

ОБ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ КРУЧЕНИИ ПОЛОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ ИЗ НЕОДНОРОДНОГО МАТЕРИАЛА С ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ В ВИДЕ КРУГОВОГО КОЛЬЦА

Ю. Д. Щеглова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 13.12.2011 г.

Аннотация. В работе рассматривается задача упругопластического кручения полого цилиндрического стержня с кольцевым поперечным сечением. Материал стержня предполагается изотропным, неоднородным, предел текучести сохраняет постоянное значение вдоль линий концентричных эллипсов. Предполагается, что пластическая область целиком охватывает внешний контур поперечного сечения стержня. С использованием метода малого параметра исследовано напряженное состояние стержня.

Ключевые слова: напряжение, напряженное состояние, кручение, неоднородный материал, метод малого параметра.

Abstract. The present work is devoted to the problem of elastoplastic torsion of hollow cylindrical rod with a circular cross section. The material of the rod is assumed isotropic, heterogeneous, yield stress is constant along the lines of concentric ellipses. It is supposed that the outer contour of cross section is covered wholly with plastic zone. Using the small parameter method the stress state of the rod is investigated.

Keywords: pressure, stress, the stress state, heterogeneous material, the small parameter method

ВВЕДЕНИЕ

Проблемы теорий пластичности неоднородных и анизотропных сред в последнее время привлекают многих исследователей. Об этом свидетельствуют работы [1—9]. Одним из методов решения задач в данном случае является метод малого параметра, как метод, позволяющий получить приближенное аналитическое решение сложных нелинейных задач. Метод малого параметра использовался в работах [1—3], [7], [9].

В теории пластичности неоднородных сред предполагается, что предел текучести материала зависит от координат точек тела [10]. При использовании метода малого параметра предел текучести, как и другие функции, представляется в виде ряда по некоторому безразмерному параметру. За начальное приближение принимается решение соответствующей задачи при постоянном пределе текучести.

В работах [1, 2] рассматривается напряженное упругопластическое состояние толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления. Материал трубы предпола-

гается изотропным неоднородным, в работе [1] предел текучести сохраняется постоянным вдоль параллельных прямых, а в работе [2] предел текучести сохраняет постоянное значение вдоль линий концентричных эллипсов. В работе [3] исследовано напряженное состояние задачи Л. А. Галина для случая неоднородной пластической среды, считается, что неоднородность сохраняет постоянное значение вдоль эллиптических кривых.

В данной работе, следуя подходу авторов работ [1—3], с использованием метода малого параметра исследована задача упругопластического кручения изотропного неоднородного полого цилиндрического стержня с поперечным сечением в виде кругового кольца. Предел текучести, следуя [2], сохраняет постоянное значение вдоль концентричных эллипсов. Определено напряженное состояние стержня и найдена упругопластическая граница в первом приближении.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу упругопластического кручения неоднородного полого стержня (рис. 1). Внешняя и внутренняя поверхности

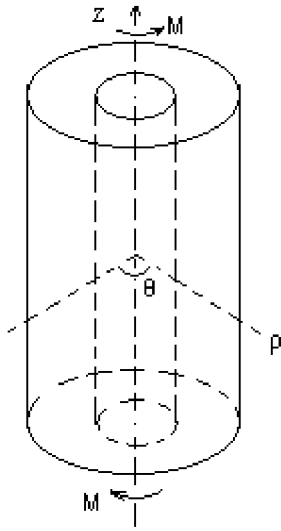


Рис. 1. Кручение полого цилиндрического стержня

стержня являются круговыми цилиндрами радиусов β и α ($\beta > \alpha$).

Введем цилиндрическую систему координат ρ, θ, z так, что координатная ось z направлена по оси цилиндров.

Стержень закручивается вокруг оси z равными и противоположными парами сил с моментом M . Боковая поверхность стержня свободна от нагрузок. Предположим, что величина крутящего момента M такова, что пластическая зона целиком охватывает внешний контур. В пластической области материал трубы предполагается неоднородным, предел текучести является функцией координат. Граница раздела пластической и упругой областей заранее неизвестна и подлежит определению в процессе решения задачи о напряженном состоянии стержня.

Согласно известной гипотезе жесткого контура [11], поле перемещений представляется в виде $u_\rho = 0, u_\theta = \omega \rho z, u_z = w(\rho, \theta, \omega)$, здесь w — неизвестная функция, характеризующая депланацию поперечного сечения, ω — крутка или угол кручения на единицу длины. Система уравнений для определения напряженного состояния стержня имеет вид (далее символ «e» сверху подчеркивает принадлежность величин к упругой области, а символ «p» — к пластической области).

