

О ВЛИЯНИИ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ НА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТРУБ С ВКЛЮЧЕНИЕМ

Д. В. Гоцев, Л. Г. Плотников

*Военный авиационный инженерный университет (г. Воронеж)
Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 30.03.2011 г.

Аннотация. В рамках метода малого параметра исследуется влияние силы тяжести на напряженно-деформированное состояние цилиндрической трубы с упруго-вязко-пластическим включением, находящейся под действием равномерной радиальной внешней и внутренней нагрузок. В пластической зоне материала трубы, описывается соотношениями модели А.Н. Спорыхина, учитывающей одновременно упругие, вязкие и пластические свойства среды с физико-механическими параметрами отличными от параметров материала включения. Дана оценка влияния силы тяжести и физико-механических параметров среды на развитие упруго-пластической границы и напряженное состояние конструкции.

Ключевые слова: пластичность, упругость, упруго-вязко-пластическая модель, напряженно-деформированное состояние, сила тяжести, включение.

Abstract. As part of the small parameter method examines the effect of gravity on the stress-strain state of a cylindrical tube with an elastic-visco-plastic inclusion under the action of a uniform radial internal and external loads. In the plastic zone of the pipe material, the model described by the relations A.N. Sporykhin that takes into account both elastic and viscous and plastic properties of the medium with the physical and mechanical parameters of the non-inclusion of material parameters. The estimation of the influence of gravity and the physical and mechanical parameters of the environment on the development of elastic-plastic boundary and the stress state of the structure.

Keywords: Plasticity, elasticity, elasto-visco-plastic model, the stress-strain state, the force of gravity, the inclusion.

Известно, что хотя собственный вес является не основным фактором, влияющим на напряженно-деформированное состояние (НДС) в некоторых приложениях теории грунтового давления, а также при решении задач нахождения НДС толстостенных конструкций по сравнению с нагрузками от действия внутреннего и внешнего давлений [1, 2]. Однако как следует из работы [3], его учет оказывает влияние на распределение поля напряжений в приконтурной области пространства, ослабленного цилиндрической полостью, когда материал в пластической зоне описывался соотношениями идеальной пластичности [4].

В настоящей работе исследуется напряженно-деформированное состояние горизонтальной толстостенной трубы с цилиндрическим включением с учетом собственного веса в случае, когда в пластической зоне материал трубы и включения описывается соотношениями

упрочняющегося упруго-вязко-пластического тела [5].

В этом случае функция нагружения имеет вид

$$F = (S_i^j - c\epsilon_i^{jp} - \eta\dot{\epsilon}_i^{jp})(S_j^i - c\epsilon_j^{ip} - \eta\dot{\epsilon}_j^{ip}) - k^2, \quad (1)$$

где c — коэффициент упрочнения; k — предел текучести, η — коэффициент вязкости; $S_i^j = \sigma_i^j - \sigma\delta_i^j$ — девиатор тензора напряжений; $\sigma = \sigma_k^k/3$; δ_i^j — символ Кронекера; ϵ_i^{jp} — компоненты тензора пластических деформаций; $\dot{\epsilon}_i^{jp}$ — компоненты тензора скоростей пластических деформаций. Индексы i, j принимают значения от 1 до 3. Здесь и далее верхние индексы « p » или « e » обозначают величины, относящиеся к пластической или упругой областям соответственно.

Рассмотрим круговую цилиндрическую толстостенную трубу с внутренним радиусом b_0 и внешним b_1 , содержащую круговое цилиндрическое включение с внешним радиусом b_0

и внутренним a_0 . При этом физико-механические параметры для материалов трубы и включения различны (рис. 1).

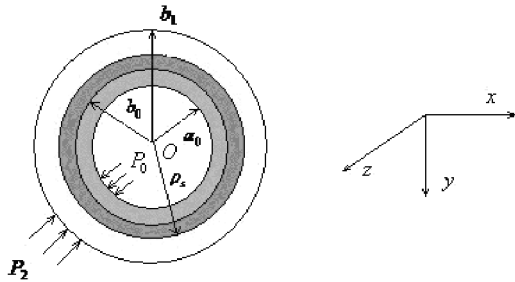


Рис. 1. Толстостенная труба с цилиндрическим включением

Описанную выше составную конструкцию будем рассматривать как кусочно-однородное тело. То есть на границе контакта труба-включение имеет место равенство перемещений, напряжений и отсутствие взаимного давления.

На внутреннем контуре включения приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивностью P_0 , а на внешнем контуре трубы — нагрузка интенсивностью P_2 . Пусть напряжение σ_ρ на границе контакта труба - включение принимает значение P_1 , которое определяется в дальнейшем в процессе решения задачи. Величины P_0 и P_2 предполагаются такими, что цилиндрическое включение целиком находится в пластическом состоянии, а в трубе пластическая зона полностью охватывает внутренний контур. Кроме того, предположим, что невозмущенное напряженно-деформированное состояние, обусловленное всесторонним внешним и внутренним давлениями без учета собственного веса, является осесимметричным.

Решение задачи проведем в безразмерных величинах, отнеся все величины, имеющие размерность напряжения к величине предела текучести материала трубы k_t , т. е. $q_0 = \frac{P_0}{k_t}$, $q_1 = \frac{P_1}{k_t}$ и $q_2 = \frac{P_2}{k_t}$, а все линейные размеры к радиусу пластической зоны трубы в исходном нулевом приближении $\rho_s^{(0)}$, т. е. $\alpha_0 = \frac{a_0}{\rho_s^{(0)}}$, $\beta_0 = \frac{b_0}{\rho_s^{(0)}}$, $\rho = \frac{r}{\rho_s^{(0)}}$ и $\beta_1 = \frac{b_1}{\rho_s^{(0)}}$.

