

АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК ОБНАРУЖЕНИЯ СЛАБЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ С ПРЕДУСИЛЕНИЕМ

В. И. Парфёнов, В. С. Кириллов

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 15.10.2012 г.

Аннотация. Рассматривается возможность применения стандартного алгоритма принятия решения для оптических сигналов с предусилением. Оптический усилитель рассматривается в приближении среды типа «рождения-гибели-иммиграции» (РГИ-среды). Рассчитываются характеристики обнаружения детерминированного и пуассоновского входных сигналов

Ключевые слова: квантовые усилители, статистика населённости, РГИ-среда, уравнение Колмогорова, критерий идеального наблюдателя

Abstract. The possibility of standard decision taking algorithm application are investigated for optical signals with preamplification. «Birth-Death-Immigration» medium (BDI-medium) approach is used for optical amplifier. Deterministic and Poisson input signals detection characteristics are calculated

Key words: quantum amplifier, population statistics, BDI-medium, Kolmogorov's equation, ideal observer criterion

ВВЕДЕНИЕ. Для повышения чувствительности приема систем радио и оптического диапазонов часто используются усилители. В сантиметровом и миллиметровом диапазонах длин волн применяются квантовые усилители СВЧ (мазеры), в оптическом диапазоне — волоконно-оптические и полупроводниковые лазерные усилители. Активная среда в таких усилителях обычно представляется в виде трех или четырех-уровневой систем. Однако для анализа статистики фотонов можно упростить описание среды и представить её как набор двухуровневых атомов. В этих условиях квантово-механический анализ усилителя может быть выполнен с использованием анализа дифференциального уравнения типа уравнения Колмогорова. В статье выполнен анализ эффективности обнаружения слабых оптических сигналов при использовании стандартного приёмника прямого усиления, в котором на входе расположен предусилитель.

МОДЕЛИ УСИЛИТЕЛЕЙ. К настоящему времени предложено большое количество теоретических моделей, описывающих процессы в лазерных усилителях (см., например, [1—3]). Здесь будет рассмотрен подход, основанный на статистике населённости, впервые предложенный в [4]. Данный подход основан на использовании ветвящихся процессов. Отметим, что

такие процессы используются в качестве моделей уже достаточно давно, например, при описании космических лучей и в популяционной биологии. Будем называть такие процессы процессами «рождения-гибели-иммиграции» (РГИ), свойства которых достаточно хорошо изучены в теории стохастических процессов [5, 6].

Рассмотрим некоторое первоначальное количество частиц среды n . Предположим, что каждая частица может произвести другую подобную частицу с вероятностью в единицу времени λ или исчезнуть (абсорбироваться или разрушиться) с вероятностью в единицу времени μ . Кроме того, обозначим через ν — постоянная скорость, с которой могут появляться дополнительные частицы из внешнего источника. Подобные характеристики могут быть применены для описания поведения группы фотонов в квантовых усилителях. Действительно, там возможны как увеличение, так и уменьшение количества фотонов в результате нормальной абсорбции, стимулированной или спонтанной эмиссии. Рассмотрим некоторую атомную или молекулярную систему, которая может существовать только на одном из двух близлежащих уровней. В нормальных условиях ансамбль молекул находится в тепловом равновесии, большинство молекул находятся на нижнем уровне. Если может быть создан

инверсный режим, при котором больше молекул будет находиться на верхнем уровне, то фотоны, проходящие через подобную систему, будут скорее усиливаться, чем ослабляться. Обозначим через t — время распространения или глубина проникновения, $P(n, t)$ — вероятность того, что n частиц присутствует в момент (или на глубине) t . Тогда, если $P_0(n) = P(n, t = 0)$, то вероятность $P(n, t)$ удовлетворяет известному прямому уравнению Колмогорова:

$$\partial P(n, t) / \partial t = [(n - 1)\lambda + \nu]P(n - 1, t) + [(n + 1)\mu]P(n + 1, t) - [n(\lambda + \mu) + \nu]P(n, t). \quad (1)$$