Уравнения равновесия сводятся к одному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = 0. \quad (1)$$

В упругой области имеют место соотношения Коши в виде

$$e_{\rho z}^e = \frac{\omega}{2} \frac{\partial w^e}{\partial \rho}, \quad e_{\theta z}^e = \frac{\omega}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w^e}{\partial \theta} + \rho \right). \quad (2)$$

Соотношения закона Гука

$$\tau_{\rho z}^e = 2G e_{\rho z}^e, \quad \tau_{\theta z}^e = 2G e_{\theta z}^e, \quad (3)$$

где $G = \mu$ — модуль сдвига.

Следуя [2], условие пластичности примем в виде

$$\tau_{\rho z}^{p2} + \tau_{\theta z}^{p2} = \left(k_0 + \delta \left(\frac{(x+A)^2}{a^2} + \frac{(y+B)^2}{b^2} \right) \right)^2, \quad (4)$$

где k_0, a, b, A, B — const, δ — малый безразмерный параметр.

Согласно (4), предел текучести сохраняет постоянное значение вдоль эллипсов

$$\frac{(x+A)^2}{a^2} + \frac{(y+B)^2}{b^2} = c,$$

где c — const (рис. 2) и изменяется в зависимости от изменения величины c .

На внешнем контуре L_1 и внутреннем контуре L_2 выполняются граничные условия

$$\left\{ \tau_{\rho z}^p n_\rho^{(1)} + \tau_{\theta z}^p n_\theta^{(1)} \right\}_{L_1} = 0, \quad (5)$$

$$\left\{ \tau_{\rho z}^e n_\rho^{(2)} + \tau_{\theta z}^e n_\theta^{(2)} \right\}_{L_2} = 0, \quad (6)$$

где $n_\rho^{(i)}, n_\theta^{(i)}$ — компоненты единичной нормали к контуру L_i ($i=1, 2$).

На упругопластической границе выполняются условия непрерывности напряжений

$$\left[\tau_{\rho z} \right]_{L_s} = 0, \quad \left[\tau_{\theta z} \right]_{L_s} = 0, \quad (7)$$

где L_s — упругопластическая граница.

В упругой области из уравнения равновесия (1), учитывая (2) и (3), получим уравнение

$$\Delta w^e = 0, \quad (8)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}$ — оператор Лапласа.

Далее в соотношениях (1)—(3) и (5)—(8) все величины, имеющие размерность напряжения, будем считать безразмерными и отнесенными к пределу текучести в нулевом приближении k_0 , величины, имеющие размерность длины, также будем считать безразмерными и отнесенными к радиусу упругопластической границы в нулевом приближении ρ_0 .

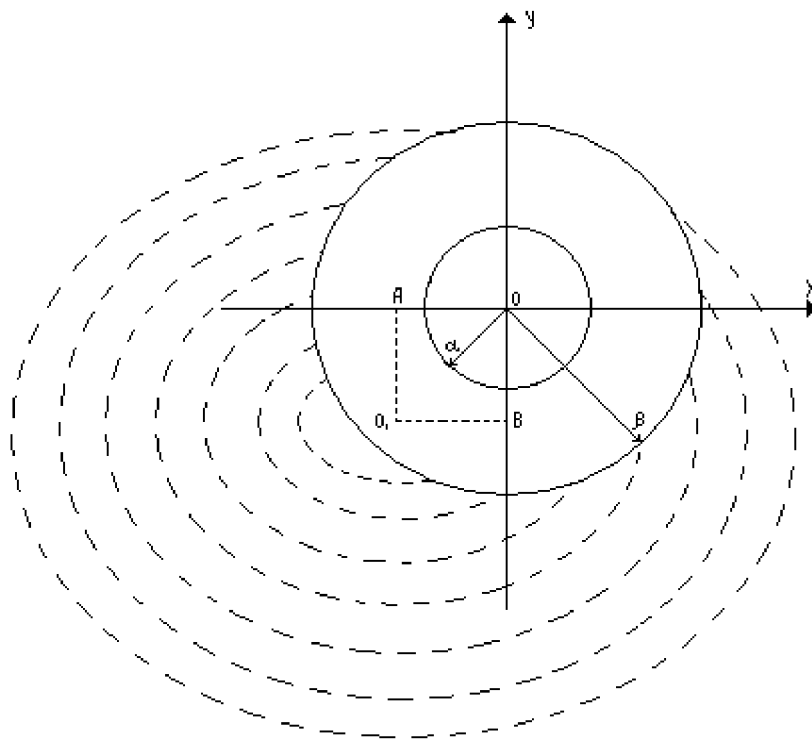


Рис. 2. Схематическое изображение неоднородности материала [2]