При определении напряженного состояния все функции представляются в виде рядов [6] по степеням малого параметра δ , характеризующего отклонение от исходного невозмущенного состояния

$$\{\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \varepsilon_{ij}^e, \dot{\varepsilon}_{ij}^p, \dots\} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \{\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \varepsilon_{ij}^e, \dot{\varepsilon}_{ij}^p, \dots\}. \quad (2)$$

В качестве нулевого приближения (невозмущенное состояние) выберем решение задачи о нахождении напряженно-деформированного состояния толстостенной цилиндрической трубы с цилиндрическим включением находящихся под действием сжимающих нагрузок q_0 и q_2 без учета силы тяжести, которое согласно [7] имеет вид:

— в области включения при $\alpha_0 \leq \rho \leq \beta_0$

$$\sigma_{\rho b}^p = -q_0 + 2x_b k_b e^{-\xi_b t} \ln \frac{\rho}{\alpha_0} + \frac{2\mu_b}{2\mu_b + c_b} (1 - e^{-\xi_b t}) \times$$

$$\times \left[2x_b k_b \ln \frac{\rho}{\alpha_0} + \frac{x_b}{2\mu_b} c_b \left(\frac{1}{\alpha_0^2} - \frac{1}{\rho^2} \right) \right],$$

$$\sigma_{\theta b}^p = -q_0 + 2x_b k_b e^{-\xi_b t} \left(\ln \frac{\rho}{\alpha_0} + 1 \right) + \frac{2\mu_b}{2\mu_b + c_b} \times$$

$$\times (1 - e^{-\xi_b t}) \left[2x_b k_b \left(\ln \frac{\rho}{\alpha_0} + 1 \right) + \frac{x_b}{2\mu_b} c_b \left(\frac{1}{\alpha_0^2} + \frac{1}{\rho^2} \right) \right],$$

$$\tau_{\rho \theta b}^p = 0, \quad (3)$$

где $x_b = \text{sign}(q_0 - q_1)$, $q_1 = \sigma_{\rho b}^p|_{\rho=\beta_0}$, $\xi_b = \frac{2\mu_b + c_b}{\eta_b}$,

μ_b — модуль сдвига для материала включения.

Здесь и далее индекс «в» у величин обозначает их принадлежность к включению, а индекс «т» — трубе. Если в соотношениях отсутствуют эти индексы, то они верны как для включения, так и для трубы, при этом для областей включения и трубы у величин надо приписывать индексы «в» и «т» соответственно.

— в пластической области трубы при $\beta_0 \leq \rho \leq 1$

$$\sigma_{\rho t}^p = -q_1 + \frac{2x_t}{2\mu_t + c_t} \times$$

$$\times \left[\frac{c_t}{2} (1 - e^{-\xi_t t}) \left(\frac{1}{\beta_0^2} - \frac{1}{\rho^2} \right) + (c_t e^{-\xi_t t} + 2\mu_t) \ln \frac{\rho}{\beta_0} \right],$$

$$\sigma_{\theta r}^p = -q_1 + \frac{2x_r}{2\mu_r + c_r} \left[\frac{c_r}{2} (1 - e^{-\xi_r t}) \left(\frac{1}{\beta_0^2} + \frac{1}{\rho^2} \right) + (c_r e^{-\xi_r t} + 2\mu_r) \left(1 + \ln \frac{\rho}{\beta_0} \right) \right], \quad (4)$$

$$\tau_{\rho\theta r}^p = 0,$$

где

$$x_r = \text{sign}(q_1 - q_2), \quad \xi_r = \frac{2\mu_r + c_r}{\eta_r}.$$

— в упругой зоне трубы при $1 \leq \rho \leq \beta_1$

$$\sigma_{\rho r}^e = -q_2 + \frac{x_r}{\beta_1^2} \left(1 - \frac{\beta_1^2}{\rho^2} \right),$$

$$\sigma_{\theta r}^e = -q_2 + \frac{x_r}{\beta_1^2} \left(1 + \frac{\beta_1^2}{\rho^2} \right), \quad \tau_{\rho\theta r}^e = 0. \quad (5)$$

Пластические деформации для трубы и включения имеют вид

$$\varepsilon_{\theta r}^p = -\varepsilon_{\rho r}^p = \frac{x_r k_r (1 - e^{-\xi_r t})}{2\mu_r + c_r} \left(\frac{1}{\rho^2} - 1 \right),$$

$$\varepsilon_{\theta r}^p = -\varepsilon_{\rho r}^p = \frac{\mu_r (1 - e^{-\xi_r t})}{2\mu_r + c_r} \left(\frac{x_r}{\mu_r \rho^2} - \frac{x_r k_r}{\mu_r} \right). \quad (6)$$

Перемещения в трубе и включении, а также деформации в упругой области трубы определяются из соотношений

$$u_\rho = \frac{x_r}{2\mu_r \rho}, \quad \varepsilon_\theta = -\varepsilon_\rho = \frac{x_r}{2\mu_r \rho^2}. \quad (7)$$

Упругопластическая граница в трубе в нулевом приближении определяется из уравнения

$$\left(-q_0 + 2x_b k_b e^{-\xi_b t} \ln \frac{\beta_0}{\alpha_0} + \frac{2\mu_b}{2\mu_b + c_b} (1 - e^{-\xi_b t}) \right) \times$$

$$\times \left[2x_b k_b \ln \frac{\beta_0}{\alpha_0} + \frac{x_b}{2\mu_b} c_b \left(\frac{1}{\alpha_0^2} - \frac{1}{\beta_0^2} \right) \right] -$$

$$-q_2 + \frac{x_r}{\beta_1^2} (2\mu_r + c_r) - x_r \times$$

$$\times \left(\left(1 + 2 \ln \frac{1}{\beta_0} \right) (2\mu_r + c_r e^{-\xi_r t}) + \frac{c_r}{\beta_0^2} (1 - e^{-\xi_r t}) \right) = 0. \quad (8)$$