Рассмотрим две идеальные ситуации, подтверждающие возможность использования уравнения (1). Вначале рассмотрим резонатор с идеальными отражающими стенками. Пусть n_λ и n_μ — количество молекул на верхнем и нижнем уровнях. Для простоты считаем, что отклик этих молекул не зависит от частоты. Если в резонаторе находится m фотонов, то вероятность того, что один фотон будет поглощен в единицу времени, пропорциональна m и n_μ , т. е. равна kmn_μ , где k — константа. Аналогично, вероятность того, что в единицу времени вследствие стимулированной эмиссии появится новый фотон равна kmn_λ . Спонтанная эмиссия также может производить новые фотоны с вероятностью kn_λ . Из этого описания следует, что число фотонов в резонаторе с идеальными отражающими стенками может быть описано с помощью уравнения (1), где $\lambda = kn_\lambda$, $\mu = kmn_\mu$, $\nu = \lambda$. Отметим, что, если сигнал вводится в резонатор через отверстие связи в волноводе, то это приводит к увеличению параметра ν , так что $\nu > \lambda$.

В качестве второго примера рассмотрим m фотонов, распространяющихся в канале, представляющем собой материал, содержащий молекулы с плотностью n_λ молекул в верхнем состоянии и n_μ молекул в нижнем. В этом случае картина полностью аналогична предыдущей. Поэтому уравнение (1) представляет собой достаточно адекватное реальности уравнение, описывающее поведение частиц в различных условиях, в том числе в оптических усилителях.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА ЧАСТИЦ НА ВЫХОДЕ УСИЛИТЕЛЯ. Итак, рассмотрим уравнение (1) в предположении, что в начальный момент времени $t = 0$ распределение $P_0(n)$ известно. Решение этого уравнения во многом

зависит от вида начального распределения. Будем рассматривать два случая. Первый, когда число частиц на входе активной среды априори известно (детерминистическое распределение). И второе, когда входное распределение — пуассоновское, что соответствует простейшей модели лазерного излучения при игнорировании лазерной спонтанной эмиссии. Соответствующие распределения числа фотонов в этих условиях на выходе РГИ-среды могут быть получены аналогично [7].

Если на входе активной РГИ-среды ничего нет, т.е. начальное число фотонов $n_0 = 0$, то $P_0(n) = \delta(n)$ и распределение числа частиц на выходе имеет вид:

$$P(n, t) \equiv P_1(n, t) = B(n, \nu/\lambda, \nu k(t)/\lambda h(t)), \quad (2)$$

где $B(n, \alpha, N) = \frac{\alpha^\alpha \Gamma(n + \alpha) N^n}{n! \Gamma(\alpha) (N + \alpha)^{n + \alpha}}$ — отрицательно-биномиальное распределение с математическим ожиданием N , $k(t) = \left[\frac{\lambda}{(\mu - \lambda)} \right] [h(t) - 1]$,

$$h(t) = \exp[(\mu - \lambda)t].$$

Таким образом, даже в отсутствии сигнала на входе лазерного усилителя (РГИ—среды), на его выходе появляются фотоны вследствие спонтанной эмиссии с распределением (2), которые необходимо интерпретировать как шум. Несложно заметить, что при $\lambda, \mu \rightarrow 0$ распределение (2) стремится к пуассоновскому распределению: $P_1(n, t) = \tilde{\lambda}^n \exp(-\tilde{\lambda})/n!$, $\tilde{\lambda} = \nu k(t)/\lambda h(t)$.

Предположим теперь, что на входе усилителя (РГИ-среды) имеется определенное число фотонов $n_0 \neq 0$. Тогда, аналогично [7], $P_0(n) = \delta(n - n_0)$ и распределение числа фотонов представляет собой свёртку отрицательно и положительно-биномиального распределений:

$$P_2(n, t) = B(n, n_0 + \nu/\lambda, (n_0 + \nu/\lambda)(k(t)/h(t))) * *b(n, n_0, n_0 ([1 - k(t)]/h(t))). \quad (3)$$

Здесь «*» — знак свёртки распределений, а $b(n, m, N) = C_m^n p^n (1 - p)^{m - n}$ (C_m^n — биномиальные коэффициенты, $p = N/m$) — положительно-биномиальное распределение. Заметим, что в (3) коэффициент $p = A(t) = \frac{1 - k(t)}{h(t)} = (\mu - \lambda)^{-1} [\mu \exp[-(\mu - \lambda)t] - \lambda]$ может

