УДК 517.18, 517.587

О КОНСТАНТАХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ КОМБИНАЦИЙ ФУНКЦИЙ ЭРМИТА

С. Н. Ушаков

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 3.11.2011 г.

Аннотация. В работе изучается зависимость константы неопределенности от коэффициентов линейных комбинаций функций Эрмита. В случае двух и трех слагаемых показано, что константа неопределенности может быть меньше, чем для исходных функций.
Ключевые слова: ортонормированный базис, константа неопределенности, функции Эрмита.

Abstract. In this paper we study the dependence of uncertainty constants from coefficients of linear combination of Hermite functions. It is proved in case of two or three terms that uncertainty constant could be less then for the initial functions.
Key words: orthonormal basis, uncertainty constant, Hermite functions.

ВВЕДЕНИЕ

Используемые в теоретической физике ортонормированные базисы (например, функции Эрмита) не имеют равномерно ограниченной константы неопределённости. Хорошо локализованные подсистемы когерентных состояний не ортогональны. А развитие эргодической теории для квантовых систем требует построения базиса, сочетающего свойства ортогональности и локализованности. Существование такого базиса, построенного из полной подсистемы когерентных состояний, было постулировано Дж. фон Нейманом ещё в 1929 году [1], но конструктивных примеров нет до сих пор. Использование базисов всплескового типа [2, 3] в эргодической теории также оказалось затруднительным.

Возникает естественный вопрос о возможности улучшения свойства локализованности у уже имеющихся базисов. Особый интерес в таком случае представляют функции, для которых константу неопределённости можно не только оценить, но и аналитически посчитать. В этом состоит одно из достоинств функций Эрмита.

Как известно, при ортогональном преобразовании один базис переходит в другой. Причём их константы неопределённости ведут себя очень по-разному. Они могут быть равномерно ограниченными (всплески Мейера), неограниченными (функции Эрмита) и даже равными бесконечности [2, 3]. Значит, уместен вопрос об ортогональном преобразовании, уменьшающем константу неопределённости для всех функций базиса.

Подробно изучен случай двух функций Эрмита. Аналитически получены точки минимума константы неопределенности и её минимум. Изучено применение матрицы унитарного преобразования. Для случая трёх функций построены графики и найдены точки минимума константынеопределённости с точностью до сотых (можно найти с заданной точностью вычисления). При большем количестве функций аналитически минимум найти становится проблематично, ведь даже в случае двух функций возникает многочлен третьей степени с коэффициен тами,зависящими от параметра n. Уже при четырех функциях существенно сложнее решать задачу графически, так как константа неопределённости уже будет зависеть от трёх параметров. Уменьшение общей константы неопределённости для базиса требует иного подхода, чем минимизация одной линейной комбинации.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ВЫКЛАДКИ

Пусть $H_n(x)$, $n = 0, 1, 2\ldots$ — полиномы Эрмита. Тогда функции Эрмита

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

образуют ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{R})$. В дальнейшем нам потребуются соотношения [4, стр. 84—85]:

$$2xH_n(x) = H_{n+1}(x) + 2nH_{n-1}(x), \qquad (1.1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)\, H_k(x)\, e^{-x^2}\, dx = \begin{cases} 2^n\, n!\sqrt{\pi}, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}. \qquad (1.2)$$

Используя соотношения (1.1)—(1.2), легко получить следующие формулы:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi_n(x)\varphi_k(x)\, dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & k \neq n \pm 2,\ k \neq n, \\ n + \dfrac{1}{2}, & k = n, \\ \dfrac{\sqrt{(n+2)(n+1)}}{2}, & k = n+2, \\ \dfrac{\sqrt{n(n-1)}}{2} & k = n-2. \end{cases} \qquad (1.3)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, \varphi_n(x)\, \varphi_k(x)\, dx = \begin{cases} 0, & k \neq n \pm 1, \\ \sqrt{\dfrac{n+1}{2}}, & k = n+1, \\ \sqrt{\dfrac{n}{2}}, & k = n-1. \end{cases} \qquad (1.4)$$

Пусть $f(x),\, xf(x) \in L_2(\mathbb{R})$, причём

$$\|f\| = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx \right\}^{\frac{1}{2}} \neq 0.$$

Тогда радиус $\Delta(f)$ функции f определяется формулой

$$\Delta(f) := \frac{1}{\|f\|} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, |f(x)|^2\, dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x\, |f(x)|^2\, dx \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Преобразование Фурье имеет следующий вид:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ix\xi} dx.$$

Произведение $\Delta(f) \cdot \Delta(\hat{f})$ называется константой неопределённости [3, стр. 49], [5, стр. 103]. Константу неопределенности для функции f будем обозначать через $u(f)$.

