

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ АБСОЛЮТНОГО МАКСИМУМА РАЗРЫВНОГО СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С РЕЛЕЕВСКОЙ И ГАУССОВСКОЙ КОМПОНЕНТАМИ

А. В. Захаров

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 08.10.2012 г.

Аннотация. Найдены асимптотически точные выражения для функции распределения и вероятности превышения порога величиной абсолютного максимума суммы статистически независимых стационарных гауссовского и релеевского случайных процессов с недифференцируемой в нуле корреляционной функцией. Границы применимости полученных выражений установлены с помощью статистического моделирования на ЭВМ.

Ключевые слова: релеевский случайный процесс, гауссовский случайный процесс, величина абсолютного максимума, функция распределения, вероятность превышения порога.

Abstract. Asymptotically exact expressions of level crossing probabilities of absolute maximum of sum of statistically independent homogeneous Gaussian and Rayleigh random processes with undifferentiable correlation function are found. Applicability boundaries of obtained expressions are established by means of computer simulation of random process.

Key words: Rayleigh random process, Gaussian random process, absolute maximum (supremum), probability distribution, level crossing probability.

ВВЕДЕНИЕ. Актуальность. Важной проблемой, имеющей прикладное значение, является нахождение вероятностных распределений абсолютных максимумов случайных процессов. Задача анализа экстремальных значений случайных процессов встречается в различных областях физики и техники, в биологии и медицине, в экономике и др. В частности, вероятностные распределения величин абсолютных максимумов случайных процессов необходимо знать при расчете надежности сложных технических систем, при исследовании шероховатости поверхностей, при изучении предельных отклонений и устойчивости механических конструкций и др. В статистической радиофизике задача нахождения распределений абсолютных максимумов случайных процессов возникает в процессе анализа флуктуационных явлений при распространении радиоволн в различных средах, при изучении воздействия шума на пороговые радиоэлектронные устройства и следящие измерители, при анализе эффективности процедур обнаружения и обработки радиофизических сигналов, наблюдаемых на фоне помех и т.п.

Наибольшее развитие к настоящему времени получила теория экстремальных значений *гауссовских* случайных процессов [1—5]. Это обусловлено тем, что такие процессы хорошо моделируют многие физические явления, а также отличаются относительной простотой и естественностью математического описания. Адекватность гауссовской модели случайного процесса реальным физическим явлениям во многих случаях объясняется действием центральной предельной теоремы [6].

В задачах статистической радиофизики и радиотехники встречаются и негауссовские случайные процессы [7—9]. Одним из видов таких процессов является *релеевский* случайный процесс или χ -процесс с двумя степенями свободы [10, 11]. Релеевский случайный процесс описывает огибающую узкополосного гауссовского случайного процесса [10, 11] и наблюдается, например, в радиоприемных устройствах на выходе детектора огибающей при наличии гауссовского флуктуационного шума на входе приемника [11].

На практике релеевский случайный процесс может наблюдаться совместно с гауссовским случайным процессом. Наличие гауссовской

компоненты здесь часто обусловлено тепловыми шумами, имеющими гауссовское распределение вероятностей и возникающими в узлах и элементах электронной аппаратуры. В частности, присутствие гауссовской компоненты шума на выходе радиоприемника с детектором огибающей объясняется тепловыми шумами в каскадах приемника, следующих за детектором. Случайные процессы с релеевской и гауссовской компонентами также возникают в радиотехнических системах при обработке стохастических сигналов с детерминированной и случайной составляющими. В частности, такой случайный процесс описывает решающую статистику оптимального обнаружителя двухкомпонентного радиосигнала [12] с неизвестным временем прихода, наблюдаемого на фоне гауссовского аддитивного шума, если сигнал отсутствует на входе приемника. В этом случае для вычисления вероятности ошибки обнаружения I-го рода (вероятности ложной тревоги) требуется найти вероятность превышения заданного порога h величиной абсолютного максимума стационарного случайного процесса с независимыми гауссовской и релеевской компонентами.

Данная работа посвящена проблеме вычисления функции распределения $F_m(h)$ и вероятности $\alpha(h) = 1 - F_m(h)$ превышения порога h для величины абсолютного максимума стационарного случайного процесса, представляющего собой сумму статистически независимых гауссовской и релеевской компонент.

Известные результаты. Несмотря на большое внимание, уделяемое проблеме экстремальных значений случайных процессов, точное выражение для вероятности превышения порога величиной абсолютного максимума случайного процесса неизвестно в общем случае даже для стационарных гауссовских случайных процессов [1—5]. Точные результаты известны только в некоторых частных случаях, например, для треугольной корреляционной функции гауссовского процесса при ширине интервала определения процесса, не превышающей время его корреляции [13, 14]. В общем случае удается найти лишь асимптотически точные (с ростом h) выражения для вероятности превышения уровня h величиной абсолютного максимума гауссовского случайного процесса [1,3,4 и др.], либо различные приближения, включая

верхнюю или нижнюю границы этой вероятности.

Если корреляционная функция случайного процесса непрерывно дифференцируема хотя бы дважды, то можно использовать известный метод нахождения асимптотически точного (с ростом h) выражения для вероятности превышения уровня h случайным процессом. Этот метод основан на расчете среднего числа выбросов процесса за произвольный уровень h , как это делается в [1, 15]. Затем нужно учесть, что для гауссовского или релеевского процессов распределение числа выбросов процесса за уровень h сходится к закону Пуассона с увеличением h [1, 3, 5, 16—18 и др.]. Тогда, используя выражение для среднего числа выбросов, не трудно записать асимптотически точное (с ростом h) выражение для вероятности превышения уровня h величиной абсолютного максимума стационарного гауссовского или релеевского случайных процессов, как это делается, например, в гл.1 из [19]. Этот метод можно использовать и для суммы статистически независимых гауссовского и релеевского случайных процессов, как это делается, например, в [20] для суммы гауссовского и негауссовского процессов.

Однако в ряде приложений статистической радиофизики используются модели случайных процессов, корреляционные функции которых непрерывны, но недифференцируемы в точке максимума. Производные таких корреляционных функций имеют разрывы первого рода в данной точке, поэтому соответствующие им случайные процессы называют разрывными (нерегулярными) [21]. При этом реализации разрывных процессов непрерывны в среднеквадратическом [10, 11] в силу непрерывности их корреляционных функций. Примером разрывного процесса является случайный процесс с треугольной корреляционной функцией. Разрывные случайные процессы возникают во многих задачах обработки сигналов на фоне помех [19, 21, 22 и др.]. Так как корреляционные функции разрывных процессов недифференцируемы в точке максимума, то методика [1, 15] расчета среднего числа выбросов неприменима для разрывных случайных процессов.

В ряде работ рассмотрен метод расчета асимптотических распределений абсолютного максимума гауссовского случайного процесса

без наложения условия непрерывной дифференцируемости его корреляционной функции. Впервые этот метод, названный впоследствии методом двойной суммы [3], был применен в работе [23]. В [23] было показано, что поток А-выходов [3] стационарного разрывного гауссовского процесса за уровень h является асимптотически пуассоновским при $h \rightarrow \infty$, а также получено асимптотическое выражение для среднего числа А-выходов. Работа [23] содержала ряд ошибок, которые были исправлены в [24, 25]. На основе этих результатов можно найти асимптотически точное (с ростом h) выражение для вероятности превышения порога h величиной абсолютного максимума *разрывного гауссовского* стационарного случайного процесса [3, 19]. Аналогичное выражение для *разрывного релеевского* стационарного случайного процесса найдено в гл.1 [19]. Это выражение получено с учетом локально-марковских свойств этого процесса [19] на основе результатов [26], справедливых для марковского процесса.

Однако задача нахождения асимптотических распределений величины абсолютного максимума *суммы гауссовского и релеевского* процессов до сих пор оставалась нерешенной. В данной работе получены асимптотически точные (с ростом h) выражения функции распределения $F_m(h)$ и вероятности $\alpha(h) = 1 - F_m(h)$ превышения порога h для величины абсолютного максимума двухкомпонентного случайного процесса, представляющего собой сумму статистически независимых разрывных стационарных релеевского и гауссовского случайных процессов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Модель случайного процесса. Рассмотрим двухкомпонентный процесс

$$L(l) = L_0(l) + L_1(l), \quad l \in [\Lambda_1; \Lambda_2], \quad (1)$$

представляющий собой сумму статистически независимых стационарных гауссовского $L_0(l)$ и релеевского $L_1(l)$ случайных процессов на интервале $[\Lambda_1; \Lambda_2]$.

Пусть стационарный *гауссовский* случайный процесс $L_0(l)$ имеет математическое ожидание (МО) $M_0 = \langle L_0(l) \rangle$ и дисперсию $\sigma_0^2 = \langle [L_0(l) - M_0]^2 \rangle$, а нормированная корреляционная функция $R_0(l_2 - l_1) = \langle [L_0(l_1) - M_0][L_0(l_2) - M_0] \rangle / \sigma_0^2$ этого процесса при $|\Delta l| = |l_2 - l_1| \rightarrow 0$ допускает представление

$$R_0(\Delta l) = 1 - a_0 |\Delta l| + o(|\Delta l|), \quad (2)$$

причем $R_0(\Delta l) = o(1 / \ln |\Delta l|)$ при $|\Delta l| \rightarrow \infty$. Здесь $o(x)$ означает величину большего порядка малости, чем x , а $\langle \rangle$ обозначает усреднение по реализациям случайного процесса. Тогда гауссовский случайный процесс можно представить в виде

$$L_0(l) = M_0 + \sigma_0 \xi_0(l), \quad (3)$$

где $\xi_0(l) = [L_0(l) - M_0] / \sigma_0$ — стационарный центрированный гауссовский случайный процесс с единичной дисперсией и с корреляционной функцией (КФ) $\langle \xi_0(l_1) \xi_0(l_2) \rangle = R_0(l_2 - l_1)$, допускающей представление (2).