Соотношения (3)—(8) записаны в безразмерном виде. При этом величины имеющие размерность напряжений отнесены к величине предела текучести k_r трубы, т. е. $q_0 = \frac{P_0}{k_r}$,

$q_1 = \frac{P_1}{k_r}$, $q_2 = \frac{P_2}{k_r}$ и т.д., а все линейные размеры к радиусу пластической зоны трубы в исходном нулевом приближении $\rho_s^{(0)}$, т. е. $\alpha_0 = \frac{a_0}{\rho_s^{(0)}}$,

$$\beta_0 = \frac{b_0}{\rho_s^{(0)}}, \quad \rho = \frac{\rho}{\rho_s^{(0)}} \quad \text{и} \quad \beta_1 = \frac{b_1}{\rho_s^{(0)}}.$$

Для определения нулевого приближения (3)—(8) этой задачи использовались уравнения равновесия, условие пластичности (1), соотношения, связывающие полные упругие и пластические деформации, общие уравнения теории упругости, граничные условия, условия сопряжения решений на границе труба — включение и на границе раздела сред упругого и пластического деформирования в трубе.

Уравнения равновесия в декартовой системе координат с учетом силы тяжести имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \gamma, \quad (9)$$

где γ — объемная сила — для включения и трубы различна.

Частное решение системы уравнений (9), согласно [3] выберем в виде

$$\sigma_x = qy, \quad \sigma_y = \gamma y, \quad \tau_{xy} = 0, \quad (10)$$

где γ, q — const.

Уравнения равновесия (9) в полярной системе координат (ρ, θ) имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = \gamma \sin \theta,$$

$$\frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} = \gamma \cos \theta. \quad (11)$$

Условие пластичности (1) и частное решение (10) в полярной системе координат запишутся в форме

$$\left(\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} - c\varepsilon_\rho^p - \eta \dot{\varepsilon}_\rho^p \right)^2 +$$

$$+ (\tau_{\rho\theta} - c\varepsilon_{\rho\theta}^p - \eta \dot{\varepsilon}_{\rho\theta}^p) = 4k^2 \quad (12)$$

$$\sigma_\rho = \frac{q + 3\gamma}{4} \rho \sin \theta + \frac{q - \gamma}{4} \rho \sin 3\theta,$$

$$\sigma_\theta = \frac{3q + \gamma}{4} \rho \sin \theta - \frac{q - \gamma}{4} \rho \sin 3\theta, \quad (13)$$

$$\tau_{\rho\theta} = \frac{\gamma - q}{4} \rho (\cos \theta - \cos 3\theta).$$

Влияние силы тяжести учтем в первом приближении, положив [3]

$$q = \delta c_1, \gamma = \delta c_2, \quad (14)$$

где c_1, c_2 — const.

Следуя алгоритму, предложенному в работе [8] при учете (2), (11), (12) и (14) поле напряжений во включении и в пластической области трубы в рамках первой итерации первого приближения определяется из системы уравнений

$$\frac{\partial \sigma_{\rho(1)}^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta(1)}^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{\rho(1)}^{(1)} - \sigma_{\theta(1)}^{(1)}}{\rho} = c_2 \sin \theta, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \tau_{\rho\theta(1)}^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\theta(1)}^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta(1)}^{(1)}}{\rho} = c_2 \cos \theta, \quad (16)$$

В (15), (16) и далее нижний индекс в скобках указывает номер итерации, верхний — номер приближения.

В первом приближении на внутреннем контуре цилиндрического включения при $\rho = \alpha_0$ будет иметь место следующее граничное условие

$$\sigma_{\rho(1)\text{в}}^{(1)} = 0. \quad (17)$$

Из соотношений (15), (16) при условии (17) поле напряжений во включении в первом приближении находим в виде

$$\sigma_{\rho(1)\text{в}}^{p(1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{W}{\alpha_0^2} - \frac{W}{\rho^2} - 2V \ln \frac{\rho}{\alpha_0} \right) + \frac{5c_{2\text{в}} - c_{1\text{в}}}{4} \left(\rho - \frac{\alpha_0^2}{\rho} \right) \sin \theta + \left(\frac{3(c_{1\text{в}} - c_{2\text{в}})}{4} \rho + \frac{1}{\rho} \left((-8A_{1\text{в}} + \sqrt{8}A_{2\text{в}}) \cos(\sqrt{8} \ln \rho) + (-\sqrt{8}A_{1\text{в}} - 8A_{2\text{в}}) \sin(\sqrt{8} \ln \rho) \right) \right) \sin 3\theta, \quad (18)$$

$$\sigma_{\theta(1)\text{в}}^{p(1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{W}{\alpha_0^2} + \frac{W}{\rho^2} - 2V - 2V \ln \frac{\rho}{\alpha_0} \right) + \left(\frac{7c_{2\text{в}} - 3c_{1\text{в}}}{4} \rho + \frac{c_{1\text{в}} - 5c_{2\text{в}}}{4} \frac{\alpha_0^2}{\rho} \right) \sin \theta + \left(\frac{3(c_{2\text{в}} - c_{1\text{в}})}{4} \rho + \frac{1}{\rho} \left((-8A_{1\text{в}} + \sqrt{8}A_{2\text{в}}) \cos(\sqrt{8} \ln \rho) + (-\sqrt{8}A_{1\text{в}} - 8A_{2\text{в}}) \sin(\sqrt{8} \ln \rho) \right) \right) \sin 3\theta, \quad (18)$$