Функции $\varphi_n(x)$ являются собственными функциями преобразования Фурье:

$$\hat{\varphi}_n(\xi) = (-i)^n \varphi_n(\xi),\ n = 0, 1, 2\ldots \qquad (1.5)$$

Из (1.3)—(1.5) видно, что

$$u(\varphi_n) = \Delta_{\varphi_n} \cdot \Delta_{\hat{\varphi}_n} = n + \frac{1}{2}. \qquad (1.6)$$

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Рассмотрим функцию $\Psi_{\alpha,n,k}(x) = \cos\alpha\, \varphi_n(x) + \sin\alpha\, \varphi_k(x)$, где параметр $\alpha \in [0; 2\pi]$, $n, k = 0, 1, 2\ldots$ (общий случай $\Psi_{a,b,n,k}(x) = a\,\varphi_n(x) + b\,\varphi_k(x)$ совпадает с рассматриваемым, так как при делении функции на $\sqrt{a^2 + b^2}$ константа неопределённости не меняется). Естественно, мы предполагаем, что $n \neq k$.

Заметим, что норма $\Psi_{\alpha,n,k}(x)$ равна 1. Вычислим константу неопределённости для функции $\Psi_{\alpha,n,k}(x)$. Вначале найдём её радиус:

$$\begin{aligned} \Delta^2\left(\Psi_{\alpha,n,k}\right) &= \cos^2\alpha \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi_n^2(x)\, dx + \\ &+ \sin 2\alpha \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi_n(x)\varphi_k(x)\, dx + \\ &+ \sin^2\alpha \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi_k^2(x)\, dx - \\ &- \sin^2 2\alpha \left(\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi_n(x)\varphi_k(x)\, dx \right)^2. \end{aligned} \qquad (2.1)$$

В зависимости от расположения функций друг относительно друга, или иначе говоря, в зависимости от номеров n и k, величина $\Delta(\hat{\Psi}_{\alpha,n,k})$, вообще говоря, может быть различной. Поэтому основные утверждения параграфа удобно сформулировать в виде трех теорем.

Теорема 1. Пусть $|n - k| > 2$, тогда

$$u\left(\Psi_{\alpha,n,k}\right) = n\cos^2\alpha + k\sin^2\alpha + \frac{1}{2},$$

$$\min_{\alpha \in [0, 2\pi]} u\left(\Psi_{\alpha,n,k}\right) = \min(n, k) + \frac{1}{2}.$$

□ Из (2.1) следует

$$\Delta^2\left(\Psi_{\alpha,n,k}\right) = n\cos^2\alpha + k\sin^2\alpha + \frac{1}{2}.$$

С учетом (1.5) $\left|\hat{\Psi}_{\alpha,n,k}(\xi)\right|^2$ может быть равно одному из следующих выражений:

$$\begin{cases} \cos^2\alpha\, \varphi_n^2(\xi) + \sin^2\alpha\, \varphi_k^2(\xi), \\ \cos^2\alpha\, \varphi_n^2(\xi) + \sin 2\alpha\, \varphi_n(\xi)\, \varphi_k(\xi) + \sin^2\alpha\, \varphi_k^2(\xi), \\ \cos^2\alpha\, \varphi_n^2(\xi) - \sin 2\alpha\, \varphi_n(\xi)\, \varphi_k(\xi) + \sin^2\alpha\, \varphi_k^2(\xi). \end{cases}$$

Как видно из (1.4), интегралы при $\sin 2\alpha$ будут равны 0. Поэтому,

$$\Delta^2\left(\widehat{\Psi}_{\alpha,n,k}\right) = n\cos^2\alpha + k\sin^2\alpha + \frac{1}{2},$$

$$u\left(\Psi_{\alpha,n,k}\right)=n\cos^2\alpha+k\sin^2\alpha+\frac{1}{2}. \qquad (2.2)$$

Следовательно, в данном случае константа неопределённости, как функция от α непрерывным образом пробегает все значения из отрезка $\left[\min(n,k)+\frac{1}{2};\,\max(n,k)+\frac{1}{2}\right]$. Минимум, естественно, достигается при обнулении коэффициента у функции с наибольшим индексом. ■

Замечание 1. Как следует из (1.6), границами отрезка являются константы неопределённости для исходных функций φ_n и φ_k.

Замечание 2. Максимум будет равен $\max(n,k)+\frac{1}{2}$, также, как и во всех рассматриваемых ниже случаях.

Более интересные результаты получаются в следующей теореме.

