МАТЕМАТИКА

УДК 511

ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА ВЕСОВОГО РЕШЕТА К КОРОТКИМ ИНТЕРВАЛАМ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Е. В. Вахитова, С. Р. Вахитова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 12.03.2012 г.

Аннотация: в работе получен короткий интервал арифметической прогрессии, содержащий 2-почти простые числа.
Ключевые слова: метод, решето, веса, число, прогрессия, оценка.

Abstract: in the article the short interval of the arithmetic progression is received, including 2-almost prime numbers.
Key word: method, sieve, weights, number, progression, estimation.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрено приложение метода весового решета к получению короткого интервала арифметической прогрессии, содержащего 2-почти простые числа.

Обозначим через P_r r-почти простое число, то есть целое число, имеющее в разложении r простых множителей с учетом их кратности, где $r \in \mathbf{N}, r \geq 2$. Каждому такому числу r сопоставим действительное число $\Lambda_r > 1$, такое, что почти простое число P_r содержится в интервале $\left(x - x^{\frac{1}{\Lambda_r}}; x\right)$, где x — фиксированное достаточно большое положительное число, $x \geq x_0$.

Исследованию почти простых чисел в интервалах посвящены следующие работы.

В 1969 году Рихерт Х.-Э. ([1], теорема 4) доказал, что для $x - x^{\frac{1}{\Lambda_r}} < P_r < x$ будет $\Lambda_2 = 11/6$, $\Lambda_3 = 11/4, \Lambda_4 = 11/3, (\forall r \geq 2)(\Lambda_r = r - 2/7)$.

В 1979 году Лабордэ М. ([2], теорема 3) получил $\Lambda_2 = 1,89189, \Lambda_3 = 2,8571, \Lambda_4 = 3,8571$, $(\forall r \geq 2)(\Lambda_r = r - 0,145)$.

В 1982 году Гривс Г. [3], [4] получил $\Lambda_2 = 1,937$.

ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть k, l— фиксированные натуральные числа, $1 \leq l < k, (k,l) = 1, k < x$, x — фиксированное достаточно большое положительное число, $x \geq x_0$. .

Рассмотрим последовательность A,

$$A = \{kn + l \mid k, l, n \in \mathbf{N}, (k,l) = 1, 1 \leq l < k, n \leq x\}, \quad (1)$$

где x — фиксированное достаточно большое положительное число, $x \geq x_0$.

Поставим задачу: получить короткий интервал арифметической прогрессии, содержащий 2-почти простые числа: $\left(x - x^{1/\Lambda_2}; x\right)$, где $\Lambda_2 > 1$, x — фиксированное достаточно большое положительное число, $x \geq x_0$.

Отметим, что так как x — достаточно большое положительное число, $x \geq x_0$, и в методе весового решета наименьший простой делитель p_n 2-почти простого числа P_2 не меньше некоторого z, где $z = x^{\frac{1}{a}}, a$ — параметр решета, то короткие интервалы, содержащие 2-почти простые числа, будут расположены сколь угодно далеко в арифметической прогрессии.

Теорема 1. Пусть последовательность A определена условием (1). Тогда имеет место следующая оценка:

$$\sum_{P_2 \in A} 1 \geq \frac{2 + O(\varepsilon)}{\varphi(k)} \frac{a}{4(2c - b - 1)} K(a, b, c) \frac{x}{\ln x},$$

где $K(a, b, c)$ определено равенством:

$$\begin{aligned} K(a,b,c) = {} & \frac{10c + 3b - 7}{10} \ln 3 - \frac{b-1}{2} \ln 5 - \\ & - \frac{4(b-1)}{3} + (4 - c) \ln \frac{4-b}{4-c} + \\ & + \left(\ln \frac{5}{3} + \frac{8}{3} + \frac{4(b+1)}{5}\right) \ln \frac{b+1}{2} - \\ & - c \ln c - \frac{4 + 4b - 5c}{5} \ln(4 - b), \end{aligned} \quad (2)$$

где $a, b, c \in \mathbf{R}, 1 \leq b < c < a, 2c - b - 1 > 0,$

$Ma \le 1 + b + c, x$ — достаточно большое положительное число, $x \ge x_0$, $\varphi(k)$ — функция Эйлера, M определено из условия: существует постоянная M, такая, что $|a_n| \le x^M$ для всех $a_n \in A$.

Теорема 2. Существуют 2-почти простые числа P_2, такие, что $P_2 = kn + l$, $0 < l < k, (l,k) = 1$ и $x - x^{\frac{1}{\Lambda_2}} < P_2 < x, \Lambda_2 = 1{,}975$, где x — фиксированное достаточно большое положительное число, $x \ge x_0$.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для решения задачи применим метод весового решета, а именно метод решета Сельберга с весами Бухштаба в непрерывной форме, полученной Лабордэ.

