

# АППРОКСИМАЦИЯ ПОТЕНЦИАЛА ПОЛЯРИЗАЦИИ ВАКУУМА КУЛОНОВСКИМ ПОЛЕМ

Н. Л. Манаков, А. А. Некипелов

*Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 19.11.2012 г.

**Аннотация:** В настоящей работе представлена численная аппроксимация поляризационного потенциала как функции расстояния от ядра и заряда ядра. Приведенные формулы и таблицы коэффициентов дают значения потенциала с относительной погрешностью не хуже  $10^{-6}$  для значений  $\alpha Z \leq 0.75$ , и не хуже  $3 \cdot 10^{-9}$  при  $\alpha Z = 0$ . Ядро рассматривалось как точечное.

**Ключевые слова:** поляризация вакуума, КЭД-поправки, многозарядные ионы, квантовая электродинамика (КЭД)

**Abstract:** In this paper the numerical approximation for the polarization potential as a function of distance from the nucleus and the nuclear charge is presented. The obtained formulas and tables of coefficients give the potential values with a relative error not worse than  $10^{-6}$  for values of  $\alpha Z \leq 0.75$  and not worse than  $3 \cdot 10^{-9}$  at  $\alpha Z = 0$ . Nucleus considered as a point.

**Keywords:** vacuum polarization, QED-corrections, multiply charged ions, quantum electrodynamics.

Учет поляризации вакуума кулоновским полем ядра необходим, в частности, при расчете фейнмановских диаграмм различных порядков, возникающих при теоретическом исследовании поправок к спектрам и других КЭД-эффектов в многозарядных ионах (см., например, обзор [1]). Расчет плотности заряда, индуцированного в вакууме атомным ядром, и соответствующего ему потенциала представляет собой технически сложную задачу, поэтому здесь полезны достаточно точные численные аппроксимации. Эта задача была решена нами в работе [2], там же приведены и численные аппроксимации потенциала, использованные в дальнейшем рядом авторов, в частности, в работах [3], [4]. Однако достигнутая в настоящее время точность экспериментальных и теоретических результатов требует и более точных, чем в [2], значений потенциала, расчет которых проводится в настоящей работе. В статье используются релятивистские единицы:  $\hbar = c = m_e = 1$ ,  $\alpha = e^2 / \hbar c$  — постоянная тонкой структуры,  $e > 0$  — элементарный заряд.

Плотность распределения индуцированного заряда, обусловленного поляризацией вакуума полем атомного ядра, может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \rho^{(1)}(r) + \rho^{(3)}(r) + \rho^{(5)}(r) + \dots = \\ &= \rho^{(1)}(r) + \rho^{(3+)}(r), \quad e\rho^{(n)} \sim \alpha(\alpha Z)^n, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\rho^{(1)}(r)$  — линейная по  $\alpha Z$  часть плотности, соответствующая потенциалу Юлинга. Нелинейная по  $\alpha Z$  величина  $\rho^{(3+)}(r)$  (обусловленные ею поправки в спектры называются также поправками Вичмана—Кролла) представляется как сумма парциальных слагаемых

$$\rho^{(3+)}(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^{(3+)}(r), \quad \text{где } k = j + 1/2. \quad (2)$$

Парциальные слагаемые, в свою очередь, выражаются через радиальную часть парциального разложения функции Грина  $G_{jl}(E; r, r')$  уравнения Дирака с кулоновским потенциалом следующим образом:

$$\rho_k^{(3+)}(r) = -\frac{ek}{4\pi^2 r^3} \int_0^{\infty} g_k^{reg}(\omega, r) d\omega, \quad (3)$$

$$g_k(\omega, r) = \sum_{l=j\pm 1/2} Sp \left[ G_{jl}(i\omega; r, r) + G_{jl}(-i\omega; r, r) \right], \quad (4)$$

$$k = j + 1/2.$$

Здесь  $g_k^{reg}$  получается из  $g_k$  вычитанием из последней линейной по  $\alpha Z$  части:

$$g_k^{reg}(r) = g_k(r) - Z \left[ \frac{dg_k}{dZ} \right]_{Z=0}. \quad (5)$$

Это вычитание соответствует вычитанию из  $\rho(r)$  вклада, соответствующего потенциалу Юлинга, и тем самым решается проблема перенормировки.

С учетом равенства нулю полного индуцированного заряда

$$Q = 4\pi \int_0^{\infty} \rho(r) r^2 dr = 0, \quad (6)$$

выражение для потенциала, соответствующего плотности (1), имеет вид:

$$V_{pol}(r) = -4\pi \int_r^{\infty} r' \left( \frac{r'}{r} - 1 \right) \rho(r') dr'. \quad (7)$$

Аналогично (1), этот потенциал можно представить в виде

$$V_{pol} = V^{(1)}(r) + V^{(3)}(r) + V^{(5)}(r) + \dots = V^{(1)}(r) + V^{(3+)}(r). \quad (8)$$

Здесь  $V^{(1)}(r)$  — потенциал Юлинга, линейный по  $Z$ , а  $V^{(3+)}(r)$  содержит нелинейные по  $Z$  слагаемые.