Теорема 2. Пусть $k=n+2$, тогда

$$u\left(\Psi_{\alpha,n,k}\right)=$$
$$=\sqrt{\left(n^2+3n+6\right)\sin^4\alpha+\left(n-n^2\right)\sin^2\alpha+n^2+n+\frac{1}{4}},$$

$$\min_{\alpha\in[0,2\pi]}u\left(\Psi_{\alpha,n,k}\right)=\sqrt{\frac{2n^4+14n^3+39n^2+27n+6}{4\left(n^2+3n+6\right)}}$$

и достигается при $\sin^2\alpha=\dfrac{n^2-n}{2\left(n^2+3n+6\right)}$.

Учитывая (2.1), получим

$$\Delta^2\left(\Psi_{\alpha,n,k}\right)=$$
$$=2\sin^2\alpha+\frac{\sqrt{(n+2)(n+1)}}{2}\sin 2\alpha+n+\frac{1}{2}.$$

Соотношение (1.5) позволяет определить, что

$$\left|\widehat{\Psi}_{\alpha,n,k}(\xi)\right|^2=\cos^2\alpha\varphi_n^2(\xi)-$$
$$-\sin 2\alpha\,\varphi_n(\xi)\,\varphi_k(\xi)+\sin^2\alpha\,\varphi_k^2(\xi).$$

Отсюда,

$$\Delta^2\left(\widehat{\Psi}_{\alpha,n,k}\right)=$$
$$=2\sin^2\alpha-\frac{\sqrt{(n+2)(n+1)}}{2}\sin 2\alpha+n+\frac{1}{2},$$

$$u^2\left(\Psi_{\alpha,n,k}\right)=\left(n^2+3n+6\right)\sin^4\alpha+$$
$$+\left(n-n^2\right)\sin^2\alpha+n^2+n+\frac{1}{4}. \qquad (2.3)$$

Подкоренное выражение достигает своего минимума при

$$\sin^2\alpha=\frac{n^2-n}{2\left(n^2+3n+6\right)}.$$

В завершение доказательства, выпишем минимальное значение $u\left(\Psi_{\alpha,n,k}\right)$, получая утверждение теоремы

$$\min_{\alpha\in[0,2\pi]}g(\alpha)=\sqrt{\frac{2n^4+14n^3+39n^2+27n+6}{4\left(n^2+3n+6\right)}}.\ ■$$

Следствие 1. Пусть $n=k-2$, тогда

$$g(\alpha)=$$
$$=\sqrt{\left(k^2+3k+6\right)\cos^4\alpha+\left(k-k^2\right)\cos^2\alpha+k^2+k+\frac{1}{4}},$$

$$\min_{\alpha\in[0,2\pi]}g(\alpha)=\sqrt{\frac{2k^4+14k^3+39k^2+27k+6}{4\left(k^2+3k+6\right)}}$$

и достигается при $\cos^2\alpha=\frac{k^2-k}{2\left(k^2+3k+6\right)}$.

□ Этот случай легко сводится к предыдущему. Достаточно взять $k=n+2$ и сделать замену $\alpha'=\frac{\pi}{2}-\alpha$. Тогда роль $\sin\alpha$ будет играть $\cos\alpha$:

$$u\left(\Psi_{\alpha,n,k}\right)=$$
$$=\sqrt{\left(k^2+3k+6\right)\cos^4\alpha+\left(k-k^2\right)\cos^2\alpha+k^2+k+\frac{1}{4}}. \qquad (2.4)$$

Замечание 3. Если $n\geq 2$, то константа неопределённости для $\Psi_{\alpha,n,k}(x)$ меньше $n+\frac{1}{2}$, то есть меньше наименьшей из констант для функций $\varphi_n(x)$ и $\varphi_k(x)$. Данное обстоятельство является, на наш взгляд, весьма примечательным.

Вычислим этот минимум при $n=2$ и $n=3$:

$$\min_{\alpha\in[-\pi;\,\pi]}u\left(\Psi_{\alpha,2,0}\right)=\frac{\sqrt{87}}{4}\approx 2,33,$$

$$\min_{\alpha\in[-\pi;\,\pi]}u\left(\Psi_{\alpha,3,1}\right)=\sqrt{\frac{485}{48}}\approx 3,18.$$

Замечание 4. Очевидно, что

$$\frac{n^2-n}{2\left(n^2+3n+6\right)}\to\frac{1}{2}$$

при $n\to\infty$, то есть оптимальное значение α близко к одному из следующих углов $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2}, m=0,1,2,3$. Изучим поведение константы неопределённости при $\sin^2\alpha=\frac{1}{2}$, которое тем ближе к оптимальному, чем больше n.