Приведем веса Бухштаба в непрерывной форме, полученной Лабордэ [2], обозначив весовую функцию через $T_{Buch-Lab}(X)$.

$$T_{Buch\text{-}Lab}(X) = \frac{1}{2c-b-1}\{(c-b)\sum_{X^{\frac{1}{a}} \le p \le X^{\frac{b}{a}}} S(A_p; X^{\frac{1}{a}}) +$$

$$+a\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{b+1}{2a}} (\sum_{X^s \le p \le X^{\frac{b+1}{a}-s}} S(A_p; X^s))ds +$$

$$+\sum_{X^{\frac{1}{a}} \le p \le X^{\frac{b+1}{2a}}} ((b+1) - 2a\frac{\ln p}{\ln X}) S(A_p; p) +$$

$$+\sum_{X^{\frac{b}{a}} \le p \le X^{\frac{c}{a}}} (c - a\frac{\ln p}{\ln X}) S(A_p; X^{\frac{1}{a}})\},$$

где $a,b,c \in \mathbf{R}, 1 \le b \le c \le a, X \in \mathbf{R}, X > 1, p$ — простое число,

$$A_p = \{a_n \in A \mid a_n \equiv 0(mod\, p)\},$$

$S(A_p; z)$ — число элементов в последовательности A_p, у которых наименьший простой делитель $p_n \ge z$.

Отметим, что для получения более точного результата можно применять веса Бухштаба нового типа [5], но они имеют более сложный вид, эти веса были анонсированы А.А. Бухштабом в 1985 году и исследованы первым автором в работах [6] и [7].

Для последовательности А, определенной равенством (1), выполнены все условия, накладываемые на последовательность в случае одномерного решета. Перечислим эти условия.

1). Существует постоянная $C_1 \ge 1$, такая, что

$$1 \le (1 - \frac{\omega(p)}{p})^{-1} \le C_1$$

для любого простого числа p, где $\omega(p)$ — мультипликативная функция, такая, что $\frac{\omega(d)}{d}X$ является приближением числа $|A_d|, |A_d| = |\{a_n \in A \mid a_n \equiv 0(mod\, d)\}|$ и $\mu(d) \ne 0$ ($\mu(u)$ — функция Мебиуса).

2). Существуют постоянная $C_2 \ge 1$ и параметр L, такие, что

$$-L \le \sum_{u \le p < v} \frac{\omega(p)}{p}\ln p - \ln\frac{v}{u} \le C_2,$$

где $L \ge 1$ и не зависит от u и $v, 2 \le u \le v$.

3). Существуют постоянные $\alpha (0 < \alpha \le 1), C_0 \ge 1, C_3 \ge 1$, такие, что

$$\sum_{d < \frac{X^{\alpha}}{\ln^{C_0} X}} \mu^2(d) 3^{\nu(d)} |R(X,d)| \le C_3 \frac{X}{\ln^c X},$$

где $X \ge 2, C_3 = C_3(C), R(X,d) = |A_d| - \frac{\omega(d)}{d}X, \nu(d)$ — число различных простых делителей числа d.

4). Существует постоянная $C_4 \ge 1$, такая, что

$$\sum_{z \le p < y \le X} \sum_{a_n \in A, a_n \equiv 0(mod\, p^2)} 1 \le C_4(\frac{X\ln X}{z} + y),$$

если $2 \le z < y \le X$.

Лемма 1. Пусть u и v — постоянные числа или переменные величины, зависящие от x, но изменяющиеся в конечном интервале $2 \le u < v \le B$, где B — постоянная, $x \ge 2$. Тогда

$$\sum_{x^{\frac{1}{v}} \le p < x^{\frac{1}{u}}} \frac{1}{p\ln\frac{x}{p}} = \frac{1}{\ln x}\ln\frac{v-1}{u-1} + O(\frac{1}{\ln^2 x}).$$

Лемма 1 доказана в работе [8]. Отметим, что лемму 1 можно доказать другим способом, применяя лемму Абеля.