принимать как положительные, так и отрицательные значения. Тогда можно показать, что при $A(t) < 0$

$$b(n, n_0, n_0 A(t)) = \left(\frac{(-1)^n}{n!} \right) \left[\frac{(|A(t)|)^n}{(1 + |A(t)|)^{n-n_0}} \right] \prod_{i=1}^n (n_0 - i + 1), \quad n \geq n_0.$$

Наконец, предположим, что число фотонов n_0 на входе усилителя — случайная величина с пуассоновским распределением:

$$\Pi(n, \eta) = (\eta^n / n!) \exp[-\eta], \quad n \geq 0. \quad (4)$$

Тогда распределение числа фотонов на выходе усилителя (РГИ-среды) будет описываться формулой:

$$P_3(n, t) = \left(\frac{(k(t)/h(t))^n}{(1 + k(t)/h(t))^{n+v/\lambda}} \right) \exp \left(- \left[\frac{\eta}{h(t) + k(t)} \right] \right) \times \times L_n^{(x-1)} \left[\frac{\eta h(t)}{h(t) + k(t)} k(t) \right], \quad (5)$$

где $L_n^{(a)}(\cdot)$ — обобщенный полином Лагерра.

Таким образом, формулы (2), (3), (5) описывают распределение числа фотонов на выходе усилителя (РГИ — среды) при различных начальных условиях. Однако для расчёта характеристик обнаружения сигнала необходимо учесть также внутренний шум приёмника — оптического детектора. Обычно считают, что распределение этого шума — пуассоновское $\Pi(n, \varepsilon)$. Этот шум принципиально неустраним и добавляется к фотонам на выходе усилителя. В результате необходимо рассмотреть следующее распределение числа фотонов.

Если сигнала нет (выполняется гипотеза H_0), то на входе детектора присутствует аддитивная смесь шумов усилителя и детектора. Распределение этой смеси несложно получить из (2), (4) как

$$P_{\Sigma}^{(H_0)}(n, t) = P_1(n, t) * \Pi(n, \varepsilon). \quad (6)$$

Аналогично получается распределение числа фотонов на входе детектора и в случае наличия полезного сигнала (гипотеза H_1). При этом, если количество фотонов на входе — детерминированная величина, то распределение на входе детектора описывается выражением

$$P_{\Sigma_1}^{(H_1)}(n, t) = P_2(n, t) * \Pi(n, \varepsilon). \quad (7)$$

Наконец, в случае случайного (пуассоновского) распределения числа фотонов на входе усилителя, имеем

$$P_{\Sigma_2}^{(H_1)}(n, t) = P_3(n, t) * \Pi(n, \varepsilon). \quad (8)$$

Следовательно, формулы (6)—(8) могут быть использованы для расчёта эффективности обнаружения оптического сигнала при наличии входного усилителя.

ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБНАРУЖЕНИЯ ОПТИЧЕСКОГО СИГНАЛА. Известно [8], что для решения задачи обнаружения сигнала на фоне шумов широкое распространение получили алгоритмы, основанные на расчёте отношения правдоподобия. Применим подобный метод и в данном случае. Тогда решение о наличии или отсутствии полезного сигнала на входе приёмника будет определяться, исходя из следующего правила:

$$\Lambda[n] = \frac{P(n|H_1)}{P(n|H_0)} \begin{matrix} > H \\ < H \end{matrix} \begin{matrix} H_1 \\ H_0 \end{matrix}, \quad (9)$$

где H — порог обнаружения, $P(n|H_i)$ — вероятность появления n фотонов при выполнении гипотезы $H_i (i = 0, 1)$.

Обозначим $P_s(n)$ — распределение числа фотонов, соответствующее сигналу, а $P_N(n)$ — аналогичное распределение, соответствующее шуму, не конкретизируя виды этих распределений. Предположим, что сигнал и шум независимы, аддитивно складываются. Тогда отношение правдоподобия может быть представлено как

$$\Lambda[n] = \sum_{k=0}^n P_s(k) P_N(n-k) / P_N(n). \quad (10)$$

Возвращаясь к нашей задаче, несложно заметить, что распределение $P_N(n) = P_{\Sigma}^{(H_0)}(n, t)$. В то же время распределение числа фотонов, соответствующее сигналу $P_s(n)$, определяется либо формулой (7), либо (8) в зависимости от распределения числа фотонов на входе среды.

