Big](x_1,x_2)\overset{x}{*}$$
$$\overset{x}{*}\Bigg(\exp(\int_{t_0}^{t} M\varepsilon_3(s)ds+A(t,t_0)(x_1+\int_{to}^{t} M\varepsilon_2(s)ds)$$
$$-C(t,t_0)\,|\,x_1+\int_{t0}^{t} M\varepsilon_2(s)ds\,|)D(t,t_0)^{-1}\times$$
$$\times\delta(x_1+x_2+2\int_{t_0}^{t} M\varepsilon_2(s)ds)\Bigg),\tag{5}$$

где $\psi_{\varepsilon_1}(v)$ — характеристический функционал процесса $\varepsilon_1(t)$,

$$A(t,t_0)=\frac{B_{12}(t,t_0)}{B_{11}(t,t_0)(1-B_{22}(t,t_0))},$$
$$B_{ij}(t,t_0)=\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} b_{ij}(s_1,s_2)\,ds_1ds_2,$$
$$(C(t,t_0))^2=\frac{1}{B_{11}(t,t_0)}+(A(t,t_0))^2,$$
$$D(t,t_0)=2C(t,t_0)B_{11}(t,t_0)(1-B_{22}(t,t_0)).$$

Доказательство. В силу независимости случайных процессов $\varepsilon_2(t)$, $\varepsilon_3(t)$ с процессом $\varepsilon_1(t)$, значение характеристического функционала можно записать в виде

$$\psi(i(\xi_1^2+\xi_2^2)\chi(t_0,t),-(\xi_1+\xi_2)\chi(t_0,t),-i\chi(t_0,t))=$$
$$=\psi_{\varepsilon_1}(i(\xi_1^2+\xi_2^2)\chi(t_0,t))\cdot$$
$$\cdot\psi_{\varepsilon_2\varepsilon_3}(-(\xi_1+\xi_2)\chi(t_0,t),-i\chi(t_0,t)),$$

следовательно

$$F^{-1}_{\xi_1\xi_2}\Big[\psi(i(\xi_1^2+\xi_2^2)\chi(t_0,t),$$
$$-(\xi_1+\xi_2)\chi(t_0,t),-i\chi(t_0,t))\Big](x_1,x_2)=$$
$$=F^{-1}_{\xi_1\xi_2}\Big[\psi_{\varepsilon_1}(i(\xi_1^2+\xi_2^2)\chi(t_0,t))\Big](x_1,x_2)\overset{x}{*}$$
$$\overset{x}{*}F^{-1}_{\xi_1\xi_2}\Big[\psi_{\varepsilon_2\varepsilon_3}(-(\xi_1+\xi_2)\chi(t_0,t),-i\chi(t_0,t))\Big](x_1,x_2).\tag{6}$$

Введем дополнительные обозначения

$$\varphi_1(v_1,v_2)=\exp(i\int_T(\xi_1(s)v_1(s)+\xi_2(s)v_2(s))ds),$$
$$\varphi_2(v_1,v_2)=(1+\int_T\int_T \langle B(s_1,s_2)v(s_1),v(s_2)\rangle\,ds_1ds_2+$$
$$+\int_T\int_T b_{11}(s_1,s_2)v_1(s_1)v_1(s_2)\,ds_1ds_2\times$$
$$\times\int_T\int_T b_{22}(s_1,s_2)v_2(s_1)v_2(s_2)\,ds_1ds_2)^{-1}.$$

Тогда справедливо равенство $\psi_{\varepsilon_2\varepsilon_3}(v_1,v_2)=\varphi_1(v_1,v_2)\varphi_2(v_1,v_2)$,

$$F^{-1}_{\xi_1\xi_2}\left[\psi_{\varepsilon_2\varepsilon_3}(-(\xi_1+\xi_2)\chi(t_0,t),-i\chi(t_0,t))\right](x_1,x_2)=$$
$$=F^{-1}_{\xi_1\xi_2}\left[\varphi_1(i(\xi_1^2+\xi_2^2)\chi(t_0,t),-i\chi(t_0,t))\right](x_1,x_2)\mathop{*}^{x}$$
$$\mathop{*}^{x}F^{-1}_{\xi_1\xi_2}\left[\varphi_2(i(\xi_1^2+\xi_2^2)\chi(t_0,t),-i\chi(t_0,t))\right](x_1,x_2).$$