Из работы [9] (с. 19) имеем следующие оценки:

$$S(A; z) \ge \frac{x}{\varphi(k)\ln z^4}(2\ln 3 + O(\varepsilon)), \qquad (3)$$

$$S(A_p; z) \le \frac{2 + O(\varepsilon)}{\varphi(k)} \frac{x}{p\ln\frac{z^4}{p}} + R, \qquad (4)$$

где $\varphi(n)$ — функция Эйлера, $\varepsilon > 0$,

$$R = \sum_{n < A'} \sum_{m \le x^{\alpha}k^{-1}} \sum_{m' \le x^{\alpha'}k^{-3/4}, (mm',k)=1} a_m(n) b_{m'}(n) r(A_p; mm'),$$

$$A' = exp(8e^{-3}), \alpha = 1 - 3\varepsilon, \alpha' = \tfrac{1}{2} - 4\varepsilon, m, m' \in \mathbf{N},$$

$\left|a_m(n)\right| \le 1, \left|b_{m'}(n)\right| \le 1, (pmm', k) = 1,$
$r(A_p; mm') = \left|\{n \in A_p \mid n \equiv 0(mod\ mm')\}\right| - \frac{x}{kmm'}.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Получим оценку сверху слагаемых весовой суммы, применяя оценку сверху (4) для $S(A_p; z)$, а затем лемму 1.

1).

$$S_1 = (c-b) \sum_{x^{1/a} \le p < x^{b/a}} S(A_p; x^{1/a}) \le$$

$$\le (c-b) \sum_{x^{\frac{1}{a}} \le p < x^{\frac{b}{a}}} \left(\frac{2+O(\varepsilon)}{\varphi(k)} \frac{x}{p \ln \frac{x^{4/a}}{p}} + R \right) =$$

$$= \frac{2+O(\varepsilon)}{\varphi(k)} (c-b) x \sum_{x^{\frac{1}{a}} \le p < x^{\frac{b}{a}}} \frac{1}{p \ln \frac{x^{4/a}}{p}} + (c-b) \sum_{x^{\frac{1}{a}} \le p < x^{\frac{b}{a}}} R =$$

$$= \frac{2+O(\varepsilon)}{\varphi(k)} \frac{x}{\ln x} \frac{a(c-b)}{4} \ln \frac{4-b}{\frac{4}{b}-1} +$$

$$+O\left(\frac{x}{\varphi(k) \ln^2 x} \right) + (c-b) \sum_{x^{\frac{1}{a}} \le p < x^{\frac{b}{a}}} R =$$

$$= \frac{2+O(\varepsilon)}{\varphi(k)} \frac{x}{\ln x} \frac{a(c-b)}{4} \ln \frac{3b}{4-b} + R_1(x),$$

где

$$R_1(x) = (c-b) \sum_{x^{\frac{1}{a}} \le p < x^{\frac{b}{a}}} R + O\left(\frac{x}{\varphi(k) \ln^2 x} \right). \quad (5)$$

Таким образом,

$$S_1(x) \le \frac{2+O(\varepsilon)}{\varphi(k)} \frac{x}{\ln x} \frac{a(c-b)}{4} \ln \frac{3b}{4-b} + R_1(x).$$

2).

$$S_2(x) = a \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{b+1}{2a}} \left(\sum_{x^s \le p < x^{\frac{b+1}{a}-s}} S(A_p; x^s) \right) ds \le$$

$$\le a \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{b+1}{2a}} \left(\sum_{x^s \le p < x^{\frac{b+1}{a}-s}} \left(\frac{2+O(\varepsilon)}{\varphi(k)} \frac{x}{p \ln \frac{x^{4s}}{p}} + R \right) \right) ds =$$

$$= \frac{2+O(\varepsilon)}{\varphi(k)} xa \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{b+1}{2a}} \left(\sum_{x^s \le p < x^{\frac{b+1}{a}-s}} \frac{1}{p \ln \frac{x^{4s}}{p}} \right) ds +$$

$$+a \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{b+1}{2a}} \left(\sum_{x^s \le p < x^{\frac{b+1}{a}-s}} R \right) ds.$$

Для первого интеграла получим

$$J_1 = \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{b+1}{2a}} \left(\sum_{x^s \le p < x^{\frac{b+1}{a}-s}} \frac{1}{p \ln \frac{x^{4s}}{p}} \right) ds =$$

$$= \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{b+1}{2a}} \left(\frac{1}{4s \ln x} \ln \frac{4-1}{\frac{4sa}{b+1-4s} - 1} + O\left(\frac{1}{s^2 \ln^2 x} \right) \right) ds =$$

$$= \frac{1}{4 \ln x} \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{b+1}{2a}} \frac{1}{s} \ln \frac{s(b+1-as)}{5as-b-1} ds + O\left(\frac{1}{\ln^2 x} \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{b+1}{2a}} \frac{ds}{s^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{4 \ln x} \left(\ln \frac{3}{5} \ln s. \Big|_{\frac{1}{a}}^{\frac{b+1}{2a}} \ln + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{b+1}{2a}} \frac{1}{s} \ln \frac{\frac{b+1}{a} - s}{s - \frac{b+1}{5a}} ds \right) +$$

