УДК 517.955

# О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ В ПОЛОСЕ ДЛЯ ОБЩИХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С РАСТУЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

**Д. В. Туртин**

*Ивановский государственный университет*

Поступила в редакцию 20.05.11 г.

**Аннотация:** В полосе изучаются системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных с растущими коэффициентами. Установлены тихоновские классы единственности решения задачи Коши для таких систем уравнений. Доказательство основано на асимптотических формулах решений двойственной системы дифференциальных уравнений с параметром.
**Ключевые слова:** задача Коши, классы единственности, диаграмма Ньютона.

**Abstract:** We study systems of linear partial differential equations with increasing coefficients in a strip. We establish Tihonov's uniqueness classes of solutions the Cauchy problem for these systems equations. The proof is based on asymptotic formulas of solutions to the dual system differential equations with a parameter.
**Key words:** Cauchy problem, classes of uniqueness, Newton's diagram.

## ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о единственности решения задачи Коши для одного уравнения

$$P\left(t,\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t)=Q\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t), \qquad (1)$$

где $P\left(t,\frac{\partial}{\partial t}\right)=b\frac{\partial^m}{\partial t^m}+\sum_{l=0}^{m-1}p_l(t)\frac{\partial^l}{\partial t^l}$, $Q\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)=a\frac{\partial^n}{\partial x^n}+$ $+\sum_{k=0}^{n-1}q_k(x)\frac{\partial^k}{\partial x^k}$, $p_l(t)(l=\overline{0,m-1}),q_k(x)(k=\overline{0,n-1})$ — комплекснозначные функции, $a$ и $b$ — комплексные константы, ранее изучался в [3]. Особенность уравнения (1) состоит в том, что диаграмма Ньютона соответствующего ему характеристического уравнения состоит лишь из одного звена. В данной работе установлены классы единственности решения задачи Коши типа Тихонова для общих линейных систем с растущими коэффициентами. При этом доказательство существенно опирается на полученные нами ранее [4] асимптотические формулы для фундаментальной системы решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром.

## ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Рассмотрим задачу Коши для системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^m U(x,t)}{\partial t^m}=\sum_{j=0}^{m-1}P_j\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^j U(x,t)}{\partial t^j} \qquad (2)$$

$\big(U(x,t)$ — неизвестная $s\times s$ матрица, $P_j\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)=\sum_{k=0}^{n_j}\frac{\partial^k}{\partial x^k}(\cdot)P_{jk}(x)$ $(j=\overline{0,m-1})$, элементы матриц $P_{jk}(x)$ — комплекснозначные функции) с начальными условиями

$$\frac{\partial^j U(x,t)}{\partial t^j}\Big|_{t=0}=F_j(x)\left(j=\overline{0,m-1}\right) \qquad (3)$$

$\big(F_j(x)$ — матричные функции с непрерывными элементами) в полосе $\Pi_T=\{(x,t):-\infty<x<\infty,$ $0\le t<T\}$.

Под решением задачи Коши (2)—(3) будем понимать «классическое решение», то есть матричную функцию $U(x,t)$, элементы которой обладают всеми непрерывными производными, входящими в систему (2), и удовлетворяющую этой системе.

Прежде чем сформулировать основной результат, введем обозначения.

Пусть $P_j^*\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)=\sum_{k=0}^{n_j}P_{jk}^*(x)\frac{\partial^k}{\partial x^k}(\cdot)$ — сопряженное по Лагранжу к $P_j\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ дифференциальное выражение. Обозначим

$$\Delta(x,\lambda,\omega)=\sum_{i=0}^{m-1}P_{jk}^*(x)\lambda^i-\lambda^m E\equiv\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m_k}A_{kj}(x)\lambda^j\omega^k$$

$(n=\max\limits_{j=\overline{0,m-1}}n_j, m_k\ (k=\overline{0,n})$ — целые неотрицательные числа) — многочлен относительно $\lambda$ и $\omega$ с матричными коэффициентами $A_{kj}(x)$.

Под диаграммой Ньютона многочлена двух переменных $\lambda$ и $\omega$ будем понимать «верхнюю»

* © Туртин Д.В., 2012

часть ломаной Ньютона (см. [5]), определяющую наивысшие показатели асимптотических разложений корней этого многочлена по степеням $\lambda$ в окрестности точки $\lambda = \infty$.

Введем основные числовые характеристики диаграммы Ньютона многочлена $\Delta(x, \lambda, \omega)$, считая $A_{kj}(x)$ скалярными функциями.