Вычислим

$$F^{-1}_{\xi_1\xi_2}[\varphi_1(i(\xi_1^2+\xi_2^2)\chi(t_0,t),-i\chi(t_0,t))](x_1,x_2)=$$
$$=F^{-1}_{\xi_1}[F^{-1}_{\xi_2}[\exp(-i(\xi_1+\xi_2)\int_{t_0}^{t}M\varepsilon_2(s)\,ds+$$
$$+\int_{t_0}^{t}M\varepsilon_3(s)\,ds)](x_2)](x_1)=$$
$$=F^{-1}_{\xi_1}[\exp(-i\xi_1\int_{t_0}^{t}M\varepsilon_2(s)\,ds+\int_{t_0}^{t}M\varepsilon_3(s)\,ds)](x_1)\times$$
$$\times F^{-1}_{\xi_2}[\exp(-i\xi_2\int_{t_0}^{t}M\varepsilon_2(s)\,ds)](x_2)=$$
$$=\exp(\int_{t_0}^{t}M\varepsilon_3(s)\,ds)\times$$
$$\times\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\cdot\delta(-x_1-i(-i\int_{t_0}^{t}M\varepsilon_2(s)\,ds))\times$$
$$\times\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\cdot\delta(-x_2-i(-i\int_{t_0}^{t}M\varepsilon_2(s)\,ds))=$$
$$=\exp(\int_{t_0}^{t}M\varepsilon_3(s)\,ds)\delta(x_1+\int_{t_0}^{t}M\varepsilon_2(s)\,ds)\delta(x_2+$$
$$+\int_{t_0}^{t}M\varepsilon_2(s)\,ds).$$

Предварительно введя обозначение

$$B_{ij}(t,t_0)=\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}b_{ij}(s_1,s_2)\,ds_1ds_2,$$

найдем $F^{-1}_{\xi_1\xi_2}[\varphi_2(i(\xi_1^2+\xi_2^2)\chi(t_0,t),-i\chi(t_0,t))](x_1,x_2)$.

Сначала проведем некоторые преобразования

$$\varphi_2(i(\xi_1^2+\xi_2^2)\chi(t_0,t),-i\chi(t_0,t))=$$
$$=(1+(\xi_1+\xi_2)^2B_{11}(t,t_0)+$$
$$+2i(\xi_1+\xi_2)B_{12}(t,t_0)-B_{22}(t,t_0)-$$
$$-(\xi_1+\xi_2)^2B_{11}(t,t_0)B_{22}(t,t_0))^{-1}=$$
$$=[B_{11}(t,t_0)(1-B_{22}(t,t_0))]^{-1}\times$$
$$\times[(\xi_1+\xi_2)^2+2\frac{iB_{12}(t,t_0)}{B_{11}(t,t_0)(1-B_{22}(t,t_0))}+$$
$$+\frac{1-B_{22}(t,t_0)}{B_{11}(t,t_0)(1-B_{22}(t,t_0))}]^{-1}=$$
$$=[B_{11}(t,t_0)(1-B_{22}(t,t_0))]^{-1}\times[(\xi_1+\xi_2+$$
$$+\frac{iB_{12}(t,t_0)}{B_{11}(t,t_0)(1-B_{22}(t,t_0))})^2+$$
$$+\frac{(B_{12}(t,t_0))^2}{B_{11}(t,t_0)(1-B_{22}(t,t_0))^2}+\frac{1}{B_{11}(t,t_0)}]^{-1}=$$
$$=[B_{11}(t,t_0)(1-B_{22}(t,t_0))]^{-1}[(\xi_1+\xi_2+$$
$$+iA(t,t_0))^2+(C(t,t_0))^2]^{-1},$$

где

$$A(t,t_0)=\frac{B_{12}(t,t_0)}{B_{11}(t,t_0)(1-B_{22}(t,t_0))},$$
$$(C(t,t_0))^2=\frac{1}{B_{11}(t,t_0)}+(A(t,t_0))^2.$$

По свойствам преобразования Фурье, получим

$$F^{-1}_{\xi_1}[\varphi_2(i(\xi_1^2+\xi_2^2)\chi(t_0,t),-i\chi(t_0,t))](x_1)=$$
$$=[B_{11}(t,t_0)(1-B_{22}(t,t_0))]^{-1}\times$$
$$\times\frac{1}{2\pi}\cdot\exp(-ix_1(iA(t,t_0)+\xi_2))\cdot$$
$$\cdot\frac{\pi}{C(t,t_0)}\exp(-C(t,t_0)\,|\,x_1\,|)=$$
$$=\frac{\exp(A(t,t_0)x_1-C(t,t_0)\,|\,x_1\,|)}{D(t,t_0)}\cdot\exp(-ix_1\xi_2),$$