$$+O\left(\frac{1}{\ln^2 x} \frac{-1}{s}. \Big|_{\frac{1}{a}}^{\frac{b+1}{2a}} \ln \right) =$$

$$= \frac{1}{4 \ln x} \left(-\ln \frac{5}{3} \ln \frac{b+1}{2} + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{b+1}{2a}} \frac{1}{s} \ln \frac{\frac{b+1}{a} - s}{s - \frac{b+1}{5a}} ds \right) +$$

$$+O\left(\frac{1}{\ln^2 x} \right).$$

Оценим последний интеграл. Применим формулу:

$$\int \ln(nx+m)\, dx = \frac{m+nx}{n} \ln(m+nx) - x.$$

$$J = \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{b+1}{2a}} \frac{1}{s} \ln \frac{\frac{b+1}{a} - s}{s - \frac{b+1}{5a}} ds \le a \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{b+1}{2a}} \ln \frac{\frac{b+1}{a} - s}{s - \frac{b+1}{5a}} ds =$$

$$= a\left(-\left(\frac{b+1}{a} - s \right) \ln \left(\frac{b+1}{a} - s \right) - s - \right.$$

$$\left. -\left(s - \frac{b+1}{5a} \right) \ln \left(s - \frac{b+1}{5a} \right) + s \right) \Bigg|_{\frac{1}{a}}^{\frac{b+1}{2a}} \ln.$$

$$J \le b \ln b + \frac{4-b}{5} \ln \frac{4-b}{5} - \frac{b+1}{2} \ln \frac{b+1}{2} -$$
$$- \frac{3(b+1)}{10} \ln \frac{3(b+1)}{10},$$

следовательно,

$$J_1 \le \frac{1}{4 \ln x} \left(-\ln \frac{5}{3} \ln \frac{b+1}{2} + b \ln b + \frac{4-b}{5} \ln \frac{4-b}{5} - \right.$$

$$\left. - \frac{b+1}{2} \ln \frac{b+1}{2} - \frac{3(b+1)}{10} \ln \frac{3(b+1)}{10} \right) + O\left(\frac{1}{\ln^2 x} \right).$$

Тогда для суммы $S_2(x)$ получим:

$$S_2(x) \le \frac{2+O(\varepsilon)}{\varphi(k)} \frac{x}{\ln x} \frac{a}{4} \left(-\ln \frac{5}{3} \ln \frac{b+1}{2} + \right.$$

$$+b \ln b + \frac{4-b}{5} \ln \frac{4-b}{5} -$$

$$-\frac{b+1}{2}\ln\frac{b+1}{2}-\frac{3(b+1)}{10}\ln\frac{3(b+1)}{10}\Bigg)+R_2(x),$$

где

$$R_2(x)=a\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{b+1}{2a}}\left(\sum_{x^s\le p<x^{\frac{b+1}{a}-s}}R\right)ds+O\left(\frac{x}{\varphi(k)\ln^2 x}\right). \quad (6)$$

3).

$$S_3(x)=\sum_{x^{\frac{1}{a}}\le p<x^{\frac{b+1}{2a}}}\left(b+1-2a\frac{\ln p}{\ln x}\right)S(A_p;\,p)\le$$

$$\le\sum_{x^{\frac{1}{a}}\le p<x^{\frac{b+1}{2a}}}\left(b+1-2a\frac{\ln p}{\ln x}\right)\left(\frac{2+O(\varepsilon)}{\varphi(k)}\frac{x}{p\ln\frac{p^4}{p}}+R\right)=$$

$$=\frac{2+O(\varepsilon)}{\varphi(k)}\frac{x}{3}\sum_{x^{\frac{1}{a}}\le p<x^{\frac{b+1}{2a}}}\left(b+1-2a\frac{\ln p}{\ln x}\right)\frac{1}{p\ln p}+$$

$$+\sum_{x^{\frac{1}{a}}\le p<x^{\frac{b+1}{2a}}}\left(b+1-2a\frac{\ln p}{\ln x}\right)R.$$

Преобразуем первую сумму.

$$\sum_{x^{\frac{1}{a}}\le p<x^{\frac{b+1}{2a}}}\left(b+1-2a\frac{\ln p}{\ln x}\right)\frac{1}{p\ln p}=$$

$$=(b+1)\sum_{x^{\frac{1}{a}}\le p<x^{\frac{b+1}{2a}}}\frac{1}{p\ln p}-\frac{2a}{\ln x}\sum_{x^{\frac{1}{a}}\le p<x^{\frac{b+1}{2a}}}\frac{1}{p}.$$