В [9] показано, что вместо достаточно сложной статистики (10) для решения задачи обнаружения сигнала на входе РГИ-среды (усилителя) можно воспользоваться значительно более простым правилом, основанным на подсчёте числа фотонов и сравнении с некоторым порогом:

$$n \begin{matrix} > h \\ < h \end{matrix} \begin{matrix} H_1 \\ H_0 \end{matrix}. \quad (11)$$

Порог обнаружения h будем выбирать, исходя из критерия идеального наблюдателя [8], при котором осуществляется поиск минимума средней вероятности ошибки

$$P_E(h) = \frac{1}{2}[P_1(h) + P_2(h)], \text{ где } P_1(h) = \sum_{n=h}^{\infty} P(n|H_0),$$

$$P_2(h) = \sum_{n=0}^h P(n|H_1). \text{ Решающие правила (10) и (11) эквивалентны при выполнении условия [9]:}$$

$$d^2 [\log f_N(x)]/dx^2 \leq 0, \quad (12)$$

где $f_N(x)$ — непрерывное распределение $P_N(x)$, получаемое путём подстановки в $P_N(x)$: $x = n, \Gamma(x+1) = x!, x \geq 0$. При этом $f_N(x) = P_N(x)$ при целых x .

Используя распределение (6) в качестве распределения числа фотонов в отсутствии сигнала (гипотеза H_0), легко убедиться в выполнении условия (12). Таким образом, в дальнейшем для решения задачи обнаружения будем использовать простое решающее правило (11).

Выполним теперь расчёт средней вероятности ошибки $P_e(h)$. Для этого учтём, что

$$P_1(h) = \sum_{n=h}^{\infty} P(n|H_0) = \sum_{n=h}^{\infty} P_{\Sigma}^{(H_0)}(n, t), \quad (13)$$

$$P_2(h) = \sum_{n=0}^h P(n|H_1) =$$

$$= \begin{cases} \sum_{n=0}^h P_{\Sigma_1}^{(H_1)}(n, t), & n_0 - \text{детерминированная} \\ \text{величина,} \\ \sum_{n=0}^h P_{\Sigma_2}^{(H_1)}(n, t), & n_0 - \text{случайная величина,} \end{cases} \quad (14)$$

Далее на рис. 1—4 представлены зависимости вероятности средней ошибки P_e от различных параметров при пороге h , обеспечивающем минимум значения этой вероятности. На всех рисунках сплошные кривые соответствуют случаю детерминированного входного числа фотонов, пунктирные — пуассоновского. Кроме того, все зависимости на рис. 1—4 построены при $n_0 = \eta = 10$.

На рис. 1 представлены зависимости вероятности средней ошибки P_e от интегрального параметра рождения фотонов $\Lambda = \lambda T$ при трех различных значениях параметра поглощения $M = \mu T$, где T — интервал наблюдения. Для всех кривых $N = \nu T = 2, \varepsilon = 1$. Кривые 1 на

этом рисунке построены при $M = 0.1$, кривые 2 — при $M = 0.5$, кривые 3 — при $M = 1$.

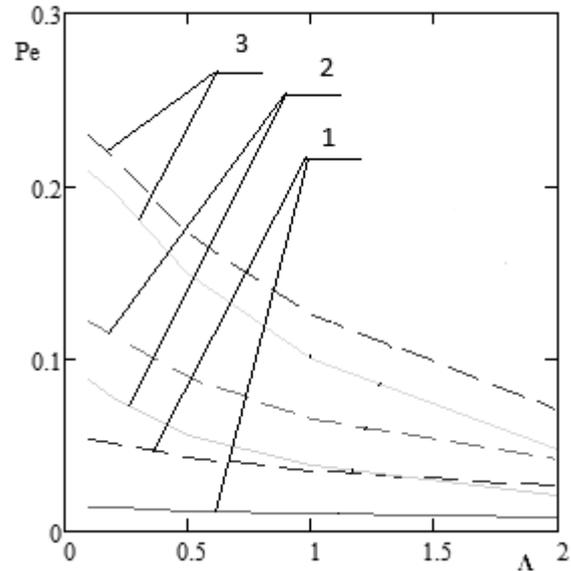


Рис. 1. Зависимость вероятности средней ошибки от параметра рождения фотонов

Из анализа рис.1 следует, что вероятность средней ошибки P_e убывает с ростом параметра рождения фотонов Λ . Это можно объяснить, используя формулу для математического ожидания распределения числа фотонов

$$m = n \exp[(\lambda - \mu)t] + (\nu/(\lambda - \mu))(\exp[(\lambda - \mu)t] - 1), \quad (15)$$