$$u\left(\Psi_{\alpha,n,k}\right)=\sqrt{\frac{n^2+3n+6}{4}+\frac{-n^2+n}{2}+n^2+n+\frac{1}{4}}=$$
$$=\frac{\sqrt{3n^2+9n+7}}{2}\approx\frac{\sqrt{3}}{2}\left(n+\frac{3}{2}\right),$$

где $a_n \approx b_n$ — означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

При $n = 6$ $\frac{\sqrt{3n^2+9n+7}}{2} = \frac{13}{2} = n + \frac{1}{2}$, а при $n \ge 7$ $\frac{\sqrt{3n^2+9n+7}}{2} < n + \frac{1}{2}$. Таким образом, мы получили асимптотику

$$u\left(\Psi_{\alpha,n,k}\right) \approx \frac{\sqrt{3}}{2}\left(n + \frac{3}{2}\right). \tag{2.5}$$

Теорема 3. Пусть $k = n+1$, тогда

$$u\left(\Psi_{\alpha,n,k}\right) =$$
$$= \sqrt{2(n+1)\sin^6\alpha + \left(2n^2+n\right)\sin^4\alpha - \left(2n^2+n\right)\sin^2\alpha + n^2 + n + \frac{1}{4}},$$

минимум достигается при $\sin^2\alpha = \frac{\sqrt{a^2+3a}-a}{3}$, где $a = \frac{2n^2+n}{2(n+1)}$.

□ В условиях теоремы (2.1) примет вид

$$\Delta^2\left(\Psi_{\alpha,n,k}\right) = \sin^2\alpha + n + \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2}\sin^2 2\alpha.$$

Для $\left|\widehat{\Psi}_{\alpha,n,k}(\xi)\right|^2$ справедливы равенства:

$$\left|\widehat{\Psi}_{\alpha,n,k}(\xi)\right|^2 = \cos^2\alpha\,\varphi_n^2(\xi) + \sin^2\alpha\,\varphi_k^2(\xi),$$

$$\Delta^2\left(\widehat{\Psi}_{\alpha,n,k}\right) = n\cos^2\alpha + (n+1)\sin^2\alpha + \frac{1}{2} =$$
$$= \sin^2\alpha + n + \frac{1}{2}.$$

Приведём значение $u^2\left(\Psi_{\alpha,n,k}\right)$ без утомительных выкладок:

$$u^2\left(\Psi_{\alpha,n,k}\right) = 2\left(n+1\right)\sin^6\alpha + \left(2n^2+n\right)\sin^4\alpha - \\ -\left(2n^2+n\right)\sin^2\alpha + n^2 + n + \frac{1}{4}. \tag{2.6}$$

Для простоты можно рассмотреть функцию $f(t) = t^3 + at^2 - at + b$, где $a \ge 0$, $b > 0$, $t \in [0,1]$. На этом отрезке минимум достигается при $t = \frac{\sqrt{a^2+3a}-a}{3}$, то есть для $u\left(\Psi_{\alpha,n,k}\right)$ при $\sin^2\alpha = \frac{\sqrt{a^2+3a}-a}{3}$, где $a = \frac{2n^2+n}{2(n+1)}$. Формула для минимального значения константы неопределенности оказывается слишком громоздкой. ■

Следствие 2. Пусть $n = k-1$, тогда

$$u\left(\Psi_{\alpha,n,k}\right) =$$
$$= \sqrt{2\left(k+1\right)\cos^6\alpha + \left(2k^2+k\right)\cos^4\alpha - \left(2k^2+k\right)\cos^2\alpha + k^2 + k + \frac{1}{4}},$$

минимум достигается при $\cos^2\alpha = \frac{\sqrt{a^2+3a}-a}{3}$, где $a = \frac{2n^2+n}{2(n+1)}$.

Этот случай легко сводится к предыдущему. Достаточно взять $k = n+1$ и сделать замену $\alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Тогда роль $\sin\alpha$ будет играть $\cos\alpha$:

$$u^2\left(\Psi_{\alpha,n,k}\right) = 2\left(k+1\right)\cos^6\alpha + \left(2k^2+k\right)\cos^4\alpha - \\ -\left(2k^2+k\right)\cos^2\alpha + k^2 + k + \frac{1}{4}. \tag{2.7}$$

Замечание 5. Заметим, что

$$\lim_{a\to\infty}\frac{\sqrt{a^2+3a}-a}{3} = \lim_{a\to\infty}\frac{3a}{3\left(\sqrt{a^2+3a}+a\right)} = \frac{1}{2}.$$