где

$$D(t,t_0)=2C(t,t_0)B_{11}(t,t_0)(1-B_{22}(t,t_0)).$$

Далее

$$F^{-1}_{\xi_1\xi_2}[\varphi_2(i(\xi_1^2+\xi_2^2)\chi(t_0,t),-i\chi(t_0,t))](x_1,x_2)=$$
$$=F^{-1}_{\xi_2}[F^{-1}_{\xi_1}[\varphi_2(i(\xi_1^2+\xi_2^2)\chi(t_0,t),-i\chi(t_0,t))](x_1)](x_2)=$$
$$=F^{-1}_{\xi_2}[\frac{\exp(A(t,t_0)x_1-C(t,t_0)\,|\,x_1\,|)}{D(t,t_0)}\cdot$$
$$\cdot\exp(-ix_1\xi_2)](x_2)=$$
$$=\frac{\exp(A(t,t_0)x_1-C(t,t_0)\,|\,x_1\,|)}{D(t,t_0)}\cdot$$
$$\cdot F^{-1}_{\xi_2}[\exp(-ix_1\xi_2)](x_2)=$$
$$=\frac{\exp(A(t,t_0)x_1-C(t,t_0)\,|\,x_1\,|)}{D(t,t_0)}\delta(x_1+x_2).$$

Объединяя полученные результаты, запишем

$$F^{-1}_{\xi_1\xi_2}[\psi_{\varepsilon_2\varepsilon_3}(i(\xi_1^2+\xi_2^2)\chi(t_0,t),-i\chi(t_0,t))](x_1,x_2)=$$
$$=F^{-1}_{\xi_1\xi_2}[\varphi_1(i(\xi_1^2+\xi_2^2)\chi(t_0,t),-i\chi(t_0,t))\times$$
$$\times\varphi_2(i(\xi_1^2+\xi_2^2)\chi(t_0,t),-i\chi(t_0,t))](x_1,x_2)=$$
$$=F^{-1}_{\xi_1\xi_2}[\varphi_1(i(\xi_1^2+\xi_2^2)\chi(t_0,t),-i\chi(t_0,t))](x_1,x_2)\mathop{*}^{x}$$

$$ {}^{x}_{*}F^{-1}_{\xi_1\xi_2}[\varphi_2(i(\xi_1^2+\xi_2^2)\chi(t_0,t),-i\chi(t_0,t))](x_1,x_2)= $$

$$ =\exp(\int_{t_0}^{t} M\varepsilon_3(s)\,ds)\delta(x_1+ $$

$$ +\int_{t_0}^{t} M\varepsilon_2(s)\,ds)\delta(x_2+\int_{t_0}^{t} M\varepsilon_2(s)\,ds)^{x}_{*} $$

$$ {}^{x}_{*}\frac{\exp(A(t,t_0)x_1-C(t,t_0)\mid x_1\mid)}{D(t,t_0)}\delta(x_1+x_2)= $$

$$ =\exp(\int_{t_0}^{t} M\varepsilon_3(s)\,ds)+A(t,t_0)(x_1+\int_{t_0}^{t} M\varepsilon_2(s)\,ds)- $$

$$ -C(t,t_0)\mid x_1+\int_{t_0}^{t} M\varepsilon_2(s)\,ds\mid)D(t,t_0)^{-1}\times $$

$$ \times\delta(x_1+x_2+2\int_{t_0}^{t} M\varepsilon_2(s)ds). $$

С учетом (6), получаем доказываемое равенство. Теорема доказана.

Покажем, что в частных случаях в формуле (5) можно произвести дальнейшие упрощения

Лемма 2. Пусть в задаче случайный процесс $\varepsilon_1(t)$ задан соотношением

$$ \varepsilon_1(t)=\begin{cases} g_1(t), p,\\ g_2(t), q=1-p,\end{cases} \text{где}\quad g_i:T\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}, i=\overline{1,2}, $$

$$ F^{-1}_{\xi_1\xi_2}[\psi_{\varepsilon_1}(i(\xi_1^2+\xi_2^2)\chi(t_0,t))](x_1,x_2)= $$

$$ =\frac{p}{4\pi\int_{t_0}^{t} g_1(s)\,ds}\exp\left(-\frac{x_1^2+x_2^2}{4\int_{t_0}^{t} g_1(s)\,ds}\right)+ $$

$$ +\frac{1-p}{4\pi\int_{t_0}^{t} g_2(s)\,ds}\exp\left(-\frac{x_1^2+x_2^2}{4\int_{t_0}^{t} g_2(s)\,ds}\right). $$

Доказательство. По определению характеристического функционала

$$ \psi_{\varepsilon_1}(v)=M\left[\exp(i\int_T \varepsilon_1(s)v(s)\,ds)\right]= $$

$$ =p\exp\left(i\int_T g_1(s)v(s)ds\right)+(1-p)\exp\left(i\int_T g_2(s)v(s)ds\right), $$