$$\tau_{\rho\theta(1)\text{в}}^{p(1)} = \left(\frac{c_{1\text{в}} - c_{2\text{в}}}{4} \rho - \frac{c_{1\text{в}} - 5c_{2\text{в}}}{4} \frac{\alpha_0^2}{\rho} \right) \cos \theta + \left(\frac{3(c_{1\text{в}} - c_{2\text{в}})}{4} \rho - \frac{1}{\rho} (3\sqrt{8}(A_{2\text{в}} \cos(\sqrt{8} \ln \rho) - A_{1\text{в}} \sin(\sqrt{8} \ln \rho))) \right) \cos 3\theta,$$

$$W = \left(\frac{2c_{\text{в}}\mu_{\text{в}}(1 - e^{-\xi_{\text{в}}t})}{2\mu_{\text{в}} + c_{\text{в}}} + 2\mu_{\text{в}}e^{-\xi_{\text{в}}t} \right) \frac{x_{\text{в}}}{\mu_{\text{в}}},$$

$$V = \left(\frac{2c_{\text{в}}\mu_{\text{в}}(1 - e^{-\xi_{\text{в}}t})}{2\mu_{\text{в}} + c_{\text{в}}} + 2\mu_{\text{в}}e^{-\xi_{\text{в}}t} \right) \frac{x_{\text{в}}k_{\text{в}}}{\mu_{\text{в}}}.$$

Константы $A_{1\text{в}}$ и $A_{2\text{в}}$ определяются из условия того, что в соотношениях (18) составляющие напряжений при $\sin 3\theta$ и $\cos 3\theta$ на внутреннем контуре включения при $\rho = \alpha_0$ являются самоуравновешивающимися и должны обращаться в ноль.

На границе контакта включения и трубы при $\rho = \beta_0$ будет иметь место следующее граничное условие

$$\sigma_{\rho(1)\text{т}}^{p(1)} \Big|_{\rho=\beta_0} = \sigma_{\rho(1)\text{в}}^{p(1)} \Big|_{\rho=\beta_0} = B_0 + B_1 \sin \theta + B_3 \sin 3\theta, \quad (19)$$

$$B_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{W}{\alpha_0^2} - \frac{W}{\beta_0^2} - 2V \ln \frac{\beta_0}{\alpha_0} \right),$$

$$B_1 = \frac{5c_{2\text{т}} - c_{1\text{т}}}{4} \left(\beta_0 - \frac{\alpha_0^2}{\beta_0} \right),$$

$$B_3 = \frac{3(c_{1\text{т}} - c_{2\text{т}})}{4} \beta_0 + \frac{1}{\beta_0} \left((-8A_{1\text{т}} + \sqrt{8}A_{2\text{т}}) \cos(\sqrt{8} \ln \beta_0) - (-\sqrt{8}A_{1\text{т}} + 8A_{2\text{т}}) \sin(\sqrt{8} \ln \beta_0) \right).$$

Поле напряжений в пластической зоне трубы в первом приближении определяется аналогичным образом, что и для пластического включения и с учетом граничного условия (19) примет вид

$$\sigma_{\rho(1)\text{т}}^{p(1)} = \frac{D_{\text{т}}}{2} \left(\frac{1}{\beta_0^2} - \frac{1}{\rho^2} - 2 \ln \frac{\rho}{\beta_0} \right) + B_0 + \left(\frac{5c_{2\text{т}} - c_{1\text{т}}}{4} \left(\rho - \frac{\beta_0^2}{\rho} \right) + \frac{B_1\beta_0}{\rho} \right) \sin \theta + \left(\frac{3(c_{1\text{т}} - c_{2\text{т}})}{4} \rho + \frac{1}{\rho} \left((-8A_{1\text{т}} + \sqrt{8}A_{2\text{т}}) \cos(\sqrt{8} \ln \rho) - ((\sqrt{8}A_{1\text{т}} + 8A_{2\text{т}}) \sin(\sqrt{8} \ln \rho)) \right) \right) \sin 3\theta,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta(1)r}^{p(1)} &= \frac{D_r}{2} \left(\frac{1}{\beta_0^2} + \frac{1}{\rho^2} - 2 - 2 \ln \frac{\rho}{\beta_0} \right) + \\ &+ B_0 + \left(\frac{7c_{2r} - 3c_{1r}}{4} \rho + \frac{c_{1r} - 5c_{2r}}{4} \frac{\beta_0^2}{\rho} + \frac{B_1 \beta_0}{\rho} \right) \sin \theta + \\ &+ \left(\frac{3(c_{2r} - c_{1r})}{4} \rho + \frac{1}{\rho} \left((-8A_{1r} + \sqrt{8}A_{2r}) \cos(\sqrt{8} \ln \rho) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (\sqrt{8}A_{1r} + 8A_{2r}) \sin(\sqrt{8} \ln \rho) \right) \right) \sin 3\theta, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\rho\theta(1)r}^{p(1)} &= \left(\frac{c_{1r} - c_{2r}}{4} \rho - \frac{c_{1r} - 5c_{2r}}{4} \frac{\alpha_0^2}{\rho} - \frac{B_1 \beta_0}{\rho} \right) \cos \theta - \\ &\quad - \left(\frac{3(c_{1r} - c_{2r})}{4} \rho - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\rho} \left(3\sqrt{8}(A_{2r} \cos(\sqrt{8} \ln \rho) - A_{1r} \sin(\sqrt{8} \ln \rho)) \right) \right) \cos 3\theta, \end{aligned}$$

где $D_r = \frac{2c_r}{2\mu_r + c_r} (1 - e^{-\xi_r t})$.