причем $n = n_0$ — при детерминированном входном числе фотонов, $n = \eta$ — при пуассоновском. Первое слагаемое в формуле (15) соответствует сигнальной, а второе — шумовой составляющей математического ожидания числа фотонов на выходе РГИ-среды. Из данной формулы видно, что с ростом параметра Λ также возрастает и коэффициент усиления $K = \exp[(\lambda - \mu)t]$. В то же время с увеличением Λ сигнал усиливается сильнее, чем шум спонтанного излучения, что также следует из (15). Чем меньше параметр поглощения M , тем больше коэффициент усиления, а значит меньше вероятность средней ошибки. Кроме того, средняя вероятность ошибки в этих условиях практически не зависит от величины параметра Λ . Как и следовало ожидать, при случайном входном сигнале вероятность средней ошибки превышает аналогичную вероятность для известного (детерминированного) числа фотонов на входе усилителя. Остальные

выводы справедливы и для этого случая.

На рис. 2 представлены зависимости вероятности средней ошибки P_e от интегрального параметра поглощения фотонов $M = \mu T$ при трех различных значениях параметра рождения $\Lambda = \lambda T$. На всех кривых $N = \nu T = 1, \epsilon = 1$. Кривые 1 на этом рисунке построены для $\Lambda = 0.2$, кривые 2 — для $\Lambda = 1$, кривые 3 — для $\Lambda = 2$.

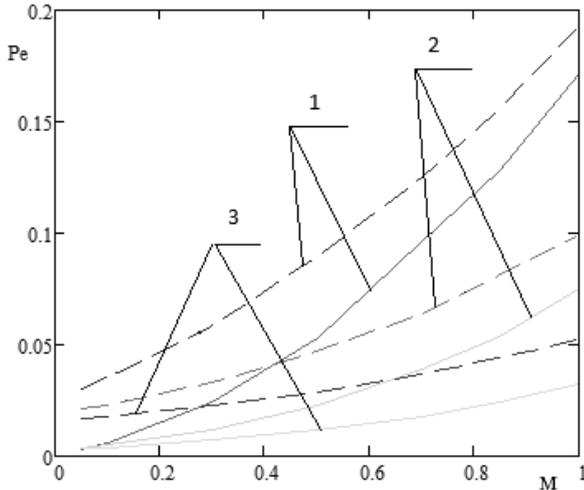


Рис. 2. Зависимость вероятности средней ошибки от параметра поглощения фотонов

Из анализа рис.2 следует, что вероятность средней ошибки P_e возрастает с ростом параметра поглощения фотонов M . Такое её поведение объясняется аналогичным образом, как и для рис. 1, с помощью формулы (15). Чем больше параметр рождения Λ , тем больше коэффициент усиления, а значит меньше вероятность средней ошибки. Как и следовало ожидать, при случайном входном сигнале вероятность средней ошибки больше (приблизительно раза в два), чем в случае известного (детерминированного) числа фотонов на входе. Остальные выводы справедливы и для этого случая.

На рис. 3 представлены зависимости вероятности средней ошибки P_e от интегрального параметра иммиграции фотонов $N = \nu T$ при трех различных параметрах поглощения $M = \mu T$. На всех кривых $\Lambda = \lambda T = 1, \epsilon = 1$. Кривые 1 на этом рисунке построены для $M = 0.1$, кривые 2 — для $M = 0.5$, кривые 3 — для $M = 1$.