По указанным выше формулам, более детально проанализированным в [2, 5], нами были проведены численные расчеты плотности  $\rho^{(3+)}(r)$  и потенциала  $V^{(3+)}(r)$ . Для построения аппроксимаций потенциала была рассчитана его кубичная по  $Z$  часть  $V^{(3)}(r, Z)$  по формулам, приведенным в [6], и представлена в виде

$$-eV^{(3)}(r, Z) = \alpha(\alpha Z)^3 \tilde{V}^{(3)}(r). \quad (9)$$

Для области значений  $r < 2$

$$\tilde{V}^{(3)}(r) = \sum_{i=0}^7 c_i r^{i-1} + \ln r \sum_{i=0}^4 c_{8+i} r^{2+i} + \ln^2 r \sum_{i=0}^3 c_{13+i} r^{i+3}. \quad (10)$$

Для интервала  $r \in [2, 6.5]$

$$\tilde{V}^{(3)}(r) = \frac{1}{r^6} \sum_{i=0}^{15} c_{17+i} (r-4)^i. \quad (11)$$

Для  $r \geq 6.5$

$$\tilde{V}^{(3)}(r) = \sum_{i=0}^{13} c_{33+i} r^{-2i-5}. \quad (12)$$

Коэффициенты  $c_i$  даны в таблице 1. Во всех таблицах числа в скобках обозначают десятичный порядок, например  $1.508(-6) = 1.508 \cdot 10^{-6}$ .

При  $r < 2$  приведенные выше формулы дают значения  $\tilde{V}^{(3)}(r)$  с относительной погрешностью не хуже  $3 \cdot 10^{-10}$ , а при  $r \geq 2$  — не хуже  $3 \cdot 10^{-9}$ .

Ниже приведены формулы, позволяющие вычислить потенциал  $V^{(3+)}(r, Z)$ , записанный в

форме

$$-eV^{(3+)}(r, Z) = \alpha(\alpha Z)^3 \tilde{V}^{(3+)}(r, \lambda), \quad (13)$$

где  $\lambda = (\alpha Z)^2 / [1 + \sqrt{1 - (\alpha Z)^2}]$ , для значений  $\alpha Z \leq 0.75$ , т.е. вплоть до  $Z = 103$ , с относительной погрешностью не хуже  $10^{-6}$ .

Для области значений  $r < 4.9$ , разбитой на три интервала, использовалось представление

$$\tilde{V}^{(3+)}(r, \lambda) = \tilde{V}^{(3)}(r) \left( 1 + \sum_{i=0}^{i_1} \sum_{k=1}^{k_1} a_{ik} (r - r_0)^i \lambda^k \right). \quad (14)$$

Для интервала  $r < 0.065$  и значений  $i_1 = 9, k_1 = 4, r_0 = 0$  коэффициенты  $a_{ik}$  даны в таблице 2. В интервале  $r \in [0.065, 0.57]$  и  $i_1 = 9, k_1 = 4, r_0 = 0.3$  коэффициенты  $a_{ik}$  даны в таблице 3. В интервале  $r \in [0.57, 4.9]$  и  $i_1 = 12, k_1 = 3, r_0 = 3$  коэффициенты  $a_{ik}$  даны в таблице 4.

Для области  $r \geq 4.9$  использовалось представление

$$\tilde{V}^{(3+)}(r, \lambda) = \tilde{V}^{(3)}(r) + \frac{\lambda}{r^9} \left( \sum_{i=0}^{12} \frac{a_i}{r^{2i}} + \lambda \sum_{i=0}^8 \frac{a_{13+i}}{r^{2i}} + \lambda^2 \sum_{i=0}^2 \frac{a_{22+i}}{r^{2i+4}} \right). \quad (15)$$

Коэффициенты  $a_i$  даны в таблице 5.