Здесь также постоянные интегрирования A_{1r} и A_{2r} определяются из условия того, что в соотношениях (20) составляющие напряжений при $\sin 3\theta$ и $\cos 3\theta$ на внутреннем контуре трубы при $\rho = \beta_0$ являются самоуравновешивающимися и должны обращаться в ноль.

Из условия непрерывности компонент напряжений на упруго-пластической границе при $\rho = 1$ с учетом (20) получим краевое условие для определения напряжений в упругой области трубы

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho r}^{e(1)} &= a_0'' + b_1'' \sin \theta + b_3'' \sin 3\theta, \\ \tau_{\rho\theta r}^{e(1)} &= a_1''' \cos \theta + a_3''' \cos 3\theta, \end{aligned} \quad (21)$$

где $a_0''' = \frac{D_r}{2} \left(\frac{1}{\beta_0^2} - 1 - 2 \ln \frac{1}{\beta_0} \right) + B_0$,

$$a_1''' = \frac{5c_{2r} - c_{1r}}{4} (1 - \beta_0^2) + B_1 \beta_0,$$

$$a_3''' = \frac{3(c_{1r} - c_{2r})}{4} - 3\sqrt{8}A_{2r}, \quad b_1'' = \frac{5\tilde{n}_{2r} - c_{1r}}{4} (1 - \beta_0^2),$$

$$b_3'' = -8A_{1r} + \sqrt{8}A_{2r} + \frac{3(c_{2r} - c_{1r})}{4}.$$

Граничные условия на внешней стороне трубы при $\rho = \beta_1$, запишем в виде

$$\sigma_{\rho r}^{e(1)} = b_1' \sin \theta, \quad \tau_{\rho\theta r}^{e(1)} = a_1' \cos \theta, \quad (22)$$

где b_1' и a_1' — const.

Распределение поля напряжений в упругой зоне при $1 \leq \rho \leq \beta_1$, следуя [6, 9] и согласно

(21), (22) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho(1)r}^{e(1)} &= \frac{1}{\beta_1^4 - 1} \left(-a_0'' + a_0'' \frac{\beta_1^2}{\rho^2} \right) + \\ &+ \left[\frac{\rho}{\beta_1} b_1 + \frac{(3T_r + 1)}{4T_r (\beta_1^2 + 1)} (b_1'' + a_1''') \left(\frac{1 + \beta_1^2}{\rho} - \frac{\beta_1^2}{\rho^3} - \rho \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\beta_1^4 - 1} (b_1 - b_1'' \beta) \left(\frac{\rho}{\beta_1} - \frac{\beta_1^3}{\rho^3} \right) \right] \sin \theta + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{2N} \{ [3(2 - 3\beta_1^2 + \beta_1^{-6})\rho + 3(4 - 3\beta_1^2 - \beta_1^6)\rho^{-5} + \\ &\quad + (4 - 3\beta_1^{-2} - \beta_1^{-6})\rho^3 + 5(2 - 3\beta_1^{-2} + \beta_1^6)\rho^{-3}] b_3'' - \\ &\quad - [-10 + 9\beta_1^2 + \beta_1^{-6})\rho + (4 + 5\beta_1^6 - 9\beta_1^2)\rho^{-5} - \\ &\quad - ((4 - 5\beta_1^{-2} + \beta_1^{-6})\rho^3 + \\ &\quad + (10 - 5\beta_1^{-2} - 5\beta_1^{-6})\rho^{-3}] a_3''' \} \sin 3\theta, \end{aligned}$$

$$\sigma_{\theta(1)r}^{e(1)} = \frac{1}{\beta_1^2 - 1} \left(-a_0'' - a_0'' \frac{\beta_1^2}{\rho^2} \right) + \quad (23)$$

$$\begin{aligned} &+ \left[3 \frac{\rho}{\beta_1} b_1 + \frac{(3T_r + 1)}{4T_r (\beta_1^2 + 1)} (b_1'' + a_1''') \times \right. \\ &\quad \times \left(-\frac{T_r - 1}{3T_r + 1} \frac{1 + \beta_1^2}{\rho} + \frac{\beta_1^3}{\rho^3} - 3\rho \right) + \\ &\quad \left. + \frac{1}{\beta_1^4 - 1} (b_1 - b_1'' \beta) \left(3 \frac{\rho}{\beta_1} + \frac{\beta_1^3}{\rho^3} \right) \right] \sin \theta + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{2N} \{ [3(-2 + 3\beta_1^2 - \beta_1^{-6})\rho + \\ &\quad + 3(-4 + 3\beta_1^2 + \beta_1^6)\rho^{-5} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\quad 5(-4 + 3\beta_1^{-2} + \beta_1^{-6})\rho^3 + (-2 + 3\beta_1^{-2} - \beta_1^6)\rho^{-3}] b_3'' - \\ &\quad - [(10 - 9\beta_1^2 - \beta_1^{-6})\rho + (-4 + 9\beta_1^2 - 5\beta_1^6)\rho^{-5} + \\ &\quad + (20 - 25\beta_1^{-2} + 5\beta_1^{-6})\rho^3 + \\ &\quad + (-2 + \beta_1^{-2} + \beta_1^6)\rho^{-3}] a_3''' \} \sin 3\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\rho\theta(1)r}^{e(1)} &= - \left[\frac{\rho}{\beta_1} b_1 + \frac{(3T_r + 1)}{4T_r (\beta_1^2 + 1)} (b_1'' + a_1''') \times \right. \\ &\quad \times \left(-\frac{T_r - 1}{3T_r + 1} \frac{1 + \beta_1^2}{\rho} - \frac{\beta_1^2}{\rho^3} - \rho \right) + \\ &\quad \left. + \frac{1}{\beta_1^4 - 1} (b_1 - b_1'' \beta) \left(\frac{\rho}{\beta_1} - \frac{\beta_1^3}{\rho^3} \right) \right] \cos \theta - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \frac{1}{2N} \{ [3(-2 + 3\beta_1^2 - \beta_1^{-6})\rho + 3(4 - 3\beta_1^2 - \beta_1^6)\rho^{-5} + \\ &\quad + 3(-4 + 3\beta_1^{-2} + \beta_1^{-6})\rho^3 + 3(2 - 3\beta_1^{-2} + \beta_1^6)\rho^{-3}] b_3'' + \end{aligned}$$