Вычислим константу неопределённости для $\Psi_{\alpha,n,k}(x)$ при $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}$.

$$u\left(\Psi_{\alpha,n,k}\right) =$$
$$= \sqrt{2\left(n+1\right)\frac{1}{8} + \left(2n^2+n\right)\frac{1}{4} - \left(2n^2+n\right)\frac{1}{2} + n^2 + n + \frac{1}{4}} =$$
$$= \sqrt{\frac{n+1-2n^2-n+4n^2+4n+1}{4}}$$

то есть,

$$u\left(\Psi_{\alpha,n,k}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(n+1). \tag{2.8}$$

Заметим, что и в этом случае константа неопределённости меньше $n + \frac{1}{2}$ при $n \ge 1$.

3. ОРТОГОНАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДЛЯ ДВУХ ФУНКЦИЙ ЭРМИТА

Применим матрицу поворота к паре функций Эрмита:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_n(x) \\ \varphi_k(x) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \sin\alpha\,\varphi_k(x) + \cos\alpha\,\varphi_n(x) \\ -\sin\alpha\,\varphi_n(x) + \cos\alpha\,\varphi_k(x) \end{pmatrix}.$$

Введём обозначения:

$$\Psi_1(x) = \sin\alpha\,\varphi_k(x) + \cos\alpha\,\varphi_n(x), \tag{3.1}$$

$$\Psi_2(x) = -\sin\alpha\,\varphi_n(x) + \cos\alpha\,\varphi_k(x). \tag{3.2}$$

Заметим, что $\Psi_1(x)$ совпадает с уже рассмотренной $\Psi_{\alpha,n,k}$, $\Psi_2(x)$ можно получить из $\Psi_1(x)$ путём замены:

$$\alpha' = \frac{\pi}{2} + \alpha. \tag{3.3}$$

Перед изучением поведения констант неопределённости для $\Psi_1(x)$ и $\Psi_2(x)$ было высказано предположение, что они станут минимальными тогда, когда совпадут. В итоге данное предположение не подтвердилось: $u\left(\Psi_1(x)\right)$ и $u\left(\Psi_2(x)\right)$ при равенстве не становятся минимальными, но при $n \to \infty$ их минимальные значения к равенству стремятся.

Рассмотрим пять уже знакомых случаев.

1. $|k-n| > 2$.

Из (2.2) и (3.3) следует, что

$$u(\Psi_1) = n\cos^2\alpha + k\sin^2\alpha + \frac{1}{2},$$

$$u(\Psi_2) = k\cos^2\alpha + n\sin^2\alpha + \frac{1}{2}.$$

Константы будут равны, если

$$(n-k)\cos 2\alpha = 0.$$

Значит, или $n = k$ или $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, m = 0,1,2,3$. Случай $n = k$ особого интереса не представляет.

2. $k = n+2$.

Из (2.3) и (3.3) следует, что

$$u(\widehat{\Psi_1}) =$$

$$= \sqrt{(n^2+3n+6)\sin^4\alpha + (n-n^2)\sin^2\alpha + n^2 + n + \frac{1}{4}},$$

$$u(\Psi_2) =$$

$$= \sqrt{(n^2+3n+6)\cos^4\alpha + (n-n^2)\cos^2\alpha + n^2 + n + \frac{1}{4}}.$$

Константы будут равны, если

$$(4n+6)\cos 2\alpha = 0.$$

То есть $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, m = 0,1,2,3$. Этот угол нам уже знаком, именно, к нему стремится точка минимума. При этом уже при $n > 6$ константа сразу двух функций Ψ_1 и Ψ_2 станет меньше наименьшей константы исходных функций. А её поведение наглядно показывает (2.5).

3. $k = n-2$.

Случай принципиально ничем не отличается от предыдущего.

4. $k = n+1$.

Из (2.6) и (3.3) следует, что

$$u^2(\Psi_1) = 2(n+1)\sin^6\alpha + (2n^2+n)\sin^4\alpha - -(2n^2+n)\sin^2\alpha + n^2 + n + \frac{1}{4}.$$

$$u^2(\Psi_2) = 2(n+1)\cos^6\alpha + (2n^2+n)\cos^4\alpha - -(2n^2+n)\cos^2\alpha + n^2 + n + \frac{1}{4}.$$

Константы будут равны, если

$$2(n+1)\left(1 - \frac{\sin^2 2\alpha}{4}\right)\cos 2\alpha = 0.$$

То есть $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, m = 0,1,2,3$. Как и во втором случае. При этом уже при $n > 1$ константа сразу двух функций Ψ_1 и Ψ_2 станет меньше наименьшей константы исходных функций. А её поведение наглядно показывает (2.8).