Релеевский случайный процесс $L_1(l)$ представим в виде [10, 11]

$$L_1(l) = \sqrt{L_{11}^2(l) + L_{12}^2(l)}, \quad (4)$$

где $L_{11}(l)$ и $L_{12}(l)$ — статистически независимые центрированные стационарные гауссовские случайные процессы с одинаковыми дисперсиями $\sigma_1^2 = \langle L_{1k}^2(l) \rangle$ и нормированными корреляционными функциями $R_1(l_2 - l_1) = \langle L_{1k}(l_1) L_{1k}(l_2) \rangle / \sigma_1^2$, $k = 1, 2$, допускающими при $|\Delta l| \rightarrow 0$ асимптотическое представление

$$R_1(\Delta l) = 1 - a_1 |\Delta l| + o(|\Delta l|), \quad (5)$$

причем $R_1(\Delta l) = o(1 / \ln |\Delta l|)$ при $|\Delta l| \rightarrow \infty$. Процесс (4) можно записать как

$$L_1(l) = \sigma_1 \sqrt{\xi_{11}^2(l) + \xi_{12}^2(l)}, \quad (6)$$

где $\xi_{11}(l) = L_{11}(l) / \sigma_1$, $\xi_{12}(l) = L_{12}(l) / \sigma_1$ — статистически независимые центрированные стационарные гауссовские случайные процессы с единичной дисперсией и с одинаковыми корреляционными функциями $\langle \xi_{1k}(l_1) \xi_{1k}(l_2) \rangle = R_1(l_2 - l_1)$, $k = 1, 2$, допускающими представление (5). Отметим, что случайные процессы $\xi_{11}(l)$, $\xi_{12}(l)$ и $\xi_0(l)$ также статистически независимы.

Таким образом, исследуемый случайный процесс (1) представим в виде

$$L(l) = M_0 + \sigma_0 \xi_0(l) + \sigma_1 \sqrt{\xi_{11}^2(l) + \xi_{12}^2(l)}, \quad (7)$$

$$l \in [\Lambda_1; \Lambda_2].$$

Здесь параметры σ_0 и σ_1 характеризуют соответственно вклад гауссовской $L_0(l)$ и релеевской $L_1(l)$ компонент в результирующий случайный процесс $L(l)$ (1).

Отметим, что, согласно (2), (5), нормированные корреляционные функции $R_0(\Delta l)$ и $R_1(\Delta l)$ гауссовской и релеевской компонент и, следовательно, корреляционная функция случайного процесса (1), непрерывно недифференцируемы в

точке $\Delta l = 0$, так как первая производная функций $R_0(\Delta l)$ и $R_1(\Delta l)$ имеет разрыв первого рода при $\Delta l = 0$. Поэтому соответствующие случайные процессы $L_0(l)$ и $L_1(l)$ называют *разрывными* (нерегулярными) [19, 21, 22]. Несмотря это, реализации случайных процессов $L_0(l)$ и $L_1(l)$ непрерывны в среднеквадратическом [10, 11], так как их нормированные корреляционные функции $R_0(\Delta l)$ и $R_1(\Delta l)$ непрерывны при $\Delta l = 0$.

Представление величины абсолютного максимума. Рассмотрим величину L_m абсолютного (наибольшего) максимума анализируемого случайного процесса (1) на интервале определения $l \in [\Lambda_1; \Lambda_2]$, т.е.

$$L_m = \sup_{l \in [\Lambda_1; \Lambda_2]} L(l) = \sup_{l \in [\Lambda_1; \Lambda_2]} [L_0(l) + L_1(l)]. \quad (8)$$

Релеевский случайный процесс (4) можно представить в виде

$$L_1(l) = \sup_{\varphi \in [-\pi; \pi]} L_{1\varphi}(l, \varphi), \quad (9)$$

как результат максимизации эквивалентного случайного поля

$$L_{1\varphi}(l, \varphi) = L_{11}(l) \cos(\varphi) + L_{12}(l) \sin(\varphi) \quad (10)$$

по переменной $\varphi \in [-\pi; \pi]$ для каждого фиксированного $l \in [\Lambda_1; \Lambda_2]$. Эквивалентное поле (10) является однородным центрированным гауссовским случайным полем с дисперсией σ_1^2 . Аналогично (6), случайное поле (10) удобно записать как

$$L_{1\varphi}(l, \varphi) = \sigma_1 [\xi_{11}(l) \cos(\varphi) + \xi_{12}(l) \sin(\varphi)]. \quad (11)$$

Тогда с учетом (9), (11) величину L_m (8) можно представить в виде

$$L_m = \sup_{l, \varphi \in \Theta} L_\varphi(l, \varphi), \quad (12)$$

т.е. как величину абсолютного максимума случайного поля

$$L_\varphi(l, \varphi) = M_0 + \sigma_0 \xi_0(l) + \sigma_1 [\xi_{11}(l) \cos(\varphi) + \xi_{12}(l) \sin(\varphi)] \quad (13)$$

в пределах области Θ значений l, φ , задаваемой условиями $l \in [\Lambda_1; \Lambda_2], \varphi \in [-\pi; \pi]$. Случайное поле (13) является *однородным гауссовским случайным полем* с математическим ожиданием M_0 и с корреляционной функцией

$$K(\Delta l, \Delta \varphi) = \sigma_0^2 R_0(\Delta l) + \sigma_1^2 R_1(\Delta l) \cos(\Delta \varphi). \quad (14)$$

При этом дисперсия случайного поля (13) равна $\sigma^2 = K(0, 0) = \sigma_0^2 + \sigma_1^2$.

Согласно (2), (5), корреляционная функция (14) случайного поля (13) при $\Delta l \rightarrow 0, \Delta \varphi \rightarrow 0$ допускает асимптотическое представление

$$K(\Delta l, \Delta \varphi) = \sigma^2 [1 - \eta |\Delta l| - \vartheta (\Delta \varphi)^2 / 2] + o(|\Delta l|) + o(\Delta \varphi)^2, \quad (15)$$

где $o(x)$ – величина большего порядка малости, чем x , а

$$\eta = \frac{a_0 \sigma_0^2 + a_1 \sigma_1^2}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2}, \quad \vartheta = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2} \leq 1. \quad (16)$$

Здесь параметр $1/\eta$ характеризует интервал корреляции случайного процесса (1), а величина $0 \leq \vartheta \leq 1$ задает относительный вклад релеевской компоненты в случайную составляющую исследуемого процесса (1). При $a_1 = a_2$ получаем $\eta = 1$.

Таким образом, величину L_m абсолютного максимума двухкомпонентного случайного процесса $L(l)$ (1) на интервале $l \in [\Lambda_1; \Lambda_2]$ можно представить как величину (12) абсолютного максимума гауссовского случайного поля $L_\varphi(l, \varphi)$ (13) в пределах области Θ значений l, φ , задаваемой условиями $l \in [\Lambda_1; \Lambda_2], \varphi \in [-\pi; \pi]$.

II. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ АБСОЛЮТНОГО МАКСИМУМА

Найдем функцию распределения $F_m(h) = P[L_m < h]$ величины абсолютного максимума L_m случайного процесса $L(l)$ (1) на интервале $l \in [\Lambda_1; \Lambda_2]$, а также связанную с ней вероятность $\alpha(h) = P[L_m > h] = 1 - F_m(h)$ превышения уровня h величиной L_m . Здесь и далее $P[A]$ означает вероятность события A . При этом воспользуемся представлением (12) величины L_m , как величины абсолютного максимума однородного гауссовского случайного поля $L_\varphi(l, \varphi)$ (13) в пределах области определения Θ , задаваемой условиями $l \in [\Lambda_1; \Lambda_2], \varphi \in [-\pi; \pi]$.

Точное выражение для функции распределения величины абсолютного максимума однородного гауссовского случайного поля при произвольном уровне h и произвольных размерах области определения Θ неизвестно. Следуя [1, 3, 4, 16, 19 и др.], получим асимптотически точные (с ростом h) выражения для функции распределения $F_m(h)$. При этом далее воспользуемся двумя методами.

Первый метод, основан на расчете среднего числа Λ -выходов однородного гауссовского случайного поля за уровень h [3] с учетом асимптотической пуассоновости [3] потока Λ -выходов этого поля при $h \rightarrow \infty$.

Второй метод основан на применении метода локально-аддитивной аппроксимации (ЛАА) [27], в разработке которого участвовал автор данной статьи.

1. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СРЕДНЕГО ЧИСЛА А-ВЫХОДОВ ГАУССОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

Используем асимптотическую пуассоновость потока А-выходов однородного гауссовского случайного поля $L_\varphi(l, \varphi)$ за уровень $h \rightarrow \infty$ [3]. Согласно [3], под А-выходом случайного поля $L_\varphi(l, \varphi)$ за уровень h называется такое пересечение уровня h реализацией поля в некоторой точке (l_0, φ_0) , что при $\rho > 0$ существует область значений параметров (l, φ) , прилегающая к точке (l_0, φ_0) и задаваемая условиями $l \in [l_0 - \rho/2; l_0 + \rho/2]$, $\varphi \in [\varphi_0 - \rho; \varphi_0]$ и $l \in [l_0 - \rho/2; l_0]$, $\varphi = \varphi_0$, в пределах которой реализация поля $L_\varphi(l, \varphi)$ не превосходит h . Пуассоновость потока А-выходов поля $L_\varphi(l, \varphi)$ за уровень h означает [3], что распределение числа А-выходов поля за этот уровень задается законом Пуассона [6, 11]. Тогда функцию распределения $F_m(h)$ при $h \rightarrow \infty$, аналогично гл.1 из [19], можно представить как

$$F_m(h) = \exp[-\Pi(h)], \quad (17)$$

где $\Pi(h)$ — среднее число А-выходов случайного поля $L_\varphi(l, \varphi)$ за уровень h в пределах области Θ , на которой ищется абсолютный максимум L_m .

В [3] приведено асимптотически точное (с ростом уровня h) выражение для среднего числа А-выходов однородного гауссовского случайного поля за уровень h . Применяя это выражение для случайного поля $L_\varphi(l, \varphi)$ (13) с корреляционной функцией (15) и учитывая, что область определения поля Θ задается условиями $l \in [\Lambda_1; \Lambda_2]$, $\varphi \in [-\pi; \pi]$, получаем

$$\Pi(h) = H_\alpha \frac{V \eta \sqrt{\vartheta} u^2}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right), \quad (18)$$

где H_α — постоянная Пикандса [3], величины η и ϑ определяются из (16),

$$u = (h - M_0) / \sigma \quad (19)$$

— нормированный уровень, а $V = 2\pi(\Lambda_2 - \Lambda_1) = 2\pi\lambda$ — площадь области определения Θ случайного поля $L_\varphi(l, \varphi)$, на которой рассматриваются А-выходы, причем $\lambda = \Lambda_2 - \Lambda_1$ и 2π — размеры области определения Θ по переменным l и φ соответственно. Согласно [3], посто-

янная Пикандса H_α в случае КФ (15) равна

$$H_\alpha = \lim_{v \rightarrow \infty} [H_\alpha^*(v) / v^2],$$

где $H_\alpha^*(v) = 1 + \int_0^\infty P[\sup_{l, \varphi \in \Theta} \chi(l, \varphi) > y] \exp(y) dy$, а

$\chi(l, \varphi)$ — гауссовское случайное поле с математическим ожиданием $M_\chi(l, \varphi) = -|l| - \varphi^2$ и корреляционной функцией $K_\chi(l_1, l_2, \varphi_1, \varphi_2) = |l_1| + |l_2| + \varphi_1^2 + \varphi_2^2 - |l_1 - l_2| - (\varphi_1 - \varphi_2)^2$. Такая постоянная H_α вычислена, например, в [28] и равна $H_\alpha = 1/\sqrt{\pi}$.

Отметим, что метод [3] вычисления среднего числа А-выходов случайного поля предполагает, что приведенный объем области Θ , равный $\Omega = V \eta \sqrt{\vartheta}$ [19], должен быть *не слишком мал* (по крайней мере, он не может быть равен 0) [3, 19]. Иными словами, должны быть *не слишком малы* приведённые размеры [19]

$$m_l = (\Lambda_2 - \Lambda_1) \eta = \lambda \eta, \quad m_\varphi = 2\pi \sqrt{\vartheta}. \quad (20)$$

области Θ по переменным l и φ соответственно. Если это условие не выполняется, то формула (18) имеет низкую точность при недостаточно больших значениях h . При $m_l = 0$ или $m_\varphi = 0$ формула (18) неприменима и дает значение $\Pi(h) \equiv 0$, так что, согласно (17), функция распределения $F_m(h) \equiv 1$ для всех h . Отметим, что значение $m_\varphi = 0$ достигается при $\vartheta = 0$, когда релейевская компонента $L_1(l)$ отсутствует. Поэтому в случае $\vartheta = 0$, когда случайный процесс (1) имеет только гауссовскую компоненту, формула (18) *неприменима*. Чем больше размеры m_l и m_φ (20), тем точнее асимптотическая аппроксимация (18) при конечных значениях h [19].

Следуя [19], используем асимптотически точные выражения (17), (18) для конечных значений уровня h при выполнении условий

$$m_l \gg 1, \quad \vartheta > 0. \quad (21)$$

Следуя [19], учтем, что функция (18) не является монотонной по переменной u . Существует граничное значение $u_0 = \sqrt{2}$, так что монотонное возрастание функции (18) с уменьшением уровня u сменяется убыванием этой функции при $u < u_0$. Тогда функция распределения $F_m(h)$ (17) возрастает с уменьшением уровня u при $u < u_0$. Это противоречит смыслу среднего числа А-выходов $\Pi(h)$ и функции распределения $F_m(h)$, которые не могут соответственно убывать и возражать с уменьшением уровня

и. С другой стороны, из общих соображений ясно, что $F_m(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow -\infty$. Поэтому можно использовать ступенчатую аппроксимацию [19]

$$F_m(h) = \begin{cases} \exp[-\Pi(h)] & \text{при } u \geq u_0; \\ 0 & \text{при } u < u_0; \end{cases} \quad (22)$$

где $\Pi(h)$ определяется из (18). Подставляя (18) в (22), окончательно получаем

$$F_m(h) = \begin{cases} \exp\left[-m_l \sqrt{\vartheta} u^2 \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\right] & \text{при } u \geq \sqrt{2}; \\ 0 & \text{при } u < \sqrt{2}; \end{cases} \quad (23)$$

где m_l — приведенная длина (20) априорного интервала $[\Lambda_1; \Lambda_2]$ возможных значений параметра l , а величины η и ϑ определяются из (16). Точность выражения (23) возрастает с увеличением нормированного уровня u (19), а также с увеличением значений m_l и m_φ (20), что эквивалентно увеличению $\lambda = \Lambda_2 - \Lambda_1$ и ϑ (16).

Рассмотрим *предельные случаи*. Пусть гауссовская компонента отсутствует, т.е. $M_0 = 0$, $\sigma_0 = 0$. Тогда в (23) следует положить $\vartheta = 1$ и получаем известное асимптотически точное (с ростом u) выражение [19] для функции распределения абсолютного максимума разрывного релеевского стационарного случайного процесса:

$$F_m(h) = \begin{cases} \exp\left[-m_l u^2 \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\right] & \text{при } u \geq \sqrt{2}; \\ 0 & \text{при } u < \sqrt{2}; \end{cases} \quad (24)$$

где, согласно (16), (19), (20), $m_l = \lambda a_1$, $u = h/\sigma_1$.

Если же отсутствует релеевская компонента, т.е. $\sigma_1 = 0$, то в (23) следует положить $\vartheta = 0$. Однако, при $\vartheta = 0$ формула (23) *не применима*. Поэтому в этом случае вместо (23) следует использовать известное асимптотически точное (с ростом u) выражение [19] для функции распределения абсолютного максимума разрывного гауссовского стационарного случайного процесса

$$F_m(h) = \begin{cases} \exp\left[-\frac{m_l u}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\right] & \text{при } u \geq 1; \\ 0 & \text{при } u < 1; \end{cases} \quad (25)$$

где, согласно (16), (19), (20), $m_l = \lambda a_0$, $u = h/\sigma_0$.

Анализ функции распределения $F_m(h)$ показывает, что она возрастает с уменьшением ϑ ,

т.е. с уменьшением вклада релеевской компоненты. Поэтому функцию распределения (25) абсолютного максимума гауссовского процесса можно рассматривать как *верхнюю границу* распределения $F_m(h)$ при всех возможных ϑ . Тогда зависимость (23) можно уточнить при малых значениях ϑ , если ограничить её сверху зависимостью (25). При этом функция (23) будет достигать граничного значения (25) уже при уровнях $u < 1/\sqrt{2\pi\vartheta}$.

2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЛОКАЛЬНО-АДДИТИВНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Напомним, что формула (23), полученная на основе [3], неприменима в предельном случае $\vartheta = 0$ гауссовского случайного процесса. При небольших значениях ϑ , когда вклад релеевской компоненты мал, формула (23) дает существенно завышенные значения вероятности $F_m(h)$. Этот недостаток можно устранить, если для вычисления функции распределения $F_m(h)$ использовать метод *локально-аддитивной аппроксимации* (ЛАА) [27], разработанный с участием автора данной статьи.

Сущность метода ЛАА. Известно [4, 19 и др.], что вероятность превышения высокого уровня h реализацией однородного случайного поля $L(x_1, x_2, \dots, x_N)$ определяются *локальным поведением* вероятностных характеристик поля в *малой окрестности* произвольно выбранной точки из области определения поля Θ . С другой стороны, для полного вероятностного описания гауссовского случайного поля достаточно задавать его математическое ожидание (МО) и корреляционную функцию (КФ) [6, 10, 11 и др.]. Тогда функция распределения $F_m(h) = P[L_m < h]$ величины L_m абсолютного максимума однородного гауссовского поля $L(x_1, x_2, \dots, x_N)$ при больших значениях h определяется МО M этого поля, а также поведением КФ $K(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_N)$ поля в малой окрестности значений $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_N = 0$. Поэтому при вычислении асимптотически точного (с ростом h) выражения для функции $F_m(h)$ можно заменить исследуемое поле $L_m(x_1, x_2, \dots, x_N)$ на *эквивалентное* гауссовское однородное поле $L_\vartheta(x_1, x_2, \dots, x_N)$ с тем же МО M и с некоторой КФ $K_\vartheta(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_N)$, допускающей при $\varepsilon = \max(|\Delta x_1|, |\Delta x_2|, \dots, |\Delta x_N|) \rightarrow 0$ асимптотическое представление

$$\begin{aligned} K_\vartheta(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_N) &= \\ &= K(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_N) + o(\varepsilon), \end{aligned} \quad (26)$$

где $o(\varepsilon)$ — величина большего порядка малости, чем ε . Условие (26) означает, что КФ исходного и эквивалентного случайных полей асимптотически совпадают в малой окрестности любой точки из области определения поля.