$$+[(10 - 9\beta_1^2 - \beta_1^{-6})\rho + (4 - 9\beta_1^2 + 5\beta_1^6)\rho^{-5} + (12 - 15\beta_1^{-2} + 3\beta_1^{-6})\rho^3 + (6 - 3\beta_1^{-2} - 3\beta_1^6)\rho^{-3}]a_3^m \} \sin 3\theta,$$

где $T_r = \mu_r^{-1}$, $N = 16 - 9(\beta^{-2} + \beta^2) + (\beta^{-6} + \beta^6)$.

При этом из уравнений равновесия следует

$$(b_1 + a_1')\beta_1 - (b_1'' + a_1''') = 0. \quad (24)$$

Из условий сопряжения компонент тензора напряжений следует, что на невозмущенной упруго-пластической границе имеет место равенство [6]

$$\left[\sigma_{ij}^{(1)} + \frac{d\sigma_{ij}^{(0)}}{d\rho} \rho_{s(1)}^{(1)} \right] = 0. \quad (25)$$

Откуда учитывая (24), (25) получим соотношение для нахождения радиуса упруго-пластической границы $\rho_{s(1)}^{(1)}$ в первом приближении

$$\rho_{s(1)}^{(1)} = M_0 + M_1 \sin \theta + M_3 \sin 3\theta, \quad (26)$$

где

$$M_0 = -\frac{2\mu_r + c_r}{8\mu_r(1 - e^{-\xi_r t})} \left(\frac{2a_0''\beta_1^2}{\beta_1^2 - 1} + B_0 \right),$$

$$M_1 = -\frac{2\mu_r + c_r}{8\mu_r(1 - e^{-\xi_r t})} \times$$

$$\times \left[\frac{7c_{2r} - 3c_{1r}}{4} + \frac{c_{1r} - 5c_{2r}}{4} \beta_0^2 + B_1\beta_0 - \right.$$

$$\left. -3\frac{b_1}{\beta_1} - \frac{(3T_r + 1)}{4T_r(\beta_1^2 + 1)}(b_1'' + a_1''') \times \right.$$

$$\times \left(-\frac{T_r - 1}{3T_r + 1}(1 + \beta_1^2) + \beta_1^2 - 3 \right) -$$

$$\left. -\frac{1}{\beta_1^2 - 1}(b_1 - b_1''\beta_1) \left(\frac{3}{\beta_1} + \beta_1^3 \right) \right]$$

$$M_3 = -\frac{2\mu_r + c_r}{8\mu_r(1 - e^{-\xi_r t})} \left[\frac{3(c_{2r} - c_{1r})}{4} - 8A_{1r} + \sqrt{8}A_{2r} \right.$$

$$- \frac{1}{2N}(-40 + 18\beta_1^{-2} + 18\beta_1^2 + 2\beta_1^6 + 2\beta_1^{-6})b_3'' +$$

$$\left. + \frac{1}{2N}(24 - 24\beta_1^{-2} - 4\beta_1^6 + 4\beta_1^{-6})a_3^m \right].$$

Таким образом, в рамках нулевого и первого приближений (первая итерация), определено поле напряжений в составной конструкции, состоящей из толстостенной цилиндрической трубы с включением, находящейся под

действием сжимающих нагрузок и силы тяжести. При этом в цилиндрическом включении, полностью находящемся под действием указанных сил в пластическом состоянии напряженное состояние описывается соотношениями (9), (18), в области пластического деформирования трубы — формулами (10), (20), а в зоне упругого деформирования — соотношениями (11), (23). Радиус раздела зон упругого и пластического деформирования в трубе находится по формулам (14), (26).

Результаты численного эксперимента представлены на рис. 2—6.

На рис. 2, 3 представлены зависимости радиального напряжения σ_ρ от координаты $\rho \in [\alpha_0, \beta_1]$.

На рис. 2 кривая 1 соответствует нулевому приближению, кривая 2 — первому приближению, при этом коэффициент упрочнения для материала трубы принят $c_r = 0.2$. На рис. 3 кривые 1—3 определяют напряжение σ_ρ при различных значениях коэффициента упрочнения для материала трубы $c_r = 0.1$, $c_r = 0.2$, $c_r = 0.9$ соответственно. При этом значения других физико-механических и геометрических параметров конструкции труба-включение приведены в табл. 1.

На рис. 4—6 показаны зависимости радиуса упруго-пластической границы ρ_s от угла θ в толстостенной трубе, с учетом силы тяжести.