отсюда

$$ \psi_{\varepsilon_1}(i(\xi_1^2+\xi_2^2)\chi(t_0,t))=p\exp\left(-(\xi_1^2+\xi_2^2)\int_{t_0}^{t} g_1(s)ds\right)+ $$

$$ +(1-p)\exp\left(-(\xi_1^2+\xi_2^2)\int_{t_0}^{t} g_2(s)\,ds\right). $$

Вычислим обратное преобразование Фурье по переменной ξ_2

$$ F^{-1}_{\xi_2}[\psi_{\varepsilon_1}(i(\xi_1^2+\xi_2^2)\chi(t_0,t))](x_2)= $$

$$ =F^{-1}_{\xi_2}[p\exp(-(\xi_1^2+\xi_2^2)\int_{t_0}^{t} g_1(s)\,ds)+ $$

$$ +(1-p)\exp(-(\xi_1^2+\xi_2^2)\int_{t_0}^{t} g_2(s)\,ds)](x_2)= $$

$$ =p\exp(-\xi_1^2\int_{t_0}^{t} g_1(s)\,ds)\times $$

$$ \times\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\int_{t_0}^{t} g_1(s)\,ds}}\exp(-\frac{x_2^2}{4\int_{t_0}^{t} g_1(s)\,ds})+ $$

$$ +(1-p)\exp(-\xi_1^2\int_{t_0}^{t} g_2(s)\,ds)\times $$

$$ \times\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\int_{t_0}^{t} g_2(s)\,ds}}\exp(-\frac{x_2^2}{4\int_{t_0}^{t} g_2(s)\,ds}). $$

Найдем теперь

$$ F^{-1}_{\xi_1\xi_2}[\psi_{\varepsilon_1}(i(\xi_1^2+\xi_2^2)\chi(t_0,t))](x_1,x_2)= $$

$$ =F^{-1}_{\xi_1}[F^{-1}_{\xi_2}[\psi_{\varepsilon_1}(i(\xi_1^2+\xi_2^2)\chi(t_0,t))](x_2)](x_1)= $$

$$ =p\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\int_{t_0}^{t} g_1(s)\,ds}}\exp(-\frac{x_2^2}{4\int_{t_0}^{t} g_1(s)\,ds})\cdot $$

$$ \cdot F^{-1}_{\xi_1}[\exp(-\xi_1^2\int_{t_0}^{t} g_1(s)\,ds)](x_1)+ $$

$$ +(1-p)\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\int_{t_0}^{t} g_2(s)\,ds}}\exp(-\frac{x_2^2}{4\int_{t_0}^{t} g_2(s)\,ds})\times $$

$$ \times F^{-1}_{\xi_1}[\exp(-\xi_1^2\int_{t_0}^{t} g_2(s)\,ds)](x_1)= $$

$$ =p\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\int_{t_0}^{t} g_1(s)\,ds}}\exp(-\frac{x_2^2}{4\int_{t_0}^{t} g_1(s)\,ds})\cdot $$

$$ \cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\int_{t_0}^{t} g_1(s)\,ds}}\exp(-\frac{x_1^2}{4\int_{t_0}^{t} g_1(s)\,ds})+ $$

$$ +(1-p)\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\int_{t_0}^{t} g_2(s)\,ds}}\exp(-\frac{x_2^2}{4\int_{t_0}^{t} g_2(s)\,ds})\times $$

$$\times \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\int\limits_{t_0}^{t} g_2(s)\,ds}} \exp(-\frac{x_1^2}{4\int\limits_{t_0}^{t} g_2(s)\,ds}) =$$

$$= \frac{p}{4\pi\int\limits_{t_0}^{t} g_1(s)\,ds} \exp(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{4\int\limits_{t_0}^{t} g_1(s)\,ds}) +$$

$$+ \frac{1-p}{4\pi\int\limits_{t_0}^{t} g_2(s)\,ds} \exp(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{4\int\limits_{t_0}^{t} g_2(s)\,ds}).$$

Лемма доказана.

Подставив данный результат в (5), получим некоторое упрощение формулы для нахождения математического ожидания.

Автор выражает признательность своему научному руководителю В. Г. Задорожнему за ценные замечания и советы при подготовке данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Розанов Ю. А.* Случайные поля и стохастические уравнения с частными производными / Ю. А. Розанов. М.: Наука, 1995. 250 с.

2. *Дубровский И. О.* О математическом ожидании решения двумерного уравнения диффузии / И. О. Дубровский, В. Г. Задорожний // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сб. науч. тр. Воронеж, 2009. С. 174—177.

3. *Задорожний В. Г.* Методы варационного анализа / В. Г. Задорожний. РХД, М.; Ижевск, 2006. 316 с.

4. *Данфорд Н.* Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, М.: ИЛ, 1962. 895 с.

Дубровский И. О., аспирант кафедры нелинейных колебаний, Воронежский государственный университет

E-mail: 2003igor@mail.ru

Тел.: 8 (473) 220-86-49

Dubrovskiy I. O., post-graduate student, chair of nonlinear oscillations, Voronezh State University

E-mail: 2003igor@mail.ru

Tel.: 8 (473) 220-86-49