Согласно методу ЛАА, эквивалентное поле следует выбирать в виде суммы

$$L_{\vartheta}(x_1, x_2, \dots, x_N) = M + \sum_{j=1}^N L_{\vartheta_j}(x_j) \quad (27)$$

где M — постоянное МО исследуемого поля, N — размерность области определения поля, а $L_{\vartheta_j}(x_j)$, $j = 1, 2, \dots, N$ — статистически независимые центрированные совместно гауссовские случайные процессы. Согласно (27), МО исходного и эквивалентного полей одинаковы. При этом КФ $K_{\vartheta_j}(\Delta x_j)$ случайных процессов $L_{\vartheta_j}(x_j)$ выбираются так, что их сумма $\sum_{j=1}^N K_{\vartheta_j}(\Delta x_j)$, равная КФ $K_{\vartheta}(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_N)$ эквивалентного случайного поля, удовлетворяет условию (26).

Отметим, что равенство МО и КФ исследуемого и эквивалентного гауссовских случайных полей в малой окрестности любой точки области определения поля обеспечивает в этой окрестности *сходимость* исследуемого поля к эквивалентному полю *по распределению* с уменьшением размеров данной окрестности.

Представление исследуемого поля $L(x_1, x_2, \dots, x_N)$ в виде суммы (27) постоянного МО поля и статистически независимых совместно гауссовских центрированных случайных процессов $L_{\vartheta_j}(x_j)$ позволяет представить функцию распределения $F_m(h)$ величины абсолютного максимума поля *в виде свертки* распределений абсолютных максимумов эквивалентных случайных процессов $L_{\vartheta_j}(x_j)$, $j = 1, 2, \dots, N$. При этом эквивалентные процессы следует выбирать так, чтобы распределения их абсолютных максимумов были известны, либо легко вычислялись.

Применением метод ЛАА для расчета асимптотически точного (с ростом h) выражения для функция распределения $F_m(h)$ величины абсолютного максимума однородного гауссовского поля $L_{\varphi}(l, \varphi)$ (13). Для этого КФ (14) поля (13) при $|\Delta l| \rightarrow 0$, $|\Delta \varphi| \rightarrow 0$ представим в виде суммы

$$K(\Delta l, \Delta \varphi) = K_0(\Delta l) + K_1(\Delta \varphi) + o(|\Delta l|) + o(\Delta \varphi)^2, \quad (28)$$

где функции $K_0(\Delta l)$ и $K_1(\Delta \varphi)$ допускают асимптотические представления

$$K_0(\Delta l) = \sigma^2 \frac{2 - \vartheta}{2} \left[1 - \frac{2\eta}{2 - \vartheta} |\Delta l| + o(|\Delta l|) \right], \quad (29)$$

при $|\Delta l| \rightarrow 0$,

$$K_1(\Delta \varphi) = \frac{\sigma^2 \vartheta}{2} \left[1 - (\Delta \varphi)^2 + o(\Delta \varphi)^2 \right] \quad (30)$$

при $|\Delta \varphi| \rightarrow 0$,

а η и ϑ определяются из (16). Такие функции $K_0(\Delta l)$ и $K_1(\Delta \varphi)$ можно интерпретировать как корреляционные функции некоторых случайных процессов.

Введем совместно гауссовские статистически независимые стационарные центрированные случайные процессы $L_{\varphi_0}(l)$ и $L_{\varphi_1}(\varphi)$ с корреляционными функциями

$$K_0(\Delta l) = \sigma_{\varphi_0}^2 \begin{cases} 1 - \eta_0 |\Delta l| & \text{при } |\Delta l| \leq 1 / \eta_0; \\ 0 & \text{при } |\Delta l| > 1 / \eta_0; \end{cases} \quad (31)$$

$$K_1(\Delta \varphi) = \sigma_{\varphi_1}^2 \begin{cases} 1 - (\Delta \varphi)^2 & \text{при } |\Delta \varphi| \rightarrow 0; \\ 0 & \text{при } |\Delta \varphi| \rightarrow \infty; \end{cases} \quad (32)$$

соответственно, где

$$\sigma_{\varphi_0}^2 = \sigma^2(2 - \vartheta) / 2, \quad \sigma_{\varphi_1}^2 = \sigma^2 \vartheta / 2 \quad (33)$$

— дисперсии случайных процессов $L_{\varphi_0}(l)$ и $L_{\varphi_1}(\varphi)$, причем $\sigma_{\varphi_0}^2 + \sigma_{\varphi_1}^2 = \sigma^2$, а

$$\eta_0 = 2\eta / (2 - \vartheta). \quad (34)$$

При $|\Delta l| \rightarrow 0$, $|\Delta \varphi| \rightarrow 0$ корреляционные функции (31), (32) случайных процессов $L_{\varphi_0}(l)$ и $L_{\varphi_1}(\varphi)$ допускают асимптотические представления (29), (30) соответственно. При этом, согласно (28), корреляционные функции гауссовского случайного поля $L_{\varphi}(l, \varphi)$ и суммы случайных процессов $L_{\varphi_0}(l) + L_{\varphi_1}(\varphi)$ асимптотически совпадают при $|\Delta l| \rightarrow 0$, $|\Delta \varphi| \rightarrow 0$. Тогда, согласно методу ЛАА, при вычислении асимптотически точного (с ростом h) выражения для функции распределения $F_m(h)$ случайное поле $L_{\varphi}(l, \varphi)$ (13) можно заменить на сумму $M_0 + L_{\varphi_0}(l) + L_{\varphi_1}(\varphi)$, где M_0 — математическое ожидание случайного поля $L_{\varphi}(l, \varphi)$. При этом величину L_m абсолютного максимума случайного поля $L_{\varphi}(l, \varphi)$ можно представить в виде

$$L_m = \sup_{l, \varphi \in \Theta} L_{\varphi}(l, \varphi) = M_0 + L_{m_0} + L_{m_1}, \quad (35)$$

где L_{m_0} и L_{m_1} — статистически независимые случайные величины

$$L_{m0} = \sup_{l \in [\Lambda_1; \Lambda_2]} L_{\varphi_0}(l), \quad L_{m1} = \sup_{\varphi \in [-\pi; \pi]} L_{\varphi_1}(\varphi), \quad (36)$$

равные величинам абсолютных максимумов случайных процессов $L_{\varphi_0}(l)$ и $L_{\varphi_1}(\varphi)$ на интервалах $l \in [\Lambda_1; \Lambda_2]$ и $\varphi \in [-\pi; \pi]$ соответственно.

Обозначим $F_0(x) = P[L_{m0} < x]$ и $F_1(x) = P[L_{m1} < x]$ — функции распределения величин абсолютных максимумов L_{m0} и L_{m1} (36) случайных процессов $L_{\varphi_0}(l)$ и $L_{\varphi_1}(\varphi)$ на интервалах $l \in [\Lambda_1; \Lambda_2]$ и $\varphi \in [-\pi; \pi]$ соответственно, а $W_1(x) = dF_1(x)/dx$ — плотность вероятности случайной величины L_{m1} . Тогда, с учетом статистической независимости величин L_{m0} и L_{m1} (36), функцию распределения $F_m(h) = P[L_m < h]$ суммы (35) можно представить в виде свертки распределений этих величин [10, 11]

$$F_m(h) = \int_{-\infty}^{\infty} F_0(h-x-M_0) W_1(x) dx. \quad (37)$$

Конкретизируем выражения для функций $F_0(x)$ и $W_1(x)$, входящих в (37).