На рис. 4 — рис. 6 замкнутая кривая 1 соответствует внутреннему контуру включения, 2 — внутреннему контуру трубы, замкнутые кривые 3 — 5 характеризуют положение упруго-пластической границы ρ_s для случаев:

рис. 4 — различных моментов времени $t = 0.00005$, $t = 0.00007$, $t = 0.1$ соответственно (при этом $c_r = 0.2$; $\eta_r = 0.0001$); рис. 5 — различных значений коэффициента упрочнения $c_r = 0.2$, $c_r = 0.5$, $c_r = 0.7$ соответственно (при этом $\eta_r = 0.0001$); рис. 6 — различных значений коэффициента вязкости $\eta_r = 0.00005$, $\eta_r = 0.00007$ и $\eta_r = 0.0001$ соответственно (при этом $c_r = 0.2$). При этом значения других физико-механических и геометрических параметров приведены в табл. 2.

Из анализа результатов численного эксперимента следует, что учет силы тяжести существенно влияет на распределение радиального напряжения, которое в среднем меняется на 5—15 % по сравнению с нулевым прибли-

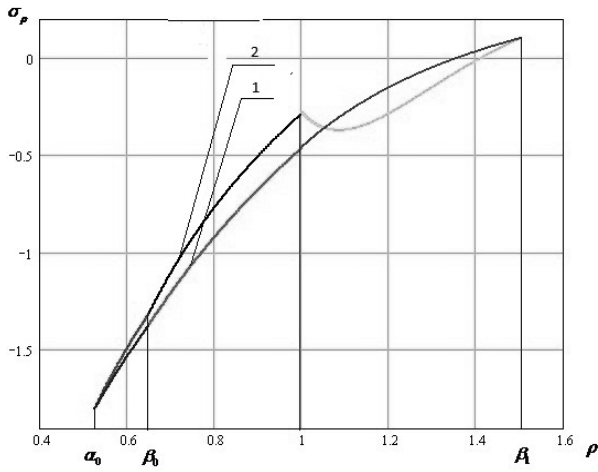


Рис. 2. Зависимость радиального напряжения σ_ρ от координаты ρ — нулевое и первое приближения

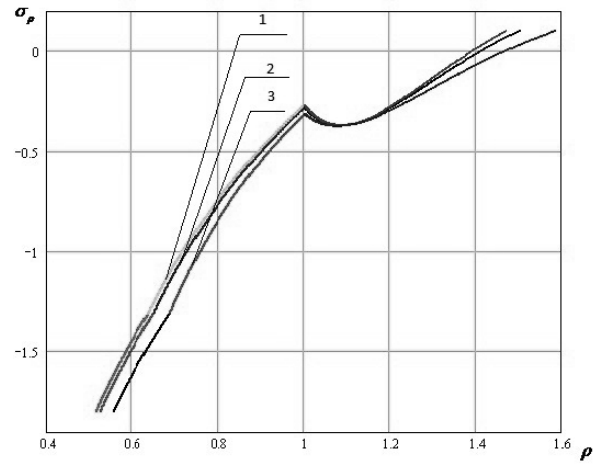


Рис. 3. Зависимость радиального напряжения σ_ρ от координаты ρ при различных значениях коэффициента упрочнения для материала трубы

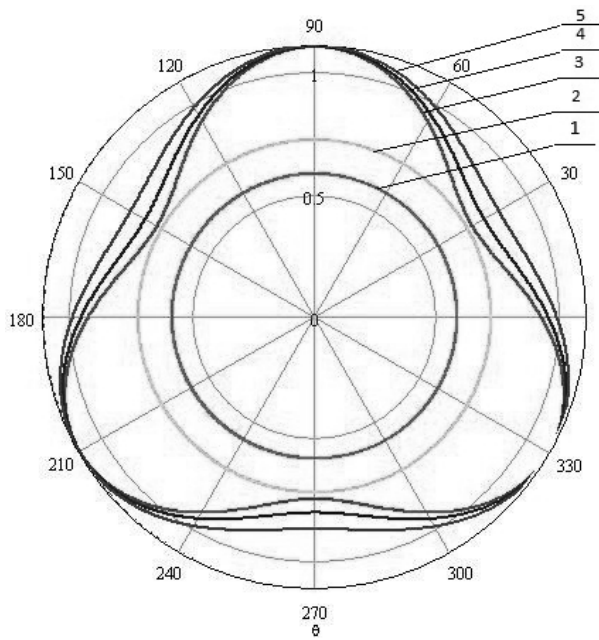


Рис. 4. Зависимость радиуса упруго-пластической границы ρ_s от угла θ для различных значений времени

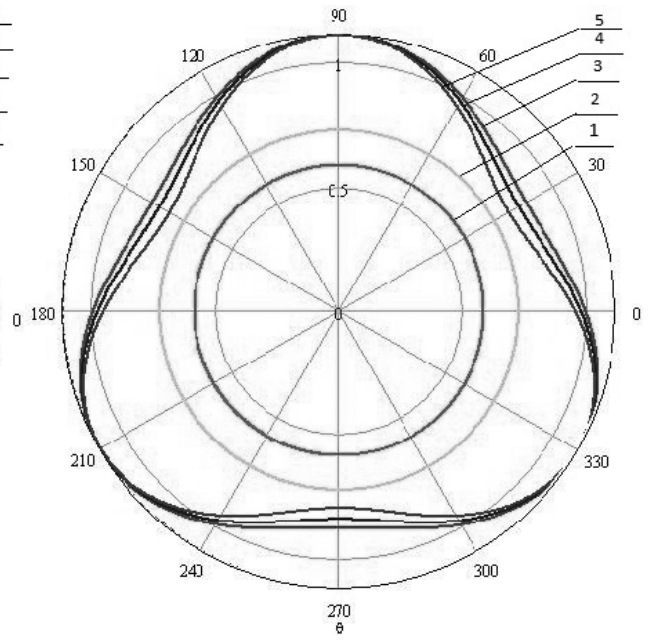


Рис. 5. Зависимость радиуса упруго-пластической границы ρ_s от угла θ при различных значениях коэффициента упрочнения для материала трубы