5. $k = n-1$. Случай принципиально ничем не отличается от предыдущего.

4. УНИТАРНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Было бы странно не изучить поведение констант неопределённости при унитарном преобразовании пары функций Эрмита. Матрица унитарного преобразования [6, стр. 170]:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha\, e^{i\frac{\beta+\gamma}{2}} & i\sin\alpha\, e^{i\frac{\beta-\gamma}{2}} \\ i\sin\alpha\, e^{i\frac{\gamma-\beta}{2}} & \cos\alpha\, e^{-i\frac{\beta+\gamma}{2}} \end{pmatrix},$$

где $0 \le \alpha < 2\pi$, $0 < \beta < 2\pi$, $-2\pi \le \gamma < 2\pi$.

Рассмотрим две функции:

$$F_1(x) = \cos\alpha\, e^{i\frac{\beta+\gamma}{2}}\varphi_n(x) + i\sin\alpha\, e^{i\frac{\beta-\gamma}{2}}\varphi_k(x), \quad (4.1)$$

$$F_2(x) = i\sin\alpha\, e^{i\frac{\gamma-\beta}{2}}\varphi_n(x) + \cos\alpha\, e^{-i\frac{\beta+\gamma}{2}}\varphi_k(x). \quad (4.2)$$

Функцию $F_2(x)$ можно получить из $F_1(x)$ путём замен:

$$n = k,\ k = n,\ \beta' = -\beta,\ \gamma' = -\gamma. \quad (4.3)$$

В этом разделе мы не будем приводить длинные выкладки, так как при вычислении не возникает никаких трудностей.

$$|F_1(x)|^2 = \cos^2\alpha\,\varphi_n(x) + \sin^2\alpha\varphi_k(x) + + \sin 2\alpha \sin\gamma\,\varphi_n(x)\varphi_k(x).$$

Полученные константы:

1. $|n-k| > 2$.

$$u(F_1) = n\cos^2\alpha + k\sin^2\alpha + \frac{1}{2}. \quad (4.4)$$

Очевидно, результат ничем не отличается от (2.2).

2. $k = n+1$.

В этом случае

$$|\hat{F}_1(x)|^2 = \cos^2\alpha\,\varphi_n(x) + \sin^2\alpha\,\varphi_k(x) - -\sin 2\alpha \sin\gamma\,\varphi_n(x)\varphi_k(x).$$

$$u^2(F_1) = \left(n + \frac{1}{2} + \sin^2\alpha - \frac{n+1}{2}\sin^2\gamma\sin^2 2\alpha\right)\cdot \cdot\left(n + \frac{1}{2} + \sin^2\alpha - \frac{n+1}{2}\cos^2\gamma\sin^2 2\alpha\right). \quad (4.5)$$

Чтобы понять как себя ведёт $u^2(F_1)$, рассмотрим вспомогательную функцию $p(\alpha) = (a - b\sin^2\gamma)(a - b\cos^2\gamma)$, где $a, b \ge 0$. Далее,

$$p(\alpha) = \left(a - b\sin^2\gamma\right)\left(a - b\cos^2\gamma\right) =$$

$$= a^2 - ab\left(\sin^2\gamma + b\cos^2\gamma\right) + \frac{b^2}{4}\sin^2 2\gamma =$$

$$= a^2 - ab + \frac{b^2}{4}\sin^2 2\gamma.$$

Теперь видно, что минимум (4.5) достигается при $\sin^2 2\gamma = 0$. В этом случае (4.5) совпадает с (2.7). Максимум же достигается при $\sin^2 2\gamma = 1$. При этом

$$u\left(F_1\right) = n + \frac{1}{2} + \sin^2\alpha - \frac{n+1}{4}\sin^2 2\alpha. \quad (4.6)$$

Легко видеть, что данная функция достигает минимума при $\sin^2\alpha = \frac{n}{2(n+1)}$, а максимума при $\sin^2\alpha = 1$. При этом

$$\min_{\alpha\in[0,2\pi]}\left(n + \frac{1}{2} + \sin^2\alpha - \frac{n+1}{4}\sin^2 2\alpha\right) =$$

$$= \frac{3}{4}(n+1) - \frac{1}{4(n+1)}.$$

3. $k = n - 1$. Нет никаких принципиальных отличий от предыдущего случая.