Случай большого интервала определения. Точные выражения для функции распределения $F_0(x)$ и плотности вероятности $W_1(x)$ абсолютных максимумов стационарных гауссовских случайных процессов $L_{\varphi_0}(l)$ и $L_{\varphi_1}(\varphi)$ при произвольных интервалах определения и уровнях x неизвестны. Аналогично [27] можно показать, что для нахождения асимптотически точного (с ростом h) выражения для функции распределения $F_m(h)$ можно ограничиться использованием в (37) асимптотически точных (с ростом x) выражений для функций $F_0(x)$ и $W_1(x)$. Такие выражения получены в гл.1 из [19]. Если приведенная ширина m_φ интервала определения $[\Lambda_1; \Lambda_2]$ случайного процесса $L_{\varphi_0}(l)$ велика, т.е. [19]

$$m_\varphi = (\Lambda_2 - \Lambda_1) \eta_0 = 2m_l / (2 - \vartheta) \gg 1, \quad (38)$$

где η_0 определяется из (34), то из [19] (п.1.3.2, формула (1.129)) получаем

$$F_0(x) = \begin{cases} \exp \left[-\frac{m_\varphi x}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\varphi_0}} \exp \left(-\frac{x^2}{2\sigma_{\varphi_0}^2} \right) \right] & \text{при } x / \sigma_{\varphi_0} \geq 1; \\ 0 & \text{при } x / \sigma_{\varphi_0} < 1. \end{cases} \quad (39)$$

Так как по определению $0 \leq \vartheta \leq 1$, то $m_l \leq m_\varphi \leq 2m_l$ и условие $m_\varphi \gg 1$ (38) эквивалентно условию $m_l \gg 1$ (21). Для случайного процесса $L_{\varphi_1}(l)$, определенного на интервале $\varphi \in [-\pi; \pi]$, из [19] (п. 1.2.1, формулы (1.59) и

(1.60)) находим

$$F_1(x) = \begin{cases} \exp \left[-\sqrt{2} \exp \left(-\frac{x^2}{2\sigma_{\varphi_1}^2} \right) \right] & \text{при } x \geq 0; \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (40)$$

Из (40) получаем плотность вероятности $W_1(x) = dF_1(x)/dx$ в виде

$$W_1(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}x}{\sigma_{\varphi_1}^2} \exp \left(-\frac{x^2}{2\sigma_{\varphi_1}^2} \right) \exp \left[-\sqrt{2} \exp \left(-\frac{x^2}{2\sigma_{\varphi_1}^2} \right) \right] + \\ + \exp(-\sqrt{2})\delta(x) & \text{при } x \geq 0; \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (41)$$

где $\delta(x)$ — “дельта”-функция [10]. Подставляя (39), (41) в (37), находим

$$F_m(h) = \sqrt{2} \int_0^{\sqrt{\frac{2}{\vartheta} \left(u - \sqrt{\frac{2-\vartheta}{2}} \right)}} \exp \left\{ -\frac{2m_l}{\sqrt{\pi(2-\vartheta)^3}} \times \right. \\ \left. \times \left(u - y\sqrt{\frac{\vartheta}{2}} \right) \exp \left[-\frac{1}{2-\vartheta} \left(u - y\sqrt{\frac{\vartheta}{2}} \right)^2 \right] \right\} \times \\ \times y \exp \left(-\frac{y^2}{2} \right) \exp \left[-\sqrt{2} \exp \left(-\frac{y^2}{2} \right) \right] dy + \\ + \exp(-\sqrt{2}) \exp \left[-\frac{2m_l u}{\sqrt{\pi(2-\vartheta)^3}} \exp \left(-\frac{u^2}{2-\vartheta} \right) \right] \\ \text{при } u \geq \sqrt{(2-\vartheta)/2}, \quad (42)$$

$$F_m(h) = 0 \text{ при } u < \sqrt{(2-\vartheta)/2},$$

где u — нормированный уровень (19). При $\vartheta = 0$, когда релейевская компонента случайного процесса (1) отсутствует, формула (42) упрощается и, с учетом условия нормировки плотности вероятности $W_1(x)$, переходит в (25). Точность формулы (42) возрастает с увеличением u (19) и m_l (21).

При вычислении интеграла (37) вместо выражений (39)—(41) можно использовать более простые, но менее точные выражения

$$F_0(x) \approx 1 - \frac{m_\varphi x}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\varphi_0}} \exp \left(-\frac{x^2}{2\sigma_{\varphi_0}^2} \right), \quad (43)$$

$$F_1(x) \approx 1 - \sqrt{2} \exp \left(-\frac{x^2}{2\sigma_{\varphi_1}^2} \right), \quad (44)$$

$$W_1(x) \approx \sqrt{2} \frac{x}{\sigma_{\varphi_1}^2} \exp \left(-\frac{x^2}{2\sigma_{\varphi_1}^2} \right),$$

справедливые при весьма больших значениях x . Формулы (43)—(44) можно получить, используя в (39)—(41) разложение $\exp(-y) \approx 1 - y$ при $y \ll 1$. При этом, выражение (37) удобно переписать в виде

$$F_m(h) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F_0(h - x - M_0)] W_1(x) dx .$$

Подставляя сюда (43), (44), выполняя интегрирование, и учитывая только слагаемые с наибольшим порядком по u , получаем более простую, но менее точную формулу для функции $F_m(h)$, справедливую при весьма больших значениях u :

$$F_m(h) \approx 1 - m_l \sqrt{\vartheta} u^2 \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right). \quad (45)$$

Точность выражения (45) возрастает с увеличением u (19) и m_l (21).

Отметим, что выражение (45) можно также получить и из (23), полагая, что u весьма велико и используя асимптотическое разложение $\exp(-x) \approx 1 - x$ при $x \ll 1$. Следовательно, при больших u формулы (42) и (23) асимптотически совпадают.

Сравним теперь полученные выше выражения (23), (42) и (45). В качестве примера на рис. 1 показаны зависимости вероятности $\alpha = 1 - F_m(h)$ от уровня u при $m_l = 10$ и различных ϑ . Кривые 1 соответствуют $\vartheta = 0.7$, кривые 2 — $\vartheta = 0.1$, а кривые 3 — $\vartheta = 0.002$.

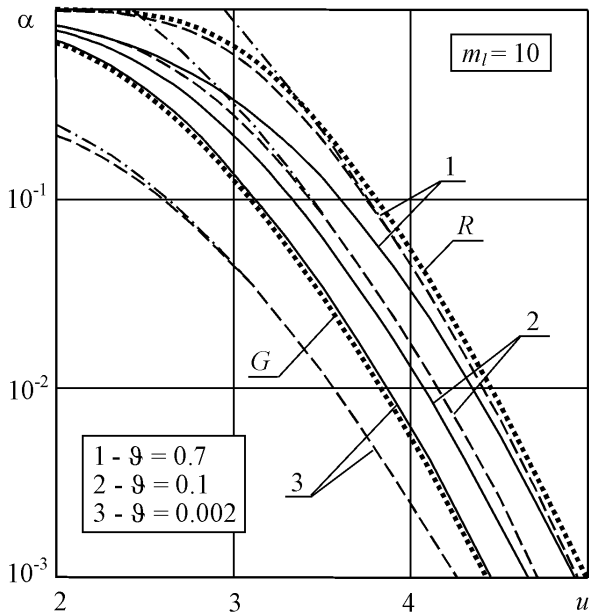


Рис. 1. Сравнение аппроксимаций вероятности превышения порога

При этом сплошные линии на рис. 1 получены с использованием формулы (42), штриховые — формулы (23), а штрих-пунктирные — формулы (45). Пунктирными линиями на рис. 1 нанесены границы вероятности α . Нижняя граница G соответствует наличию только гауссовской компоненты ($\vartheta = 0$) и рассчитана с использованием формулы (25). Верхняя граница R соответствует присутствию только релейевской компоненты ($\vartheta = 1$) и рассчитана с использованием (24).

Анализ полученных результатов показывает, что формулы (23), (45) при малых $\vartheta \leq 0.01$ дают существенно заниженные значения α , которые при $u < 1 / \sqrt{2\pi\vartheta}$ выходят за нижнюю границу G . Чем меньше отношение ϑ , тем большие значения u требуются для обеспечения удовлетворительной точности формул (23), (45). При $\vartheta = 0$ формулы (23), (45) неприменимы при любых конечных уровнях u . Поэтому при малых ϑ предпочтительно использование формулы (42). С другой стороны, при $\vartheta \geq 0.03$ результаты расчетов по формулам (23), (45) и (42) удовлетворительно совпадают, если m_l не слишком мало (так что $m_l \geq 1$) и не слишком мал уровень u (так что обеспечиваются значения $\alpha < 0.2-0.3$).

Формула (45) хорошо аппроксимирует зависимость (23) при не слишком малых u , когда $\alpha < 0.2-0.3$. Однако, при больших m_l и малых u формула (45) дает значения $F_m(h) < 0$, что приводит к величинам $\alpha > 1$. Это противоречит смыслу вероятности, которая всегда должна находиться в интервале от 0 до 1. Кроме того, при малых ϑ формула (45), как и формула (23), дает сильно заниженные значения вероятности α . Вместе с тем формула (45) очень проста и может быть полезна при аналитических расчетах с учетом указанных выше ограничений.

Случай малого интервала определения. Выражения (23), (42) для функции распределения $F_m(x)$ найдены при выполнении условия $m_l \gg 1$ (21) или эквивалентного условия $m_\varphi \gg 1$ (38). Поэтому при $m_l < 1$ ($m_\varphi < 1$) выражения (23), (42) могут иметь не высокую точность. Это объясняется использованием при расчетах асимптотически точных формул (18), (39), справедливых при $m_l \gg 1$.