Таблица 1

δ	q_0	q_2	μ_b	μ_t	c_{1b}	c_{2b}	c_{1t}	c_{2t}	c_b	a_0	b_0	b_1
0.09	1.8	0.1	0.5	1	0.1	3	0.3	6	0.01	2	2.6	6.5

Таблица 2

δ	q_0	q_2	μ_b	μ_t	c_{1b}	c_{2b}	c_{1t}	c_{2t}	c_b	α_0	β_0	β_1
0.05	1.8	0.1	0.5	1	0.1	1.5	0.1	3	0.01	0.58	0.72	1.12

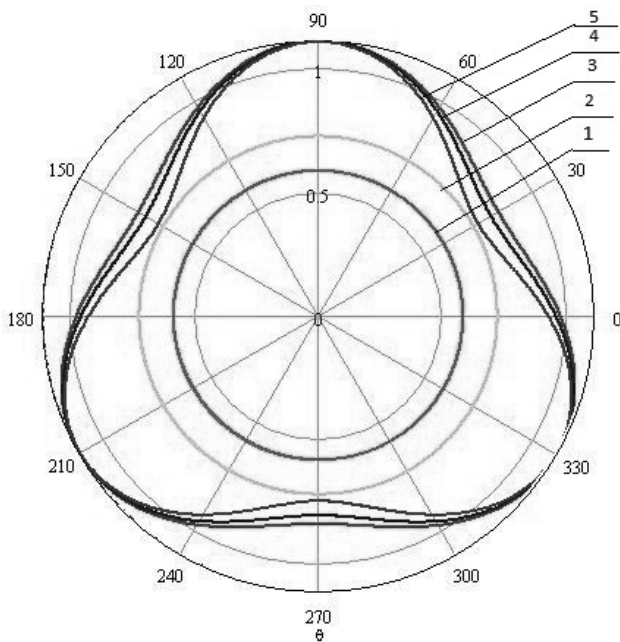


Рис. 6. Зависимость радиуса упруго-пластической границы ρ_s от угла θ при различных значениях коэффициента вязкости для материала трубы

жением (рис. 2), а также на форму и размер упруго-пластической зоны (рис.2 — рис.6), которая также меняется на 10-18 %, при этом наблюдаются следующие закономерности:

- с увеличением значения коэффициента упрочнения для материала трубы c_T от 0.1 до 0.9, значение радиального напряжения уменьшается в среднем на 3—4 % (рис. 3);
- с ростом времени $0.5 \cdot 10^{-4} \leq t \leq 0.1$ упруго-пластическая граница увеличивается до определенного значения, которое соответствует упрочняющейся упруго-пластической модели среды (рис. 4);
- при увеличении коэффициентов упрочнения c_T и вязкости η_T пластическая область в трубе сужается в среднем на 7—8 % (рис. 5—6).

Гоцев Д. В., доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики Военного авиационного инженерного университета (г. Воронеж)

E-mail: rbgotsev@mail.ru

Плотников Л. Г., аспирант кафедры теоретической и прикладной механики Воронежского государственного университета

E-mail: lavrentiy.plotnikov@mail.ru

- при изменении толщины включения на 50 % от α_0 близкого к нулю (случай толстого включения) до β_1 (труба без включения) пластическая область в трубе увеличилась до 48,6 %.

Очевидно, полагая в полученных выше соотношениях (9, 10, 19, 22, 25, 28) $\alpha_0 = \beta_0$, $c_T = 0$, $\eta_T = 0$ и $t \rightarrow \infty$ приходим к результатам работы [3] для случая толстостенной трубы без включения, когда в пластической зоне материал трубы моделируется идеально-пластической средой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Надаи, А. Пластичность и разрушение твердых тел / А. Надаи. М.: Мир, 1969. Т. 2. 840 с.
2. Бердин В. К. Оценка напряженно-деформированного состояния реакционной колонны методом конечных элементов с учетом изменения свойств материала в условиях длительной эксплуатации / В. К. Бердин, В. К. Закиричная, Н. Ю. Кириллова // Нефтегазовое дело. Электронный научный журнал. Выпуск 2/2006. <http://www.ogbus.ru>.
3. Матвеев, С. В. Упругопластическое состояние среды, ослабленной горизонтальной цилиндрической полостью, с учетом силы тяжести / С. В. Матвеев // Вестник СамГУ — Естественнонаучная серия. Самара, 2007. №2(52). С. 107—114.
4. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности / М.: Наука, 1966. 229 с.
5. Спорыхин А. Н. Об устойчивости деформирования упруго-вязко-пластических тел / А. Н. Спорыхин // Журнал «Прикладная механика и техническая физика», 1967, № 4, С. 52—58.
6. Ивлев, Д. Д. Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. М.: Наука, 1978. 208 с.
7. Спорыхин А. Н. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред / Воронеж, 1997. 297 с.
8. Спорыхин, А. Н. Неодномерные задачи упруговязкопластичности с неизвестной границей / А. Н. Спорыхин, А. В. Ковалев, Ю. Д. Щеглова. — Воронеж: ВорГУ, 2004. — 219 с.
9. Бицено, К. Б. Техническая динамика / К. Б. Бицено, Р. Граммель. — Л.: Гостехиздат, 1950. Т. 1.

Gotsev D. V., doctor of physical and mathematical sciences, professor of chair of mathematics of Military aviation engineering university (Voronezh)

E-mail: rbgotsev@mail.ru

Plotnikov L. G., postgraduate, chair of theoretical and applied mechanics of the Voronezh state university

E-mail: lavrentiy.plotnikov@mail.ru