$$u^2\left(F_1\right) = \left(n + \frac{1}{2} + \cos^2\alpha - \frac{n+1}{2}\sin^2\gamma\sin^2 2\alpha\right)\cdot$$
$$\cdot\left(n + \frac{1}{2} + \cos^2\alpha - \frac{n+1}{2}\cos^2\gamma\sin^2 2\alpha\right). \quad (4.7)$$

4. $k = n + 2$.

$$\left|\hat{F}_1(x)\right|^2 = \cos^2\alpha\,\varphi_n(x) + \sin^2\alpha\,\varphi_k(x) -$$
$$- \sin 2\alpha\sin\gamma\,\varphi_n(x)\varphi_k(x).$$

$$u^2\left(F_1\right) = \left(n + \frac{1}{2} + 2\sin^2\alpha + \right.$$
$$\left. + \frac{\sqrt{(n+2)(n+1)}}{2}\sin\gamma\sin 2\alpha\right)\cdot$$
$$\cdot\left(n + \frac{1}{2} + 2\sin^2\alpha - \right.$$
$$\left. - \frac{\sqrt{(n+2)(n+1)}}{2}\sin\gamma\sin 2\alpha\right). \quad (4.8)$$

Очевидно, что максимум достигается при $\sin\gamma = 0$. В этом случае $u\left(F_1\right) = n + \frac{1}{2} + 2\sin^2\alpha$, то есть максимум не превосходит $n + \frac{5}{2}$. Минимум достигается при $\sin^2\gamma = 1$ и совпадает с (2.3).

5. $k = n - 2$. Нет никаких принципиальных отличий от предыдущего случая.

$$u^2\left(F_1\right) = \left(k + \frac{1}{2} + 2\cos^2\alpha + \right.$$
$$\left. + \frac{\sqrt{(k+2)(k+1)}}{2}\sin\gamma\sin 2\alpha\right)\cdot$$
$$\cdot\left(k + \frac{1}{2} + 2\cos^2\alpha - \right.$$
$$\left. - \frac{\sqrt{(k+2)(k+1)}}{2}\sin\gamma\sin 2\alpha\right). \quad (4.9)$$

Из формул (4.4)—(4.9) следует, что границы константы неопределённости при унитарном преобразовании и при умножении на матрицу поворота совпадают в соответствующих случаях.

5. СЛУЧАЙ ТРЁХ ФУНКЦИЙ ЭРМИТА

Поиск минимума константы неопределённости для линейной комбинации уже из трёх функций Эрмита вызывает некоторые технические сложности. Будем минимизировать константу неопределённости для линейной комбинации с вещественными коэфициентами

$$a_{n-i}\varphi_{n-i}(x) + a_n\varphi_n(x) + a_{n+j}\varphi_{n+j}(x), \quad (5.1)$$

где $a_{n-i}^2 + a_n^2 + a_{n+j}^2 = 1$, $i, j, n \in \mathbb{N}$, ni. Возможны пять различных случаев.

1) $i > 1$, $j > 1$. Этот случай не представляет большого интереса. Константа неопределённости по тем же причинам, что и в теореме 1, лежит на отрезке $\left[n - i + \frac{1}{2}, n + j + \frac{1}{2}\right]$.

В дальнейшем будем предполагать, $a_{n-i} = \sin\alpha\cos\beta$, $a_n = \sin\beta$, $a_{n+j} = \cos\alpha\cos\beta$, где $\alpha, \beta \in [0, \pi]$. Выражение (5.1) обозначим через $f_{i,j}(n, \alpha, \beta)$.

2) $i = 1$, $j = 1$. Интуитивно понятно, если три функции стоят рядом, то константа для этой линейной комбинации будет уменьшена максимально, так как в этом случае больше всего слагаемых, способных это совершить. Будем рассматривать функцию, зависящую от трех параметров:

$$u\left(f_{1,1}(n,\alpha,\beta)\right) = \left(n + \frac{1}{2} + \left(\cos 2\alpha + \frac{\sqrt{n^2+n}}{2}\right)\cos^2\beta - \right.$$
$$\left. - \frac{\sin^2 2\beta}{2}\left(n + \cos^2\alpha + \sqrt{n^2+n}\sin 2\alpha\right)\right)^{\frac{1}{2}}\cdot$$
$$\cdot\left(n + \frac{1}{2} + \left(\cos 2\alpha - \frac{\sqrt{n^2+n}}{2}\right)\cos^2\beta\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Её минимум можно локализовать с помощью графика. Найдём его с шагом 0.01 с помощью таблицы. Пользуясь таким нехитрым методом, получим следующие, почти оптимальные значения:

$$u\left(f_{1,1}(10,0.83,0.83)\right) = 4.46959,$$
$$u\left(f_{1,1}(20,0.81,0.83)\right) = 8.74,$$
$$u\left(f_{1,1}(100,0.84,0.83)\right) = 43.0236,$$
$$u\left(f_{1,1}(1000,0.79,0.83)\right) = 426.8.$$

Как мы видим, константа уменьшается примерно на 57 %, по сравнению со случаем двух переменных, где она в лучшем случае уменьшалась примерно на 29 %. То есть существует тенденция к её уменьшению. Есть все основания полагать, что это будет продолжаться с ростом числа функций.