По лемме Абеля получим:

$$c_n=\begin{cases}\frac{1}{n},\ n=p,\\ 0,\ n\ne p,\end{cases}\quad f(z)=\begin{cases}\frac{1}{\ln z},\ z=p,\\ 0,\ z\ne p,\end{cases}\quad f'(z)=\frac{-1}{z\ln^2 z},$$

$$S^*=\sum_{x^{\frac{1}{a}}\le p<x^{\frac{b+1}{2a}}}\frac{1}{p\ln p}=$$

$$=\int_{x^{\frac{1}{a}}}^{x^{\frac{b+1}{2a}}}\left(\sum_{x^{\frac{1}{a}}\le p<z}\frac{1}{p}\right)\frac{1}{z\ln^2 z}dz+\left(\sum_{x^{\frac{1}{a}}\le p<x^{\frac{b+1}{2a}}}\frac{1}{p}\right)\frac{1}{\ln x^{\frac{b+1}{2a}}}=$$

$$=\int_{x^{\frac{1}{a}}}^{x^{\frac{b+1}{2a}}}\left(\ln\frac{\ln z}{\ln x^{\frac{1}{a}}}+O\left(\frac{1}{\ln z}\right)\right)\frac{d(\ln z)}{\ln^2 z}+$$

$$\left(\ln\frac{b+1}{2}+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right)\frac{2a}{b+1}\frac{1}{\ln x}=$$

$$=\int_{x^{\frac{1}{a}}}^{x^{\frac{b+1}{2a}}}\frac{\ln\ln z\,d(\ln z)}{\ln^2 z}-\ln\ln x^{\frac{1}{a}}\frac{-1}{\ln z}.\Bigg|_{\ln x^{\frac{1}{a}}}^{\ln x^{\frac{b+1}{2a}}}+O\left(\int_{x^{\frac{1}{a}}}^{x^{\frac{b+1}{2a}}}\frac{d(\ln z)}{\ln^3 z}\right)+$$

$$+\frac{2a}{b+1}\frac{1}{\ln x}\ln\frac{b+1}{2}+O\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right).$$

Применим формулу:

$$\int\frac{\ln t\,dt}{t^2}=-\frac{\ln t}{t}-\frac{1}{t},$$

получим:

$$S^*=\left(-\frac{\ln\ln z}{\ln z}-\frac{1}{\ln z}+\frac{\ln\ln x^{\frac{1}{a}}}{\ln z}\right)\Bigg|_{\ln x^{\frac{1}{a}}}^{\ln x^{\frac{b+1}{2a}}}+$$

$$+\frac{2a}{b+1}\frac{1}{\ln x}\ln\frac{b+1}{2}+O\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right)=$$

$$=-\frac{\ln\ln x^{\frac{b+1}{2a}}}{\ln x^{\frac{b+1}{2a}}}+\frac{\ln\ln x^{\frac{1}{2a}}}{\ln x^{\frac{1}{a}}}-\frac{1}{\ln x^{\frac{b+1}{2a}}}+$$

$$+\frac{1}{\ln x^{\frac{1}{a}}}+\frac{\ln\ln x^{\frac{1}{a}}}{\ln x^{\frac{b+1}{a}}}-\frac{\ln\ln x^{\frac{1}{a}}}{\ln x^{\frac{1}{a}}}+$$

$$+\frac{2a}{b+1}\frac{1}{\ln x}\ln\frac{b+1}{2}+O\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right)=$$

$$=\frac{1}{\ln x}\Bigg(-\frac{2a}{b+1}\ln\frac{b+1}{2a}-\frac{2a}{b+1}\ln\ln x-$$

$$-\frac{2a}{b+1}+a+\frac{2a}{b+1}\ln\frac{1}{a}+$$

$$+\frac{2a}{b+1}\ln\ln x+\frac{2a}{b+1}\ln\frac{b+1}{2}\Bigg)+O\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right).$$

$$S^*=\frac{1}{\ln x}\frac{a(b-1)}{b+1}+O\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right).$$

Тогда для суммы $S_3(x)$ будем иметь:

$$S_3(x)\le\frac{2+O(\varepsilon)}{\varphi(k)}\frac{x}{\ln x}\frac{b+1}{3}\frac{a(b-1)}{b+1}+O\left(\frac{x}{\varphi(k)\ln^2 x}\right)-$$

$$-\frac{2+O(\varepsilon)}{\varphi(k)}\frac{x}{\ln x}\frac{2a}{3}\ln\frac{b+1}{2}++O\left(\frac{x}{\varphi(k)\ln^2 x}\right)+$$

$$+\sum_{x^{\frac{1}{a}}\le p<x^{\frac{b+1}{2a}}}\left(b+1-2a\frac{\ln p}{\ln x}\right)R.$$