Условие (4) в безразмерном виде примет форму

$$\tau_{\rho z}^{p2} + \tau_{\theta z}^{p2} = \left(1 + \delta \left(\frac{(x+A)^2}{a^2} + \frac{(y+B)^2}{b^2} \right) \right)^2. \quad (9)$$

Уравнения внешнего и внутреннего контуров стержня L_1 и L_2 имеют вид

$$\rho = \beta, \quad \rho = \alpha, \quad (10)$$

где β, α — внешний и внутренний безразмерные радиусы, соответственно.

Граничные условия на контурах (5), (6) с учетом (10) запишутся в виде

$$\tau_{\rho z}^p \Big|_{\rho=\beta} = 0, \quad (11)$$

$$\tau_{\rho z}^e \Big|_{\rho=\alpha} = 0. \quad (12)$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Определим напряженное состояние стержня, используя метод малого параметра.

Согласно методу малого параметра [12], все искомые величины представляются в виде рядов по степеням параметра δ

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}^{(0)} + \delta \tau_{ij}^{(1)} + \dots, \quad w^e = w^{e(0)} + \delta w^{e(1)} + \dots, \quad \rho_s = \rho_0 + \delta \rho_1 + \dots, \quad (13)$$

здесь ρ_s — упругопластическая граница.

Подстановка рядов (13) в соотношения (1)—(3), (5)—(9), (11), (12) позволяет получить системы определяющих соотношений при одинаковых степенях малого параметра δ . В нулевом приближении имеет место известная задача упругопластического кручения однородного полого стержня с поперечным сечением в виде кольца. Решение этой задачи имеет вид [11]

$$\tau_{\theta z}^{p(0)} = 1, \tau_{\rho z}^{p(0)} = 0, w^{e(0)} = 0, \tau_{\theta z}^{e(0)} = G\omega\rho, \quad (14)$$

$$\tau_{\rho z}^{e(0)} = 0, \rho_0 = 1.$$

Рассмотрим решение задачи в первом приближении. В силу линейности соотношения (1) и (8) сохраняют свой вид для каждого приближения.

Условие пластичности (9) в первом приближении будет иметь вид

$$\tau_{\rho z}^{p(0)} \tau_{\rho z}^{p(1)} + \tau_{\theta z}^{p(0)} \tau_{\theta z}^{p(1)} = \frac{(x+A)^2}{a^2} + \frac{(y+B)^2}{b^2}. \quad (15)$$

Подстановка (14) в (15) дает выражение для $\tau_{\theta z}^{p(1)}$, а именно,

$$\tau_{\theta z}^{p(1)} = \frac{(x+A)^2}{a^2} + \frac{(y+B)^2}{b^2}.$$

Переход к полярным координатам с учетом того, что $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ позволяет получить эту компоненту напряжений в виде

$$\tau_{\theta z}^{p(1)} = \frac{1}{2b^2 a^2} \left((b^2 - a^2) \rho^2 \cos 2\theta + (b^2 + a^2) \rho^2 + 4Ab^2 \rho \cos \theta + 4Ba^2 \rho \sin \theta + 2(b^2 A^2 + a^2 B^2) \right) \quad (16)$$

Подставляя (16) в (1) и учитывая граничное условие (11), получим компоненту напряжений

$$\tau_{\rho z}^{p(1)} = -\frac{1}{b^2 a^2} \left(\frac{(b^2 - a^2)}{3} \left(\frac{\beta^3}{\rho} - \rho^2 \right) \sin 2\theta + \left(\frac{\beta^2}{\rho} - \rho \right) (Ab^2 \sin \theta - Ba^2 \cos \theta) \right) \quad (17)$$

Из соотношений (2) и (3) следует, что компоненты напряжений в первом приближении в упругой области будут определяться выражениями

$$\tau_{\rho z}^{e(1)} = G\omega \frac{\partial w^{e(1)}}{\partial \rho}, \quad \tau_{\theta z}^{e(1)} = G\omega \frac{1}{\rho} \frac{\partial w^{e(1)}}{\partial \theta} \quad (18)$$