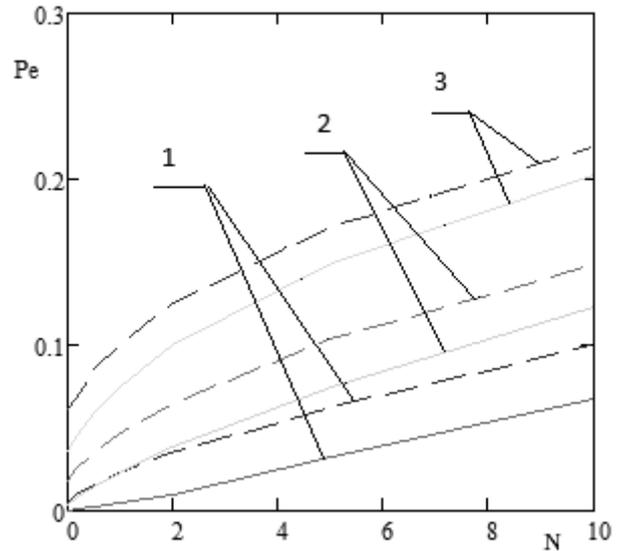


Рис. 3. Зависимость вероятности средней ошибки от параметра иммиграции фотонов

Из анализа рис.3 следует, что вероятность средней ошибки P_e возрастает с ростом параметра иммиграции фотонов N . Это объясняется всё той же формулой (15), из которой видно, что рост параметра иммиграции соответствует увеличению шума спонтанного излучения усилителя. Причем скорость роста вероятности средней ошибки тем больше, чем больше коэффициент усиления (чем меньше M). Остальные выводы аналогичны выводам к рис.2.

На рис. 4 представлены зависимости вероятности средней ошибки P_e от интегральной интенсивности темнового тока фотодетектора ϵ при трех различных значениях параметра поглощения $M = \mu T$. На всех кривых $\Lambda = \lambda T = 1, N = \nu T = 1$. Кривые 1 на этом рисунке построены для $M = 0.1$, кривые 2 — для $M = 0.5$, кривые 3 — для $M = 1$. Кроме того, на этом рисунке кривой 4 представлена зависимость вероятности средней ошибки P_e от интегральной интенсивности темнового тока фотодетектора ϵ при отсутствии усилителя. Несложно показать, что эта вероятность описывается формулой:

$$P_E(h) = \left\{ 1 - \frac{\Gamma(h, \epsilon)}{(h-1)!} + \frac{\Gamma(h+1, \eta + \epsilon)}{h!} \right\} / 2. \quad (16)$$

Из анализа рис.4 видно, что вероятность средней ошибки P_e возрастает с ростом интенсивности темнового тока ϵ , т.к. увеличивается суммарный шум. Скорость возрастания вероятности тем меньше, чем больше коэффициент

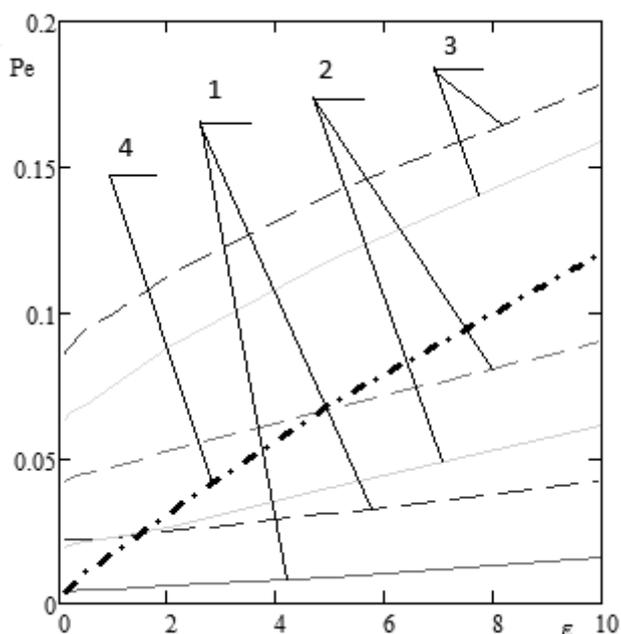


Рис. 4. Зависимость вероятности средней ошибки от интенсивности темнового тока фотодетектора