В таблице 6 приведены точные и аппроксимированные значения потенциала  $\tilde{V}^{(3+)}(r, \lambda)$ , а также относительные погрешности для значений  $r$  в каждом из интервалов аппроксимаций.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Шабеев В. М. Квантовая электродинамика тяжелых атомов и ионов: статус и перспективы / В. М. Шабеев // УФН — 2008. — Т. 178 — С. 1220—1225.
2. Fainstein A. G. Vacuum polarization by a Coulomb field. Analytical approximation of the polarization potential / A. G. Fainstein, N. L. Manakov, A. A. Nekipelov // J. Phys. B.: At. Mol. Opt. Phys. — 1990. — V. 23 — P. 559—569.
3. Yerokhin V. A. Nuclear-size correction to the Lamb shift of one-electron atoms / V. A. Yerokhin // Phys. Rev. A. — 2011. — V. 83. — P. 012507 (1—10).
4. Glazov D. A. Evaluation of the screened QED corrections to the g factor and the hyperfine splitting of lithiumlike ions / D. A. Glazov, A. V. Volotka, V. M. Shabaev, I. I. Tupitsyn and G. Plunien // Phys. Rev. A. — 2010. — V. 81. — P. 062112 (1—11)
5. Манаков Н. Л. Поляризация вакуума сильным кулоновским полем и ее вклад в спектры многозарядных ионов / Н. Л. Манаков, А. А. Некипелов,

Таблица 1

Коэффициенты  $c_i$

$i$	$c_i$	$c_{17+i}$	$c_{33+i}$
0	2.09400223230612(-2)	1.840599562(-02)	2.829421201(-03)
1	-6.32872935135875(-2)	6.904293516(-04)	1.419531914(-02)
2	1.65731329889455(-1)	-2.336919042(-04)	1.329122936(-01)
3	8.94917333993648(-2)	4.141690871(-04)	2.440142043( 00)
4	-1.49037972938795(-1)	-1.357377739(-04)	-1.666377891( 02)
5	1.61060326456320(-1)	1.054579484(-05)	8.263939921( 04)
6	-2.77795743346460(-1)	7.166337955(-06)	-1.830462942( 07)
7	5.51070428239548(-2)	-3.118572223(-06)	2.608074207( 09)
8	2.22206163237763(-1)	5.747464015(-07)	-2.290806982( 11)
9	1.44438097905071(-1)	-1.397176849(-08)	1.277392347( 13)
10	1.01183787049750(-1)	-2.380401218(-08)	-4.598075106( 14)
11	8.08066257659644(-2)	8.302652500(-09)	1.043509719( 16)
12	-1.77383292897469(-2)	-1.493740499(-09)	-1.365036352( 17)
13	2.57622481609891(-2)	3.379894309(-11)	7.873870977( 17)
14	2.72935944302010(-2)	4.711700526(-11)	
15	-3.65042490774651(-2)	-6.930992009(-12)	
16	1.60265697878146(-3)		

Таблица 2

Коэффициенты  $a_{ik}$  для  $r < 0.065$

$i$	$a_{i1}$	$a_{i2}$	$a_{i3}$	$a_{i4}$
0	6.8013144(-1)	3.6574339(-01)	1.6560327(-01)	9.5427961(-02)
1	-9.3543301(-1)	-1.4404188( 00)	-7.5766000(-01)	-3.3837419( 00)
2	7.1137824( 0)	2.6269637( 01)	-1.8505126( 01)	2.0348253( 02)
3	-1.4457279( 2)	-1.1348017( 03)	2.4366205( 03)	-1.3637254( 04)
4	4.3669940( 3)	5.0452898( 04)	-1.4242866( 05)	6.8808164( 05)
5	-1.1677107( 5)	-1.6249559( 06)	5.0879516( 06)	-2.3214427( 07)
6	2.2324625( 6)	3.4426517( 07)	-1.1347061( 08)	5.0283395( 08)
7	-2.7487106( 7)	-4.5191326( 08)	1.5349659( 09)	-6.6843170( 09)
8	1.9337939( 8)	3.3208324( 09)	-1.1502721( 10)	4.9515440( 10)
9	-5.8809002( 8)	-1.0421858( 10)	3.6598717( 10)	-1.5626036( 11)

Таблица 3

Коэффициенты  $a_{ik}$  для  $r \in [0.065, 0.57]$

$i$	$a_{i1}$	$a_{i2}$	$a_{i3}$	$a_{i4}$
0	5.5381732(-1)	2.3667464(-1)	8.5746818(-2)	6.3305888(-3)
1	-2.3966131(-1)	-1.8182894(-1)	-9.0973983(-2)	-3.6693154(-2)
2	2.6033390(-1)	2.8245365(-1)	1.7596765(-1)	1.1434172(-1)
3	-4.5084888(-1)	-5.6011797(-1)	-3.8814037(-1)	-3.2293834(-1)
4	8.5843022(-1)	1.2720945( 0)	9.6933191(-1)	1.2234564( 0)
5	-1.6173338( 0)	-2.6245828( 0)	-2.1055817( 0)	-2.8790135( 0)
6	1.5646938( 0)	1.3091473( 0)	1.1391913( 0)	-6.2287475( 0)
7	-5.1707013( 0)	-7.8489891( 0)	-7.4464685( 0)	1.5404821( 0)
8	4.3780788( 1)	1.0332338( 2)	8.9269215( 1)	2.5520220( 2)
9	-8.5568916( 1)	-2.1249129( 2)	-1.8083996( 2)	-5.8123897( 2)