С учетом (18) граничное условие на внутреннем контуре (12) преобразуется к виду

$$\left. \frac{\partial w^{e(1)}}{\partial \rho} \right|_{\rho=\alpha} = 0 \quad (19)$$

Условия непрерывности компонент напряжений на упругопластической границе (7) будут иметь вид

$$\left(\frac{\partial \tau_{\rho z}^{p(0)}}{\partial \rho} \rho_1 + \tau_{\rho z}^{p(1)} \right) \Big|_{\rho=1} = \left(\frac{\partial \tau_{\rho z}^{e(0)}}{\partial \rho} \rho_1 + \tau_{\rho z}^{e(1)} \right) \Big|_{\rho=1} \quad (20)$$

$$\left(\frac{\partial \tau_{\theta z}^{p(0)}}{\partial \rho} \rho_1 + \tau_{\theta z}^{p(1)} \right) \Big|_{\rho=1} = \left(\frac{\partial \tau_{\theta z}^{e(0)}}{\partial \rho} \rho_1 + \tau_{\theta z}^{e(1)} \right) \Big|_{\rho=1} \quad (21)$$

Соотношение (20) при использовании (14), (17) и (18) примет форму

$$\left. \frac{\partial w^{e(1)}}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = -\frac{1}{G\omega b^2 a^2} \left(\frac{b^2 - a^2}{3} (\beta^3 - 1) \sin 2\theta + (\beta^2 - 1) (Ab^2 \sin \theta - Ba^2 \cos \theta) \right) \quad (22)$$

Для функции $w^{e(1)}$ в упругой области, объединяя (8), (19) и (22), получим задачу Неймана для кольца

$$\begin{cases} \Delta w^{e(1)} = 0; R_1 < \rho < R_2, \theta \in [0; 2\pi] \\ \left. \frac{\partial w^{e(1)}}{\partial \rho} \right|_{\rho=R_1} = \varphi_1(\theta); \theta \in [0; 2\pi] \\ \left. \frac{\partial w^{e(1)}}{\partial \rho} \right|_{\rho=R_2} = \varphi_2(\theta); \theta \in [0; 2\pi] \end{cases} \quad (23)$$

где $R_1 = \alpha, R_2 = 1, \varphi_1(\theta) = 0,$

$$\varphi_2(\theta) = -\frac{1}{G\omega b^2 a^2} \left(\frac{b^2 - a^2}{3} (\beta^3 - 1) \sin 2\theta + (\beta^2 - 1) (Ab^2 \sin \theta - Ba^2 \cos \theta) \right).$$

Как известно [13], необходимым условием существования решения задачи Неймана для кольца является условие

$$R_1 \int_0^{2\pi} \varphi_1(\theta) d\theta = R_2 \int_0^{2\pi} \varphi_2(\theta) d\theta.$$

Нетрудно проверить, что в данном случае оно выполняется.

Решение уравнения $\Delta w^{e(1)} = 0$ имеет вид [13]

$$w^{e(1)} = A_0 + B_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{-n} (C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta). \quad (24)$$

Используя краевые условия задачи (23), определяем ненулевые коэффициенты в (24)

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{B(\beta^2 - 1)}{G\omega b^2 (1 - \alpha^2)}, \quad C_1 = \frac{B(\beta^2 - 1)\alpha^2}{G\omega b^2 (1 - \alpha^2)}, \\ B_1 &= -\frac{A(\beta^2 - 1)}{G\omega a^2 (1 - \alpha^2)}, \quad D_1 = -\frac{A(\beta^2 - 1)\alpha^2}{G\omega a^2 (1 - \alpha^2)}, \\ B_2 &= -\frac{(b^2 - a^2)(\beta^3 - 1)}{3G\omega a^2 b^2 (1 - \alpha^4)}, \\ D_2 &= -\frac{(b^2 - a^2)(\beta^3 - 1)\alpha^4}{3G\omega a^2 b^2 (1 - \alpha^4)}. \end{aligned}$$