Воспользовавшись результатами [13], можно записать точное выражение для функции распределения величины абсолютного максимума стационарного гауссовского централизованного случайного процесса $r(l)$ с единичной

дисперсией и треугольной корреляционной функцией $K(\Delta l) = \max(0; 1 - |\Delta l|)$, определенную на интервале $l \in [0; m]$ с длительностью $0 \leq m \leq 1$ [14, 27]:

$$F_r(x, m) = P \left[\sup_{l \in [0; m]} r(l) < x \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \Phi \left(\frac{x - y(1 - m)}{\sqrt{m(2 - m)}} \right) \exp \left(-\frac{y^2}{2} \right) dy - \frac{mx}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) \Phi \left(x \sqrt{\frac{m}{2 - m}} \right) - \frac{\sqrt{m(2 - m)}}{2\pi} \exp \left(-\frac{x^2}{2 - m} \right). \quad (46)$$

Здесь $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \exp(-t^2 / 2) dt / \sqrt{2\pi}$ — интеграл вероятности [10]. Тогда плотность вероятности $W_r(x, m) = dF_r(x, m) / dx$ абсолютного максимума процесса $r(l)$ равна

$$W_r(x, m) = \frac{2 + m(x^2 - 1)}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) \Phi \left(\frac{x\sqrt{m}}{\sqrt{2 - m}} \right) + \frac{\sqrt{m(2 - m)}}{2\pi} x \exp \left(-\frac{x^2}{2 - m} \right). \quad (47)$$

Учтем, что гауссовский случайный процесс $L_{\varphi 0}(l)$ имеет треугольную корреляционную функцию (31). Тогда при $m_{\varphi} = 2m_l / (2 - \vartheta) \leq 1$ или, что эквивалентно, при

$$m_l \leq 1 - \vartheta / 2, \quad (48)$$

можно воспользоваться формулами (46), (47) и записать точные выражения для функции распределения $F_0(x) = P[L_{m_0} < x]$ и соответствующей плотности вероятности $W_0(x) = dF_0(x) / dx$ величины L_{m_0} абсолютного максимума процесса $L_{\varphi 0}(l)$:

$$F_0(x) = F_r \left(\frac{x}{\sigma_{\varphi 0}}, m_{\varphi} \right), \quad (49)$$

$$W_0(x) = \frac{1}{\sigma_{\varphi 0}} W_r \left(\frac{x}{\sigma_{\varphi 0}}, m_{\varphi} \right).$$

Для нахождения функции распределения $F_m(x)$ (37) при выполнении условия (48) можно использовать точные выражения (49) вместо приближенного выражения (39). При этом функцию $F_m(x)$ (37) удобно переписать в виде

$$F_m(h) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(h - x - M_0) W_0(x) dx. \quad (50)$$

Подставляя (49), (40) в (50) и учитывая (33), (38), при выполнении (48) находим

$$F_m(h) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{2}{2-\vartheta}} u} \exp \left\{ -\sqrt{2} \exp \left[-\left(\frac{u}{\sqrt{\vartheta}} - y \sqrt{\frac{2-\vartheta}{2\vartheta}} \right)^2 \right] \right\} \times \left[1 + \frac{m_l(y^2 - 1)}{2 - \vartheta} \right] \exp \left(-\frac{y^2}{2} \right) \Phi \left(\frac{y\sqrt{m_l}}{\sqrt{2-\vartheta-m_l}} \right) + \frac{\sqrt{m_l(2-\vartheta-m_l)}}{\sqrt{2\pi}(2-\vartheta)} y \exp \left(-\frac{y^2}{2} \frac{2-\vartheta}{2-\vartheta-m_l} \right) dy, \quad (51)$$

где u определяется из (19). Точность выражения (51) возрастает с увеличением u .

Предельные случаи. При $\vartheta = 0$, когда релеевская компонента отсутствует, формула (51) упрощается и переходит в *точное* выражение для функции распределения абсолютного максимума стационарного гауссовского случайного процесса

$$F_m(h) = F_r(u, m_l), \quad (52)$$

где функция $F_r(u, m)$ определяется из (46). Если при этом $m_l = 0$, то (51) переходит в известное *точное* выражение $F_m(h) = \Phi(u)$ для функции распределения гауссовской случайной величины [6, 10, 11].

С другой стороны, при $m_l = 0$ и $\vartheta > 0$ формула (51) дает лишь асимптотически точное (с ростом u) выражение для функции распределения $F_m(h)$. Однако при $m_l = 0$ можно записать также и *точное* выражение этой функции. Для этого учтем, что при $m_l = 0$ анализируемый случайный процесс $L(l)$ (1) вырождается в сумму статистически независимых гауссовской L_0 и релеевской L_1 случайных величин. Тогда функцию распределения $F_m(h)$ можно представить в виде свертки [10, 11]

$$F_m(h) = \int_0^{\infty} F_{00}(h - y) W_{10}(y) dy,$$

где $W_{10}(x) = \frac{x}{\sigma_1^2} \exp \left(-\frac{x^2}{2\sigma_1^2} \right)$ при $x \geq 0$ и

$W_{10}(x) = 0$ при $x < 0$ — плотность вероятности релеевской случайной величины L_1 , а $F_{00}(x) = \Phi[(x - M_0) / \sigma_0]$ — функция распределения гауссовской величины L_0 [6, 10, 11]. Вычисляя интеграл, находим

$$F_m(h) = \Phi\left(\frac{u}{\sqrt{1-\vartheta}}\right) - \sqrt{\vartheta} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \Phi\left(\frac{u\sqrt{\vartheta}}{\sqrt{1-\vartheta}}\right). \quad (53)$$

Сравним выражения (51) и (23) при выполнении условия (48). В качестве примера на рис. 2 приведены зависимости вероятности $\alpha = 1 - F_m(h)$ от уровня u (19) при $m_l = 0.25$ и при двух значениях ϑ . Кривые 1 на рис. 2 соответствуют $\vartheta = 0.7$, а кривые 2 — $\vartheta = 0.002$. Сплошные линии на рис. 2 получены с использованием формулы (51), а штриховые — формулы (23), полученной при $m_l \gg 1$ (21). Пунктирной линией на рис. 2 нанесена нижняя граница вероятности α , достигаемая в предельном случае $\vartheta = 0$ гауссовского случайного процесса и рассчитанная с применением формулы (52). Штрих-пунктирными линиями показаны нижние границы вероятности α , достигаемые при $m_l = 0$ и рассчитанные с применением формулы (53).

Из рис. 2 видно, что формула (23) дает заниженные значения вероятности α , которые при малых ϑ или не слишком больших u могут существенно выходить за точные нижние границы этой вероятности. Чем меньше значения ϑ и m_l , тем больший уровень u требуется для обеспечения удовлетворительной точности формулы (23). С другой стороны, более сложная формула (51) лишена этих недостатков.

III. РЕЗУЛЬТАТЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

С целью проверки точности найденных асимптотических формул для функции распределения $F_m(h)$, а также для установления границ применимости этих формул при конечных значениях u , выполнялось статистическое моделирование на ЭВМ величины L_m абсолютного максимума случайного процесса $L(l)$ (1) на интервалах определения $[0; \lambda]$ различной длительности λ .

В процессе моделирования формировались реализации гауссовской $L_0(l)$ (3) и релеевской $L_1(l)$ (6) компонент случайного процесса $L(l)$ при нулевом математическом ожидании $M_0 = 0$ и единичной дисперсии $\sigma^2 = \sigma_0^2 + \sigma_1^2 = 1$. При этом величина ϑ (16), характеризующая относительный вклад релеевской компоненты в результирующий случайный процесс, менялась

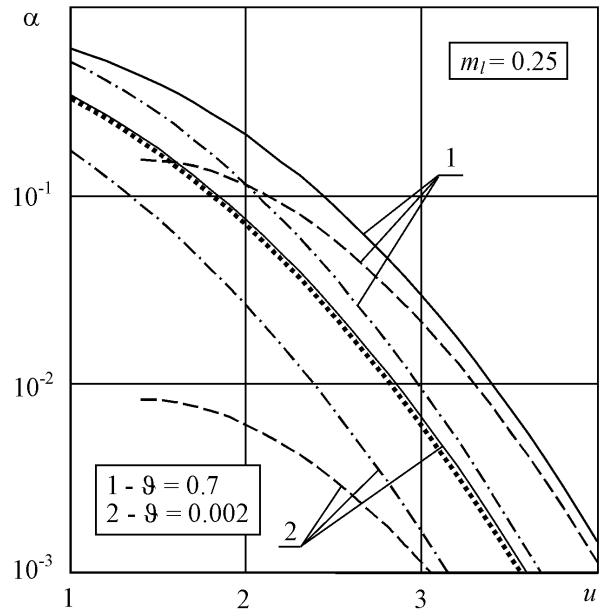


Рис. 2. Сравнение аппроксимаций вероятности превышения порога

в пределах от 0 до 1. Корреляционные функции $R_0(l)$ и $R_1(l)$ гауссовской компоненты $L_0(l)$ и квадратур $L_{11}(l)$, $L_{12}(l)$ релеевской компоненты $L_1(l)$, выбирались одинаковыми и треугольными, т.е. равными $R(l) = 1 - |l|$ при $|l| \leq 1$ и $R(l) = 0$ при $|l| > 1$. Такие корреляционные функции удовлетворяют условиям (2), (5) и соответствуют случаю $\eta = 1$, $m_l = \lambda$.