3) $i = 2$, $j = 2$.

$$u\left(f_{2,2}(n,\alpha,\beta)\right) = \left[\left(n + \frac{1}{2} + 2\cos 2\alpha \cos^2\beta\right)^2 - \right.$$
$$\left. -\left(\frac{\sin^2 2\beta}{2}\left(\sqrt{(n+2)(n+1)}\cos\alpha + \sqrt{n(n-1)}\sin\alpha\right)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Действуя аналогично пункту 2, получим почти оптимальное значение:

$$u\left(f_{2,2}(100,0.81,0.81)\right) = 71.1237.$$

4) $i = 2$, $j = 1$.

$$u\left(f_{2,1}(n,\alpha,\beta)\right) = \left(n + \frac{1}{2} + \right.$$
$$+\left(\cos 2\alpha - 2\sin^2\alpha + \frac{\sqrt{n^2-n}}{2}\sin 2\alpha\right)\cos^2\beta -$$
$$\left. -\frac{(n+1)\cos^2\alpha\sin^2 2\beta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\left(n + \frac{1}{2} + \left(\cos 2\alpha - 2\sin^2\alpha - \frac{\sqrt{n^2-n}}{2}\sin 2\alpha\right)\cos^2\beta\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Почти оптимальное значение: $u\left(f_{2,1}(100,2.81,0.73)\right) = 68.0446$.

5) $i = 1$, $j = 2$.

$$u\left(f_{1,2}(n,\alpha,\beta)\right) = \left(n + \frac{1}{2} + \right.$$
$$+\left(2\cos 2\alpha - \sin^2\alpha + \frac{\sqrt{(n+2)(n+1)}}{2}\sin 2\alpha\right)\cos^2\beta -$$
$$\left. -\frac{n\sin^2\alpha\sin^2 2\beta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\left(n + \frac{1}{2} + \left(2\cos 2\alpha - \sin^2\alpha - \frac{\sqrt{(n+2)(n+1)}}{2}\sin 2\alpha\right)\cos^2\beta\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Почти оптимальное значение: $u\left(f_{1,2}(100,1.88,0.73)\right) = 67.3407$.

В заключение выпишем общую формулу константы неопределенности для линейной комбинации $\sum_{j=n_0}^{m-1} a_j\varphi_j(x)$ из m подряд идущих функций Эрмита, начиная с n_0:

$$u\left(\sum_{j=n_0}^{n_0+m-1} a_j\varphi_j(x)\right) = \left(n_0 + \frac{1}{2} + \sum_{j=n_0}^{n_0+m-1} a_j^2 j + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=n_0}^{n_0+m-3} a_j a_{j+2}\sqrt{(j+1)(j+2)} - 2\left(\sum_{j=n_0}^{n_0+m-2} a_j a_{j+1}\sqrt{j+1}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot$$
$$\cdot\left(n_0 + \frac{1}{2} + \sum_{j=n_0}^{n_0+m-1} a_j^2 j - \sum_{j=n_0}^{n_0+m-3} a_j a_{j+2}\sqrt{(j+1)(j+2)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нейман И.* Математические основы квантовой механики. — Новокузнецк: ИО НФМИ, 2000. — 368 с.

2. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. — Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. — 464 с.

3. *Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А.* Теория всплесков. — М.: Физматлит, 2005. — 616 с.

4. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. — М.: Гостехиздат, 1951. — Т. 1. — 538 с.

5. *Чуи Ч.* Введение в вейвлеты. — М.: Мир, 2001. — 412 с.

6. *Кострикин А. И., Манин Ю. И.* Линейная алгебра и геометрия. — М.: Наука, 1986. — 304 с.

Ушаков С. Н. — аспирант кафедры функционального анализа и операторных уравнений, Воронежский государственный университет

E-mail: ushakowww@yandex.ru

Тел.: 8-920-217-43-55

Ushakov S. N. — Post-graduate student of the Department of Mathematics, Chair of functional analysis and operation equations, Voronezh State University

E-mail: ushakowww@yandex.ru

Tel.: 8-920-217-43-55