С учетом полученных выражений функция деформации в упругой области примет вид

$$w^{e(1)} = \frac{\beta^2 - 1}{G\omega (1 - \alpha^2)} \left(\rho + \frac{\alpha^2}{\rho} \right) \left(\frac{B}{b^2} \cos \theta - \frac{A}{a^2} \sin \theta \right) - \frac{(b^2 - a^2)(\beta^3 - 1)}{3G\omega a^2 b^2 (1 - \alpha^4)} \left(\rho^2 + \frac{\alpha^4}{\rho^2} \right) \sin 2\theta,$$

и напряжения в упругой области (18) будут такими

$$\begin{aligned} \tau_{\rho z}^{e(1)} &= \frac{\beta^2 - 1}{1 - \alpha^2} \left(1 - \frac{\alpha^2}{\rho^2} \right) \left(\frac{B}{b^2} \cos \theta - \frac{A}{a^2} \sin \theta \right) - \\ &- \frac{2}{3} \frac{(b^2 - a^2)(\beta^3 - 1)}{a^2 b^2 (1 - \alpha^4)} \left(\rho - \frac{\alpha^4}{\rho^3} \right) \sin 2\theta, \end{aligned}$$

$$\tau_{\theta z}^{(1)} = -\frac{\beta^2 - 1}{1 - \alpha^2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{\rho^2} \right) \left(\frac{B}{b^2} \cos \theta + \frac{A}{a^2} \sin \theta \right) - \frac{2}{3} \frac{(b^2 - a^2)(\beta^3 - 1)}{a^2 b^2 (1 - \alpha^4)} \left(\rho + \frac{\alpha^4}{\rho^3} \right) \cos 2\theta. \quad (25)$$

Из условия (21) с учетом (14), (16) и (25) получим выражение для радиуса упругопластической границы в первом приближении

$$\rho_1 = \frac{1}{G\omega} \frac{b^2 - a^2}{2a^2 b^2} \left(1 - \frac{4(\beta^3 - 1)(1 + \alpha^4)}{3(1 - \alpha^4)} \right) \cos 2\theta + \left(2 - \frac{(\beta^2 - 1)(1 + \alpha^2)}{1 - \alpha^2} \right) \left(\frac{B}{b^2} \sin \theta + \frac{A}{a^2} \cos \theta \right) - \frac{1}{2a^2 b^2} (b^2 (1 + 2A^2) + a^2 (1 + 2B^2)).$$

Тогда упругопластическая граница согласно (13) и (14) примет вид

$$\rho_s = 1 + \delta \rho_1$$

АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 3а, 3б, 3в показана зависимость упругопластической границы от угла θ в случае однородного и неоднородного материала. При этом значения безразмерных характеристик принимались следующими: на рис. 3а — $\delta = 0.12$, $a = 2$, $b = 3$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 2$, $A = -1.5$, $B = -1.5$; на рис. 3б — $\delta = 0.12$, $a = 2$, $b = 3$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 2$, $A = 0$, $B = 0$; на рис. 3в — $\delta = 0.12$, $a = 1$, $b = 1$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 2$, $A = 0$, $B = 0$. Рис. 3в соответствует частному случаю, когда предел текучести сохраняет постоянное значение вдоль окружностей.