Таким образом,

$$S_3(x)\le\frac{2+O(\varepsilon)}{\varphi(k)}\frac{x}{\ln x}\frac{a}{3}\left(b-1-2\ln\frac{b+1}{2}\right)+R_3(x),$$

где

$$R_3(x)=$$

$$=\sum_{x^{\frac{1}{a}}\le p<x^{\frac{b+1}{2a}}}\left(b+1-2a\frac{\ln p}{\ln x}\right)R+O\left(\frac{x}{\varphi(k)\ln^2 x}\right). \quad (7)$$

4).

$$S_4(x)=\sum_{x^{\frac{b}{a}}\le p<x^{\frac{c}{a}}}\left(c-a\frac{\ln p}{\ln x}\right)S\left(A_p;x^{\frac{1}{a}}\right)\le$$

$$\le\sum_{x^{\frac{b}{a}}\le p<x^{\frac{c}{a}}}\left(c-a\frac{\ln p}{\ln x}\right)\left(\frac{2+O(\varepsilon)}{\varphi(k)}\frac{x}{p\ln\frac{x^{\frac{4}{a}}}{p}}+R\right)=$$

$$=\frac{2+O(\varepsilon)}{\varphi(k)}x\,a\sum_{x^{\frac{b}{a}}\le p<x^{\frac{c}{a}}}\frac{\ln\frac{x^{\frac{c}{a}}}{p}}{p\ln\frac{x^{\frac{4}{a}}}{p}}+\sum_{x^{\frac{b}{a}}\le p<x^{\frac{c}{a}}}\left(c-a\frac{\ln p}{\ln x}\right)R.$$

Преобразуем первую сумму.

$$c_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n\ln\frac{x^{\frac{4}{a}}}{n}},n=p,\\ 0,n\ne p,\end{cases}\quad f(z)=\begin{cases}\ln\dfrac{x^{\frac{c}{a}}}{z},z=p,\\ 0,z\ne p,\end{cases}\quad f'(z)=\frac{-1}{z},$$

$$S^*=\sum_{x^{\frac{b}{a}}\le p<x^{\frac{c}{a}}}\frac{\ln\frac{x^{\frac{c}{a}}}{p}}{p\ln\frac{x^{\frac{4}{a}}}{p}}=\int_{x^{\frac{b}{a}}}^{x^{\frac{c}{a}}}\left(\sum_{x^{\frac{b}{a}}\le p<z}\frac{1}{p\ln\frac{x^{\frac{4}{a}}}{p}}\right)\frac{dz}{z}+0=$$

$$=\int_{x^{\frac{b}{a}}}^{x^{\frac{c}{a}}}\frac{1}{\ln x}\left(\frac{1}{\ln x^{\frac{4}{a}}}\ln\frac{\frac{4}{b}-1}{\frac{\ln x^{\frac{4}{a}}}{\ln z}-1}+O\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right)\right)\frac{dz}{z}=$$

$$=\frac{1}{\ln x}\frac{a}{4}\int_{x^{\frac{b}{a}}}^{x^{\frac{c}{a}}}\frac{1}{\ln x}\ln\frac{(4-b)\ln z}{b\ln\frac{x^{\frac{4}{a}}}{z}}\frac{dz}{z}+O\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right).$$

Вычислим последний интеграл, применяя формулу:

$$\int\ln(a+bx)\,dx=\frac{a+bx}{b}\ln(a+bx)-x.$$

$$J=\int_{x^{\frac{b}{a}}}^{x^{\frac{c}{a}}}\frac{1}{\ln x}\ln\frac{(4-b)\ln z}{b\ln\frac{x^{\frac{4}{a}}}{z}}\frac{dz}{z}=$$

$$=\frac{1}{\ln x}\ln\frac{4-b}{b}\ln z\Bigg|_{\ln x^{\frac{b}{a}}}^{\ln x^{\frac{c}{a}}}+\frac{1}{\ln x}\int_{x^{\frac{b}{a}}}^{x^{\frac{c}{a}}}\ln\frac{\ln z}{\ln x^{\frac{4}{a}}-\ln z}d(\ln z)=$$

$$=\frac{1}{\ln x}\ln\frac{4-b}{b}\ln\frac{x^{\frac{c}{a}}}{x^{\frac{b}{a}}}+\frac{1}{\ln x}\Big(\ln z\ln\ln z-\ln z+$$

$$+\left(\ln x^{\frac{4}{a}}-\ln z\right)\ln\ln\frac{x^{\frac{4}{a}}}{z}+\ln z\Big)\Bigg|_{\ln x^{\frac{b}{a}}}^{\ln x^{\frac{c}{a}}}.$$