Моделирование выполнялось на ЭВМ в среде программирования Delhi. В процессе моделирования с заданным шагом Δl формировались отсчеты $L_j = L(j \Delta l)$ реализаций случайного процесса $L(l)$ (1) на интервале $l \in [0; m_l]$, имеющим заданную длительность $m_l = \lambda$. Отсчеты формировались в дискретные моменты времени $t_j = j \Delta l$ для всех $j = 1, 2, \dots, \{m_l / \Delta l\}$, где $\{ \}$ обозначает целую часть числа. Согласно (7), отсчеты L_j вычислялись по формуле

$$L_j = \sigma_0 \xi_{0j} + \sigma_1 \sqrt{\xi_{1j}^2 + \xi_{2j}^2} = \sqrt{1-\vartheta} \xi_{0j} + \sqrt{\vartheta} (\xi_{1j}^2 + \xi_{2j}^2), \quad (54)$$

где $\xi_{0j} = \xi_0(j \Delta l)$, $\xi_{1j} = \xi_{11}(j \Delta l)$, $\xi_{2j} = \xi_{12}(j \Delta l)$ — отсчеты центрированных гауссовских стационарных случайных процессов $\xi_0(l)$, $\xi_{11}(l)$, $\xi_{12}(l)$ с корреляционными функциями $R(l)$, а ϑ определяется из (16). Шаг дискретизации Δl при моделировании выбирался не более 0.01, что обеспечило среднеквадратическую погрешность ε ступенчатой аппроксимации непрерывных реализаций случайных процессов $\xi_0(l)$,

$\xi_{11}(l)$ и $\xi_{12}(l)$ с помощью отсчетов, не превышающую $\varepsilon = \sqrt{2[1 - R(\Delta l / 2)]} = \sqrt{\Delta l} = 0.1$ (т.е. 10 %). Отсчеты ξ_{0j} , ξ_{1j} , ξ_{2j} вычислялись методом скользящего суммирования [29] по формулам

$$\xi_{nj} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_{k=j}^{j+\mu-1} g_{nk}, \quad n = 0, 1, 2, \quad (55)$$

где $\mu = \{1 / \Delta l\} \geq 100$ — количество слагаемых в сумме (55), а g_{nk} при $n = 0, 1, 2$ и $k = 1, 2, \dots, \{m_l / \Delta l\} + \mu - 1$ — статистически независимые гауссовские случайные числа с нулевым МО и единичной дисперсией. Каждое случайное число g_{nk} формировалось на основе центральной предельной теоремы [29, 30] методом суммирования K независимых случайных чисел n_{jnk} , $j = 1, 2, \dots, K$, распределенных равномерно на интервале $[0; 1]$, с использованием нелинейной поправки [30]:

$$g_{nk} = \beta_{nk} + \frac{\beta_{nk}^3 - 3\beta_{nk}}{20K}, \quad (56)$$

$$\beta_{nk} = \sqrt{\frac{12}{K}} \sum_{j=1}^K (n_{jnk} - 0.5).$$

При этом выбиралось значение $K = 5$, обеспечивающее компромисс между скоростью вычислений и качеством получаемых случайных чисел. Для формирования последовательности независимых случайных чисел n_j , равномерно распределенных на интервале $[0; 1]$, использовался программный датчик URAND [31], переписанный на языке Pascal для среды программирования Delphi.

На основе отсчетов L_j , сформированных согласно (54)—(56), вычислялась величина L_m абсолютного максимума реализации $L(l)$ на интервале $l \in [0; m_l]$. Величина L_m находилась как величина наибольшего отсчета L_j для всех $j = 1, 2, \dots, \{m_l / \Delta l\}$.

В процессе моделирования для каждой выбранной пары значений m_l и ϑ формировались не менее $N = 10^5$ независимых реализаций $L(l)$. При этом использовался метод зависимых испытаний [29], когда отсчеты L_j при разных ϑ вычислялись по формулам (54)—(56) на основе одних и тех же реализаций отсчетов ξ_{nj} . Затем для каждой реализации $L(l)$ определялась величина абсолютного максимума L_m . На основе полученного массива из N значений L_m для каждой пары параметров m_l , ϑ вычислялась экспериментальная вероятность

$\alpha(u) = 1 - F_m(u)$ превышения порога u для различных значений u . Вероятность $\alpha(u)$ определялась как относительная частота превышения порога u величиной L_m .

Оценим погрешность полученных экспериментальных значений вероятности превышения уровня u величиной L_m абсолютного максимума моделируемого случайного процесса $L(l)$. Пусть α — экспериментальная оценка, а α_0 — истинное значение этой вероятности. Тогда при большом числе испытаний $N \gg 1$ доверительная вероятность P_d для относительного доверительного интервала δ равна [6]

$$P_d = P \left[\frac{|\alpha - \alpha_0|}{\alpha} < \delta \right] \approx 2\Phi \left(\delta \sqrt{\frac{\alpha N}{1 - \alpha}} \right) - 1.$$

Величина P_d имеет смысл вероятности того, что относительное отклонение оценки α от истинного значения α_0 не превышает δ . Используя эту формулу при количестве испытаний $N = 10^5$, получаем, что с доверительной вероятностью $P_d = 0.9$ границы доверительных интервалов отклоняются от экспериментальных значений вероятности α не более, чем на $\delta = 0.016$ (1.6 %) при $\alpha > 0.1$, а также не более, чем на $\delta = 0.052$ (5.2 %), при $\alpha > 0.01$ и не более, чем на $\delta = 0.17$ (17 %), при $\alpha > 0.001$.

Некоторые экспериментальные значения α , полученные при моделировании, нанесены кружочками, квадратами, треугольниками и ромбами на рис. 3—6. Там же различными линиями показаны соответствующие теоретические зависимости $\alpha(u)$. Сплошные линии на рис. 3—6 рассчитаны на основе формулы (42) при $m_l \geq 1$ или формулы (51) при $m_l < 1$, которые получены методом ЛАА. Штриховые линии построены с использованием формулы (23), полученной на основе анализа среднего числа А-выходов случайного поля.

На рис. 3, 4 представлен случай $m_l \geq 1$, а рис. 5, 6 — случай $m_l < 1$.

Результаты на рис. 3 получены при $m_l = 2$ и разных значениях ϑ . Кривые 1 и кружочки на рис. 3 соответствуют $\vartheta = 1$, кривые 2 и квадраты — $\vartheta = 0.2$, кривые 3 и треугольники — $\vartheta = 0.05$, кривые 4 и ромбы — $\vartheta = 0.003$, а кривые 5 — $\vartheta = 0.0003$. Экспериментальные значения α при $\vartheta = 0.0003$ на рис. 3 не показаны, так как они практически совпадают с ромбами, соответствующими $\vartheta = 0.003$. Результаты на рис. 4 получены при $\vartheta = 0.2$ и разных значениях m_l . Кривые 1 и кружочки на рис. 4

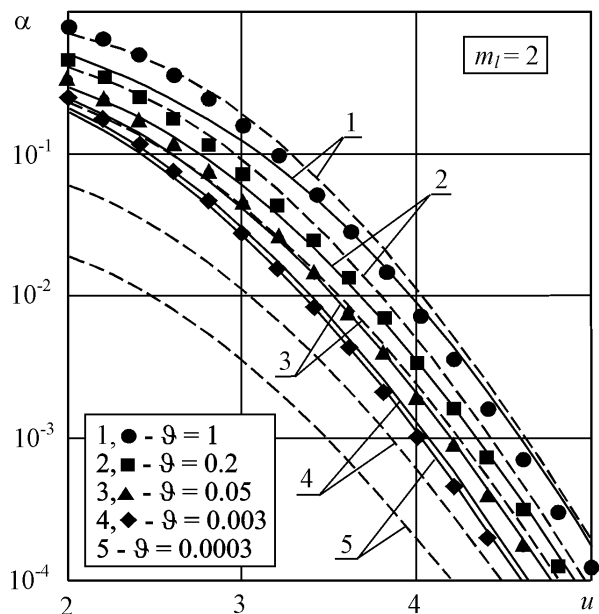


Рис. 3. Вероятность превышения порога при различном вкладе релейского процесса

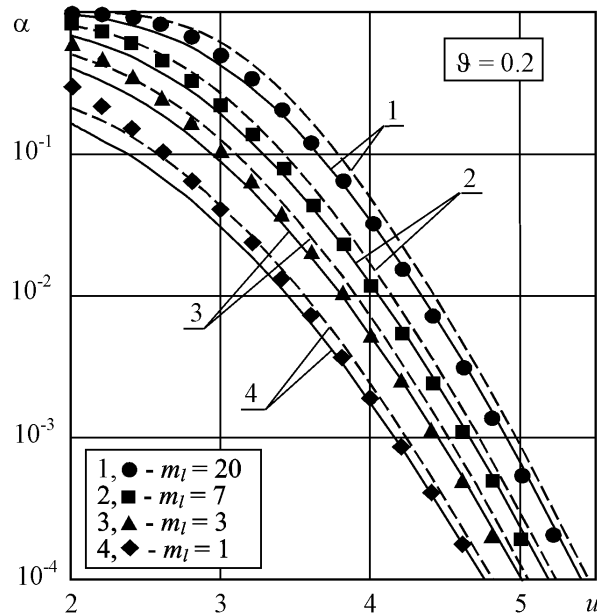


Рис. 4. Вероятность превышения порога при различной ширине интервала определения случайного процесса