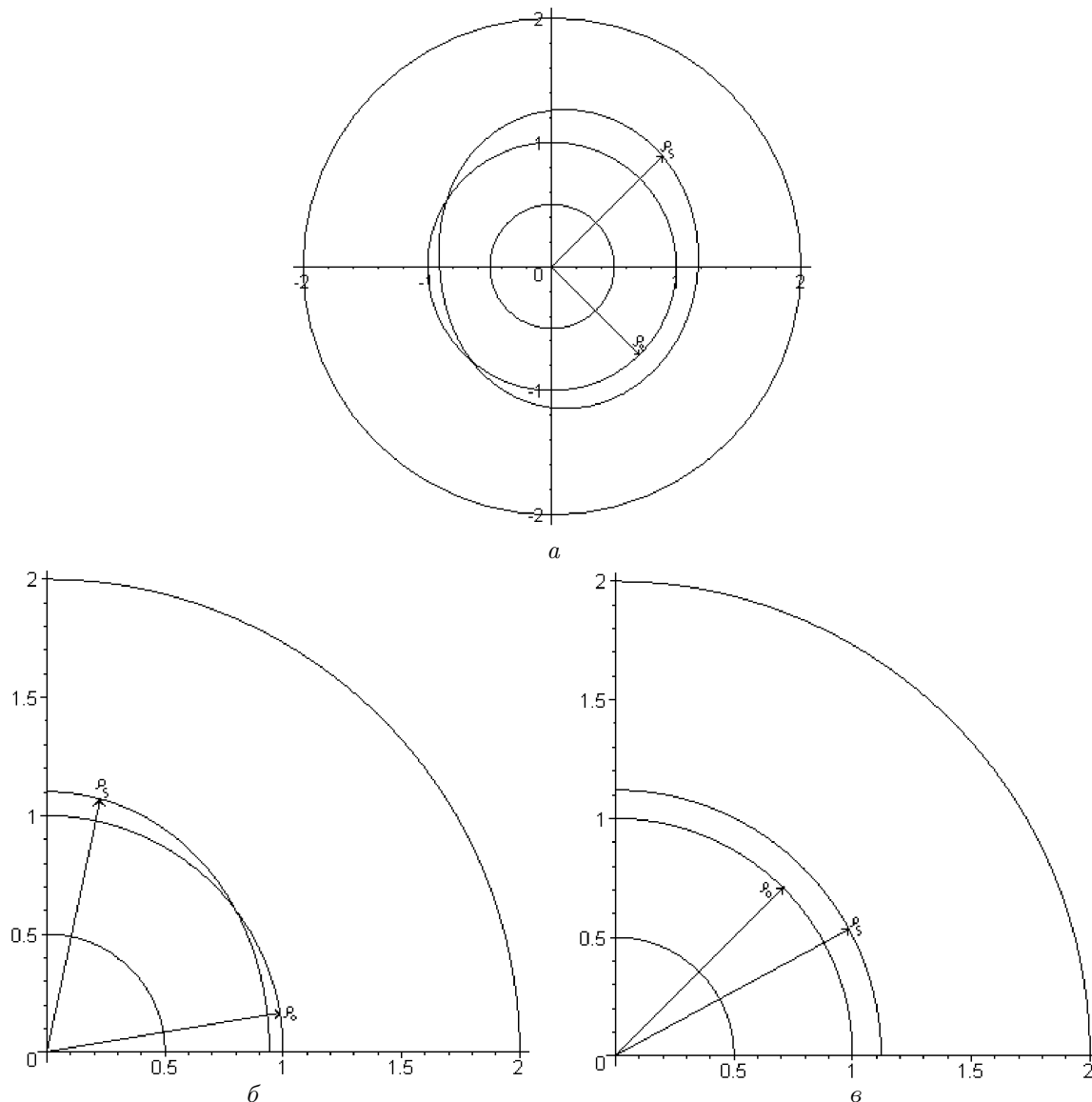


Рис. 3. Положение упругопластической границы

Зависимость компонент напряжений от координаты ρ в пластической зоне представлена на рис. 4, а в упругой зоне — на рис. 5. Компоненты напряжений с учетом первого приближения обозначены знаком «~». При этом значения безразмерных характеристик принимались следующими: $\delta = 0.12$, $a = 2$, $b = 3$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 2$, $A = -1.5$, $B = -1.5$, $\theta = \pi/6$.

Из полученных решений следует, что учет неоднородности материала оказывает влияние на характер поведения компонент напряжений в упругой и в пластической областях и на положение упругопластической границы. В случае, представленном на рис. 3в, можно сделать вывод, что учет неоднородности материала приводит к уменьшению пластической области.

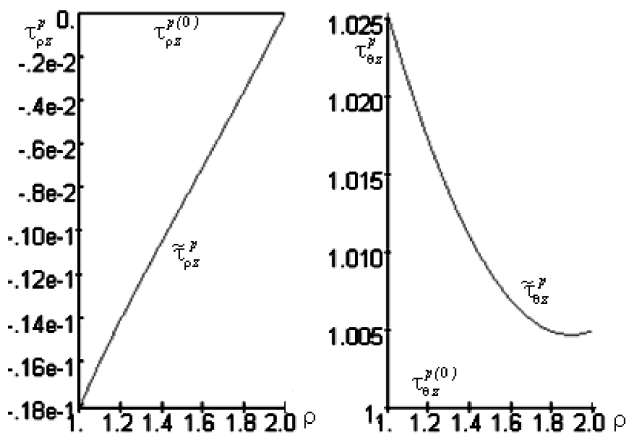


Рис. 4. Зависимость компонент напряжений от координаты ρ в пластической области в нулевом приближении и с учетом первого приближения