После преобразований получим:

$$J=\frac{1}{a}\left(c\ln\frac{c}{b}-(4-c)\ln\frac{4-b}{4-c}\right),$$

тогда

$$S^*=\frac{1}{\ln x}\frac{1}{4}\left(c\ln\frac{c}{b}-(4-c)\ln\frac{4-b}{4-c}\right)+O\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right).$$

Следовательно,

$$S_4(x)\le$$

$$\le\frac{2+O(\varepsilon)}{\varphi(k)}\frac{x}{\ln x}\frac{a}{4}\left(c\ln\frac{c}{b}-(4-c)\ln\frac{4-b}{4-c}\right)+R_4(x),$$

где

$$R_4(x)=\sum_{x^{\frac{b}{a}}\le p<x^{\frac{c}{a}}}\left(c-a\frac{\ln p}{\ln x}\right)R+O\left(\frac{x}{\varphi(k)\ln^2 x}\right).\quad(8)$$

Таким образом, для $S(x)$ после преобразования логарифмов получим:

$$S(x)=\sum_{i=1}^{4}S_i(x)\le$$

$$\le\frac{2+O(\varepsilon)}{\varphi(k)}\frac{x}{\ln x}\frac{a}{4}\Big(\frac{10c-13b-3}{10}\ln 3+$$

$$+\frac{b-1}{2}\ln 5+\frac{4(b-1)}{3}+c\ln c-$$

$$-\left(\ln\frac{5}{3}+\frac{8}{3}+\frac{4(b+1)}{5}\right)\ln\frac{b+1}{2}-$$

$$-(4-c)\ln\frac{4-b}{4-c}+\frac{4+4b-5c}{5}\ln(4-b)\Big)+\sum_{i=1}^{4}R_i(x).$$

Оценку остаточного члена $\sum_{i=1}^{4}R_i(x)$, где $R_i(x)$, $i=1,2,3,4$, определены равенствами (5) — (8) соответственно, получим, применяя теорему 5 работы [9], согласно которой

$$\sum_{\substack{m\ge M\\(mn,q)=1}}\sum_{n\ge N}a_m b_n r(A_q,mn)\ll x^{1-\varepsilon}/\varphi(q),$$

где $\varepsilon>0,x^{2/5}<q\le x^{2/3-6\varepsilon},M=x^{1-3\varepsilon}/q$, $N=x^{1/2-4\varepsilon}/q^{3/4},\left|a_m\right|\le 1,\left|b_n\right|\le 1$.

Тогда будем иметь:

$$\sum_{i=1}^{4}R_i(x)=O\left(\frac{x^{1-\varepsilon}}{\varphi(k)\ln x}\right).$$

Применяя оценку снизу (3) к $S\left(A;x^{\frac{1}{a}}\right)$, получим, что

$$S\left(A;x^{\frac{1}{a}}\right)\ge\frac{2+O(\varepsilon)}{\varphi(k)}\frac{x}{\ln x}\frac{a}{4}\ln 3.$$

Тогда, проведя необходимые преобразования, получим окончательно:

$$S\left(A;x^{\frac{1}{a}}\right)-\frac{S(x)}{2c-b-1}\geq$$
$$\geq\frac{2+O(\varepsilon)}{\varphi(k)}\frac{a}{4(2c-b-1)}K(a,b,c)\frac{x}{\ln x},$$

где $K(a,b,c)$ определено равенством (2).

Таким образом, получим, что для достаточно больших x, $x\geq x_0$, справедлива оценка теоремы 1.

Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

По теореме 1 имеем:

$$\sum_{P_2\in A}1\geq\frac{2+O(\varepsilon)}{\varphi(k)}\frac{a}{4(2c-b-1)}K(a,b,c)\frac{x}{\ln x}$$

для достаточно больших x, $x\geq x_0$, где $K(a,b,c)$ определено равенством (2) и, кроме того, при этом выполнено условие

$$M\,a\leq 1+b+c. \tag{9}$$

Если $K(a,b,c)>0$, то существуют числа P_2 в последовательности A.

Выберем параметры a,b,c следующим образом:

$$a=4,\ \ b=3,44,\ \ c=3,46.$$

Тогда получим, что

$$\frac{K(a,b,c)}{2c-b-1}\geq 0,0379$$

для достаточно больших x, $x\geq x_0$.