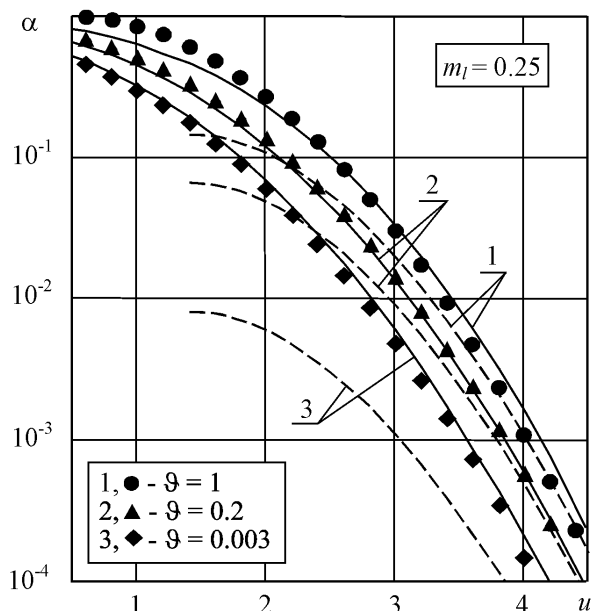


Рис. 5. Вероятность превышения порога при различном вкладе релейского процесса

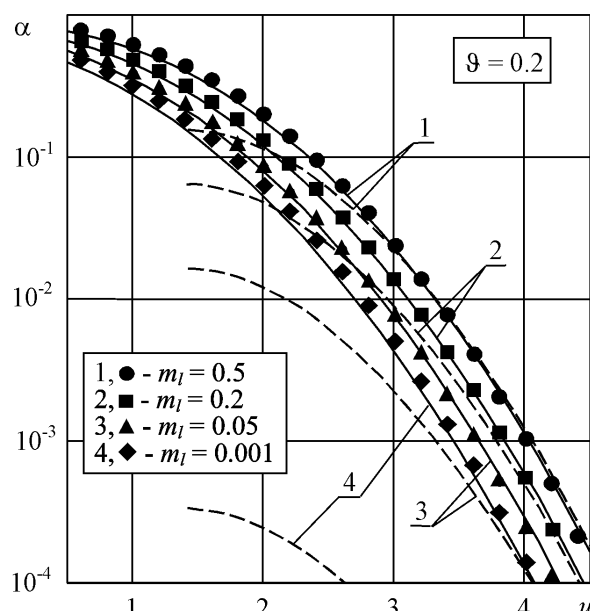


Рис. 6. Вероятность превышения порога при различной ширине интервала определения случайного процесса

соответствуют $m_i = 20$, кривые 2 и квадраты — $m_i = 7$, кривые 3 и треугольники — $m_i = 3$, а кривые 4 и ромбы — $m_i = 1$. Из рис. 3—4 видно, что формула (23) при малых $\vartheta \leq 0.01$ дает существенно заниженные значения вероятности α , тогда как формула (42) имеет удовлетворительную точность при всех возможных значениях $0 \leq \vartheta \leq 1$. Так как формула (45) хорошо аппроксимирует зависимость (23) при не слишком малых u (см рис.1), то она обладает тем же недостатком, что и формула (23).

Результаты на рис.5 получены при $m_i = 0.25$ и разных значениях ϑ . Кривые 1 и кружочки на рис. 5 соответствуют $\vartheta = 1$, кривые 2 и треугольники — $\vartheta = 0.2$, а кривые 3 и ромбы — $\vartheta = 0.003$. Результаты на рис.6 получены при $\vartheta = 0.2$ и разных значениях m_i . Кривые 1 и кружочки на рис. 6 соответствуют $m_i = 0.5$, кривые 2 и квадраты — $m_i = 0.2$, кривые 3 и треугольники — $m_i = 0.05$, а кривые 4 и ромбы — $m_i = 0.001$. Из рис. 5—6 видно, что при малых значениях m_i и ϑ формула (23) дает заниженные значения вероятности α , причем с уменьшением m_i и ϑ точность этой формулы резко ухудшается. При этом формула (51), полученная методом ЛАА, обладает хорошей точностью при любых значениях ϑ , u , если $m_i < 1 - \vartheta/2$.

ВЫВОДЫ. При $m_i > 1 - \vartheta/2$ более предпочтительной является формула (42), полученная методом ЛАА и имеющая хорошую точность при всех возможных значениях ϑ . Более простая формула (23), полученная на основе анализа среднего числа A -выходов случайного поля, может быть использована при $\vartheta \geq 0.03$. При этом вместо формулы (23) можно применить упрощенную асимптотическую формулу (45), если уровень u не слишком мал, так что $\alpha < 0.2-0.3$. Если же $m_i \leq 1 - \vartheta/2$, то рекомендуется использовать формулу (51), полученную методом ЛАА.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов В. И. Выбросы траекторий случайных процессов / В. И. Тихонов, В. И. Хищенко. — М.: Наука, 1987. — 303 с.
2. Лидбеттер М. Экстремумы случайных последовательностей и процессов / М. Лидбеттер, Г. Линдгрэн, Х. Ротсен. — М.: Мир, 1989. — 392 с.
3. Питербарг В. И. Асимптотические методы в теории гауссовских процессов и полей / В. И. Питербарг. — М.: Изд-во МГУ, 1988. — 174 с.
4. Случайные процессы. Выборочные функции и пересечения / Под ред. Ю. К. Беляева. — М.: Мир, 1978. — 280 с.
5. Крамер Г. Стационарные случайные процессы / Г. Крамер, М. Лидбеттер. — М.: Мир, 1969. — 600 с.
6. Вентцель Е. С. Теория вероятностей и её инженерные приложения / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. — М.: Наука, 1988. — 480 с.
7. Шелухин О. И. Негауссовские процессы / О. И. Шелухин, И. В. Беляков. — С-Пб.: Политехника, 1992. — 312 с.
8. Кунченко Ю. П. Нелинейная оценка параметров негауссовских радиофизических сигналов / Ю. П. Кунченко. — Киев: Вища школа, 1987. — 191 с.
9. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовских процессов и их преобразований / А. Н. Малахов. — М.: Сов. радио, 1978. — 376 с.
10. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника / В. И. Тихонов. — М.: Радио и связь, 1982. — 624 с.
11. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Б. Р. Левин. — М.: Радио и связь, 1989. — 656 с.
12. Захаров А. В. Совместная оценка дисперсии случайной компоненты и амплитуды регулярной компоненты двухкомпонентного радиосигнала / А. В. Захаров // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2011. — № 2. — С. 15–26.
13. Shepp L. A. Radon—Nicolay derivatives of Gaussian measures / L. A. Shepp // Ann. Math. Statist. — 1966. — V. 37. — N. 2. — P. 321—354.
14. Жиглявский А. А. Обнаружение разладки случайных процессов в задачах радиотехники / А. А. Жиглявский, А. Е. Красковский. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. — 224 с.
15. Тихонов В. И. Выбросы случайных процессов / В. И. Тихонов — М.: Наука, 1970. — 392 с.
16. Питербарг В. И. Некоторые направления в исследовании свойств траекторий гауссовских случайных функций. Дополнение-обзор / В. И. Питербарг // Случайные процессы. — М.: 1978. — С. 258—280.
17. Беляев Ю. К. О числе пересечений уровня гауссовским случайным процессом // Теория вероятностей и её применение. — 1967. — Т. 12. — № 3. — С. 444—457.
18. Питербарг В. И. Предельная теорема для α -выходов траектории χ -процесса за высокий уровень / В. И. Питербарг, С. Стаматович // Теория вероятностей и её применения. — 2003. — Т. 48. — № 4. — С. 811—818.
19. Теория обнаружения сигналов / П. С. Акимов, П. А. Бакут, В. А. Богданович и др.; Под ред. П. А. Бакута. — М.: Радио и связь, 1984. — 440 с.
20. Мелитицкий В. А. Среднее число выбросов смеси негауссовского процесса и нормального шума / В. А. Мелитицкий, В. Л. Румянцев, Н. С. Акиншин

// Известия вузов МВ и ССО СССР. Радиоэлектроника. — 1986. — Т. 29. — № 4. — С. 106—108.

21. *Ибрагимов И. А.* Асимптотическая теория оценивания / И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский. — М.: Наука, 1979. — 528 с.

22. *Трифонов А. П.* Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех / А. П. Трифонов, Ю. С. Шинаков. — М.: Радио и связь, 1986. — 264 с.

23. *Pickands J.* Upcrossing probabilities for stationary Gaussian processes / J. Pickands // Transactions of Amer. Math. Soc. — 1969. — V. 145. — Nov. — P. 51—73.

24. *Питербарг В. И.* О работе Д. Пикандса “Вероятности пересечения для стационарного гауссовского процесса” / В. И. Питербарг // Вестник МГУ. Сер. Математика. Механика. — 1972. — № 5. — С. 25—30.

25. *Qualls C.* Asymptotic properties of Gaussian processes / C. Qualls, H. Watanabe // Ann. of Math. Statist. — 1972. — V. 3. — № 2. — P. 580—596.

26. *Стратонович Р. Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике / Р. Л. Стратонович. — М.: Сов. радио, 1961. — 558 с.

27. *Трифонов А. П.* Распределение величины абсолютного максимума разрывного однородного случайного поля / А. П. Трифонов, А. В. Захаров. — Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2001. — № 1. — С. 51—58.

28. *Трифонов А. П.* Характеристики обнаружения случайного радиоимпульса с неизвестными временем прихода и центральной частотой при частичном нарушении условий регулярности / А. П. Трифонов, А. В. Захаров // Радиотехника и электроника. — 2001. — Т. 46. — № 10. — С. 1226—1234.

29. *Быков В. В.* Цифровое моделирование в статистической радиотехнике / В. В. Быков. — М.: Сов. радио, 1971. — 326 с.

30. *Ермаков С. М.* Статистическое моделирование / С. М. Ермаков, Г. А. Михайлов. — М.: Наука, 1982 — 276 с.

31. *Форсайт Дж.* Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. — М.: Мир, 1980. — 280 с.

Захаров Александр Викторович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры радиофизики Воронежского государственного университета

E-mail: zakharov@phys.vsu.ru

Тел.: (473) 2-208-916

Zakharov Alexander V. Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associated Professor of the Radiophysics Chair, Voronezh State University

E-mail: zakharov@phys.vsu.ru

Tel.: (473) 2-208-916