усиления, т.к. в этом случае он не влияет на скорость приращения суммарного шума. Как и следовало ожидать, при случайном входном сигнале вероятности полной ошибки существенно больше, чем при детерминированном. Остальные выводы справедливы и для этого случая. Из сравнения вероятностей ошибок при наличии и при отсутствии усилителя можно сделать следующие выводы. Наличие предусилителя может привести как к улучшению, так и к ухудшению эффективности обнаружения сигналов: все зависит от его характеристик, а точнее, от соотношения между такими его параметрами, как Λ , M и N . Очевидно, что наличие предусилителя будет способствовать повышению эффективности обнаружения оптического сигнала с ростом параметра рождения Λ и с уменьшением параметров поглощения M и иммиграции N . Кроме того, результат сравнения также зависит от интенсивности темнового тока ϵ . Точные количественные результаты подобного сравнения видны из рис.4, а также следуют из формул (6)—(8), (13), (14) и (16).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. В статье подробно исследована модель лазерного усилителя при использовании ветвящихся процессов типа процессов «рождения-гибели-иммиграции». Приведено физическое обоснование подобной модели. Выполнен точный расчет характеристик числа

фотонов на выходе усилителя. Получены и исследованы характеристики обнаружения слабых оптических сигналов стандартным приемником прямого усиления с использованием предусилителя, описываемым моделью среды типа «рождения-гибели-иммиграции». Определены условия повышения эффективности обнаружения оптических сигналов приемниками с предусилителями. Выполнен сравнительный анализ эффективности обнаружения оптических сигналов с использованием и без использования предусилителей. Определены условия, при которых применение предусилителя позволяет повысить эффективность обнаружения. Полученные результаты позволяют осуществить обоснованный выбор структуры приемного устройства слабых оптических сигналов, а также определить параметры предусилителя, обеспечивающего заданную эффективность обнаружения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Loudon R., Shepherd T.J. Properties of the optical quantum amplifier / R. Loudon, T. J. Shepherd // Opt. Acta. — 1984. — vol. 31. — P. 1243—1269.
2. Shepherd T.J., Jakeman E. Statistical analysis of an incoherently coupled, steady-state optical amplifier / T. J. Shepherd, E. Jakeman // J. Opt. Soc. Amer. B. — 1987. — vol. 4. — P. 1860—1869.
3. Скалли М. О. Квантовая оптика / М. О. Скалли, М. С. Зубайри. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 510 с.
4. Shimoda K., Takahasi H., Townes C. H. Fluctuations in amplification of quanta with application to maser amplifiers / K. Shimoda, H. Takahasi, C. H. Townes // J. Phys. Soc. Japan. — 1957. — vol. 12. — P. 687—700.
5. Феллер В. Теория вероятностей / В. Феллер. — М.: Мир, 1975. — 421 с.
6. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок. — М.: Машиностроение, 1979. — 432 с.
7. Diament P., Teich M. C. Evolution of the Statistical Properties of Photons Passed Through a Traveling-Wave Laser Amplifier / P. Diament, M. C. Teich // IEEE Journal of quantum electronics. — 1992. — vol. 28. — N 5. — P. 1325—1334.
8. Тихонов В. И. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем / В. И. Тихонов, В. Н. Харисов. — М.: Радио и связь, 1991. — 608 с.
9. Teich M. C., Prucnal P. R., Vannucci G. Optimum photon detection with a simple counting processor / M. C. Teich, P. R. Prucnal, G. Vannucci // OPTICS LETTERS. — 1977. — vol. 1. — N 6. — P. 208—211.

В. И. Парфёнов, В. С. Кириллов

*Парфенов В. И., профессор кафедры радио-
физики, доктор физико-математических наук,
Воронежский государственный университет
Тел.: 208-916, 8-908-146-69-96
E-mail: vip@phys.vsu.ru*

*Parfenov V. I., Professor of Radiophysics
Chair, doctor of physical and mathematical sci-
ences, Voronezh State University
Tel.: 208-916, 8-908-146-69-96
E-mail: vip@phys.vsu.ru.*

*Кириллов В. С., аспирант кафедры радио-
физики, Воронежский государственный уни-
верситет
Тел.: 208-916, 8-908-136-51-69
E-mail: vkirillow@mail.ru.*

*Kirillov V.S., post-graduate of Radiophysics
Chair, Voronezh State University
Tel.: 208-916, 8-908-146-69-96
E-mail: vkirillow@mail.ru*