Действительно, имеем:

$$\frac{K(a,b,c)}{2c-b-1}=$$
$$=\frac{1}{2\cdot 3,46-3,44-1}\left(3,46+\frac{3\cdot 3,44-7}{10}\right)\ln 3-$$
$$-\frac{3,44-1}{2}\ln 5-\frac{4(3,44-1)}{3}+$$
$$+(4-3,46)\ln\frac{4-3,44}{4-3,46}+$$
$$+\left(\ln\frac{5}{3}+\frac{8}{3}+\frac{4(3,44+1)}{5}\right)\ln\frac{3,44+1}{2}-$$
$$-3,46\ln 3,46-\frac{4+4\cdot 3,44-5\cdot 3,46}{5}\ln(4-3,44)\Bigg)=$$
$$=\frac{1}{2,48}\left(\left(3,46+\frac{10,32-7}{10}\right)\ln 3-\right.$$
$$-1,22\ln 5-\frac{9,76}{3}+0,54\ln\frac{0,56}{0,54}+$$
$$+\left(0,51082562+\frac{8}{3}+3,552\right)\ln 2,82-$$
$$\left.-3,46\ln 3,46-(3,552-3,46)\ln 0,56\right)=$$
$$=\frac{1}{2,48}\left(3,792\ln 3-1,22\ln 5-3,253(3)+0,54\frac{28}{27}+\right.$$
$$\left.+6,72945229\ln 2,22-3,46\ln 3,46-0,092\ln 0,56\right)=$$
$$=\frac{1}{2,48}\left(4,165937795-1,963514253-3,253(3)+\right.$$
$$+0,019638528+5,366786626-$$
$$\left.-4,294789318+0,053343302\right)=$$
$$=\frac{1}{2,48}\left(9,605706251-9,511636904\right)=$$
$$=\frac{1}{2,48}\cdot 0,094069347=0,037931188\geq 0,0379.$$

Следовательно,

$$\sum_{P_2\in A}1\geq 0,0758\frac{1}{\varphi(k)}\frac{x}{\ln x}$$

для достаточно больших x, $x\geq x_0$.

Учитывая, что $\Lambda_2\leq M$ и выполнимость условия (9), получим, что $\frac{1+b+c}{a}=1,975$ и тогда значение Λ_2 : $\Lambda_2\leq 1,975$. Чем больше значение Λ_2, тем короче будет интервал и самое большее для Λ_2 можно взять $\Lambda_2=1,975$.

Таким образом, при $\Lambda_2=1,975$ в интервале $\left(x-x^{1/\Lambda_2};\ x\right)$ существуют 2-почти простые числа P_2, такие, что $P_2=kn+l$, $0<l<k$, $(k,l)=1$, x — фиксированное достаточно большое положительное число, $x\geq x_0$.

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Richert H.-E.* Selbergs sieve with weights // Mathematika. 1969. V. 16. N 31. P. 1—22.

2. *Laborde M.* Buchstabs sifting weights // Mathematika. 1979. V. 26. N 31. P. 250—257.

3. *Greaves G.* A weighted sieve of Brun's type // Acta arith. 1982. V. 40. P. 297—332.

4. *Greaves G.* The weighted linear sieve and Selbergs λ^2-method // Acta arith. 1986. V. 47. P. 71—96.

5. *Бухштаб А. А.* Новый тип весового решета // Всесоюз. конф. "Теория чисел и ее приложения". Тез. докл. Тбилиси, 1985. С. 22—24.

6. *Вахитова Е. В.* Об одномерном решете Сельберга с весами Бухштаба нового типа // Математические заметки. 1999. Т. 66. N 1. С. 38—49.

7. *Вахитова Е. В.* Методы решета с весами Бухштаба и их приложения. Монография. М.: Изд-во МПГУ "Прометей", 2002. 268 с.

8. *Бухштаб А. А.* Асимптотическая оценка одной общей теоретикочисловой функции // Матем. сб. 1937. Т. 2 (44). N 6. С. 1239—1246.

9. *Iwaniec H.* On the Brun — Titchmarsh theorem // Y. Math. Soc. Japan. 1982. V. 34. N 1. P. 95—123.

Вахитова Екатерина Васильевна, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры цифровых технологий, Воронежский государственный университет
E-mail: algebraist@yandex.ru
Тел.: 8-960-106-30-94

Вахитова Светлана Рифовна, соискатель, Воронежский государственный университет
E-mail: algebraist@yandex.ru
Тел.: 8-960-106-30-94

Vakhitova Ekaterina Vasilevna, candidate of Sciences in Physics and Mathematics, professor of the Departament digital technologies, Voronezh State University
E-mail: algebraist@yandex.ru
Tel.: 8-960-106-30-94

Vakhitova Svetlana Rifovna — the applicant, Voronezh State University
E-mail: algebraist@yandex.ru
Tel.: 8-960-106-30-94