Таблица 4

Коэффициенты  $a_{ik}$  для  $r \in [0.57, 4.9)$

$i$	$a_{i1}$	$a_{i2}$	$a_{i3}$
0	2.1235467(-1)	7.0458174(-2)	2.8420734(-2)
1	-1.1502542(-1)	-4.3314202(-2)	-1.3682886(-2)
2	6.3151761(-3)	4.1863834(-3)	-1.3170048(-4)
3	5.4395251(-3)	1.8360565(-3)	6.6785609(-4)
4	4.6491182(-4)	1.4449149(-4)	2.3730633(-4)
5	-4.9584061(-4)	-2.3732722(-4)	-1.1803236(-4)
6	-7.2384297(-5)	-3.0259596(-5)	-3.5713158(-5)
7	3.2523395(-5)	2.2953495(-5)	1.8474119(-5)
8	2.1778491(-5)	1.8254077(-5)	1.7525942(-5)
9	-5.0581404(-6)	-5.2611411(-6)	-5.1550770(-6)
10	-3.5768089(-6)	-3.7153954(-6)	-3.8022523(-6)
11	3.2368941(-7)	3.9365340(-7)	4.3553406(-7)
12	3.2702252(-7)	3.5942137(-7)	3.6642311(-7)

Таблица 5

Коэффициенты  $a_i$

$i$	$a_i$	$a_{g+i}$	$a_{18+i}$
0	2.6215464259(-03)	3.1609993750( 15)	-9.2032018146( 07)
1	2.8016643324(-01)	-4.1146486069( 16)	2.1824057189( 09)
2	-1.2813943377( 02)	3.0987916586( 17)	-2.6583114556( 10)
3	5.2102564154( 04)	-1.0290092533( 18)	1.3203353312( 11)
4	-1.1228221003( 07)	-1.2482737415(-03)	-6.6477713417( 00)
5	1.4206203493( 09)	-2.3189219713(-01)	1.2137936596( 03)
6	-1.0593271001( 11)	9.3772578109( 01)	-2.0320050743( 04)
7	4.9935992403( 12)	-2.1128439281( 04)	
8	-1.5471055562( 14)	2.0371525781( 06)	

Таблица 6

Тестовые значения потенциала  $\tilde{V}^{(3+)}(r, \lambda)$

$r$		$\alpha Z = 0$	$\alpha Z = 0.5$	$\alpha Z = 0.75$
0.06	точн.	2.936532274603(-1)	3.20496166(-1)	3.692310148(-1)
	аппр.	2.936532274610(-1)	3.20496121(-1)	3.692309831(-1)
	погр.	2.5(-12)	1.4(-7)	8.6(-8)
0.5	точн.	1.231684737800(-2)	1.32126877(-2)	1.478805272(-2)
	аппр.	1.231684737794(-2)	1.32126843(-2)	1.478804887(-2)
	погр.	5.2(-12)	2.5(-7)	2.6(-7)
2.5	точн.	6.073292861036(-5)	6.30429021(-5)	6.703123257(-5)
	аппр.	6.073292864343(-5)	6.30428751(-5)	6.703121229(-5)
	погр.	5.4(-10)	4.3(-7)	3.0(-7)
7.0	точн.	1.910407014476(-7)	1.91151098(-7)	1.913289786(-7)
	аппр.	1.910407017420(-7)	1.91151103(-7)	1.913289798(-7)
	погр.	1.5(-9)	2.6(-8)	6.3(-9)

А. Г. Файнштейн // ЖЭТФ. — 1989. — Т. 95, В. 4.  
— С. 1167—1177

6. *Blomqvist J.* Vacuum polarization in exotic atoms / *J. Blomqvist* // Nuclear Physics B. — 1972. — V. 48. — P. 95—103.

*Манаков Н. Л., д.ф.-м.н., профессор каф. теоретической физики физического факультета ВГУ.*

*E-mail: manakov@phys.vsu.ru*

*Тел. (473) 2208-756*

*Manakov N. L., Doctor of Physics and Mathematics, professor, Physics Department, Voronezh State University.*

*E-mail: manakov@phys.vsu.ru*

*Некипелов А. А., к.ф.-м.н., доцент каф. теоретической физики физического факультета ВГУ.*

*E-mail: nekipelov@phys.vsu.ru*

*Тел. (473) 2208-756*

*Nekipelov A. A., Candidate of Physics and Mathematics, associate professor, Physics Department, Voronezh State University.*

*E-mail: nekipelov@phys.vsu.ru*