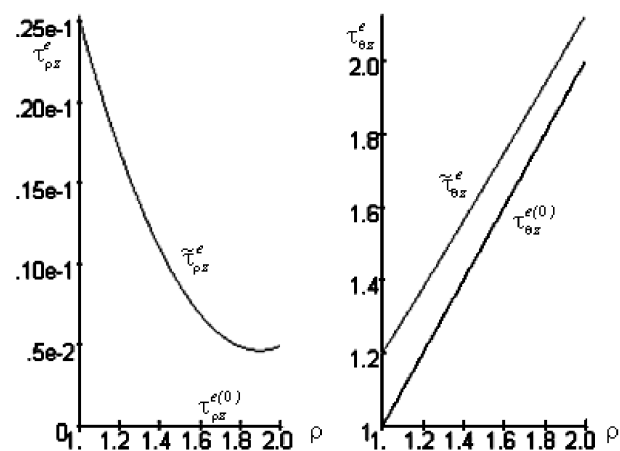


Рис. 5. Зависимость компонент напряжений от координаты ρ в упругой области в нулевом приближении и с учетом первого приближения

Следуя [2], можно отметить, что прием определения неоднородных свойств на примере концентричных эллипсов может быть распространен на случай различных семейств кривых.

ЛИТЕРАТУРА

1. Максимова Л. А. Об упругопластическом состоянии неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления / Л. А. Максимова, С. В. Тихонов // Вестник ЧГПУ им. Яковлева. Механика предельного состояния. — 2007. — № 2. — С. 91—95.
2. Тихонов С. В. Об упругопластическом состоянии толстостенной трубы из неоднородного материала под действием внутреннего давления / С. В. Тихонов // Вестник СамГУ — Естественнонаучная серия. — 2007. — № 6. — С. 13—20.
3. Тихонов С. В. О двусосном растяжении плоскости из упругопластического неоднородного материала / С. В. Тихонов // Вестник ЧГПУ им. Яковлева. Механика предельного состояния. — 2007. — № 2. — С. 161—168.
4. Ивлев Д. Д. О соотношениях трансляционной идеальнопластической анизотропии при кручении / Д. Д. Ивлев, Б. Г. Миронов // Вестник ЧГПУ им. Яковлева. Механика предельного состояния. — 2010. — № 2. Ч. 3. — С. 576—579.
5. Кузнецов Е. Е. Сжатие идеально пластического ортотропного слоя / Е. Е. Кузнецов, И. Н. Матченко, Н. М. Матченко // Вестник ЧГПУ им. Яковлева. Механика предельного состояния. — 2010. — № 2. Ч. 2. — С. 280—287.
6. Миронов Б. Г. О кручении анизотропных призматических стержней, находящихся под действием давления, линейно меняющегося вдоль образующей / Б. Г. Миронов, Л. С. Козлова, Т. И. Рыбакова // Вестник ЧГПУ им. Яковлева. Механика предельного состояния. — 2010. — № 2. Ч. 2. — С. 349—357.
7. Ивлев Д. А. О предельном состоянии слоистых анизотропных круговых цилиндров при кручении / Вестник ЧГПУ им. Яковлева. Механика предельного состояния. — 2011. — № 1. — С. 107—110.
8. Миронов Б. Г. О кручении анизотропных цилиндрических стержней / Б. Г. Миронов, Т. В. Митрофанова // Вестник ЧГПУ им. Яковлева. Механика предельного состояния. — 2011. — № 1. — С. 150—155.
9. Фоминых С. О. Упругопластическое состояние толстостенной трубы при взаимодействии различных видов пластической анизотропии / С. О. Фоминых // Вестник ЧГПУ им. Яковлева. Механика предельного состояния. — 2011. — № 1. — С. 211—226.
10. Ольшак В. Теория пластичности неоднородных сред / В. Ольшак, Я. Рыхлевский, В. Урбановский. — М. : Мир, 1964. — 156 с.

11. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. — М: Наука, 1969. — 420 с.

12. Ивлев Д. Д. Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. — М: Наука, 1978.

Щеглова Ю. Д. — доцент факультета прикладной математики, информатики и механики, Воронежский государственный университет

E-mail: scheglova@gmail.com

Тел.: 8-903-650-24-79

13. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики : учеб. / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова .— 7-е изд. — М.: Изд-во Моск. ун-та: Наука, 2004.— 798 с.

Shcheglova Yu. D. — associate professor of faculty of applied mathematics, information technologies and mechanics, Voronezh State University

E-mail: scheglova@gmail.com

Tel: 8-903-650-24-79