Заметим, что $m_0 \equiv m \geq m_k$ $\left(k = \overline{1, n}\right)$. Обозначим $(k_l, m_{k_l})(l = 1, n)$ — координаты вершин диаграммы Ньютона, $(\alpha_{lj}, m_{\alpha_{lj}})$ $(j = 1, q_l, q_l = k_l - k_{l-1})$ — координаты точек, соответствующих некоторым мономам многочлена $\Delta(x, \lambda, \omega)$ и лежащих на $l$-ом звене диаграммы Ньютона этого многочлена, причем

$$\alpha_{l0} < \alpha_{l1} < \ldots < \alpha_{lq_l} \quad \left(\alpha_{lq_l} = k_l, k_0 = 0\right).$$

Пусть

$$\Gamma'(l) = \left\{\alpha_{lj} : j = \overline{0, q_l}\right\}\left(l = \overline{1, N}\right), \quad \cup_{l=1}^{N} \Gamma'(l) = \Gamma',$$
$$\Gamma'' = \{0, 1, \ldots, n\} \setminus \Gamma'.$$

Далее мы будем предполагать, что матричные коэффициенты $A_{kj}(x)$ многочлена $\Delta(x, \lambda, \omega)$ удовлетворяют условиям:

1) $A_{km_k}(x) \equiv A_{km_k}$ при $k \in \Gamma'$;

2) уравнения

$$\sum_{k \in \Gamma'(l)} A_{km_k} \beta^{k - k_{l-1}} = 0 \left(l = \overline{1, N}\right) \tag{4}$$

не имеют кратных корней и матрицы $A_{k_l m_{k_l}}$ $\left(l = \overline{1, N}\right)$ не вырождены.

Пусть $\gamma_i$ $\left(i = \overline{1, N}\right)$ — тангенсы острых углов между звеньями диаграммы Ньютона многочлена $\Delta(x, \lambda, \omega)$ и отрицательным направлением оси абсцисс. Причем $\gamma_1 < \ldots < \gamma_N$.

При $k_{l-1} \leq k \leq k_l$ $\left(l = \overline{1, N}\right)$ положим $d_k = m_{k_{l-1}} + \left(k_{l-1} - k\right)\gamma_l$.

Пусть $p_0$ — приведенный порядок системы (2) (см. [1]). Так как характеристический многочлен системы (2) и многочлен $det\left\{\Delta(x, \lambda, \omega)\right\}$ имеют одинаковые диаграммы Ньютона, а многочлены $det\left\{\Delta(x, \lambda, \omega)\right\}$ и $\Delta(x, \lambda, \omega)$ (со скалярными коэффициентами) имеют подобные диаграммыНьютона с коэффициентом подобия $s$, то, как следует из [2], $p_0 = \frac{1}{\gamma_1}$.

Обозначим $p_0'$ такое число, что $\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_0'} = 1$.

Сформулируем теорему единственности решения задачи Коши (2)—(3) в полосе $\Pi_T$.

ТЕОРЕМА. Пусть элементы матриц $P_{jk}(x)\left(k = \overline{0, n}, j = \overline{0, m_k}\right)$ системы (2) $(k+1)$-раз непрерывно дифференцируемые функции при $-\infty < x < \infty$, , а элементы матриц $A_{kj}(x)$ многочлена $\Delta(x, \lambda, \omega)$ удовлетворяют условиям 1)—2).

а) Пусть приведенный порядок системы (2) $p_0 > 1$, элементы $P_{qr}^{jk}(x)$ матриц $P_{jk}(x)$ уравнения (2) удовлетворяют оценкам

$$\left|D_x^i P_{qr}^{jk}(x)\right| \leq c_1 \cdot \exp\left\{\alpha_1 \left(|x| + 1\right)^{p_0'}\right\} \tag{5}$$

$\Big(k = \overline{0, n-1}, j = \overline{0, m-1}, q, r = \overline{1, s}, i = \overline{0, n-1}, \alpha_1 > 0,$ $c_1 > 0\Big)$, а элементы $a_{qr}^{kj}(x)$ матриц $A_{kj}(x)$ — оценкам

$$\int_0^x \left|D_\xi a_{qr}^{kj}(\xi)\right| d\xi = o(1)\left(|x| + 1\right)^{(d_k - j)p_0'}, \tag{6}$$

$k = \overline{0, n-1}, j = \overline{0, m_k - 1}$ при $k \in \Gamma'$, $j = \overline{0, m_k}$ при $k \in \Gamma''$, $q, r = \overline{1, s}$, $-\infty < x < \infty$, $o(1) \to 0$ при $x \to \infty$.

Тогда решение задачи Коши (2)—(3) единственно в классе функций, удовлетворяющих оценкам

$$\left\|\frac{\partial^{k+j} U(x,t)}{\partial x^k \partial t^j}\right\| \leq c_2 \exp\left\{\alpha_2 |x|^{p_0'}\right\} \tag{7}$$

$\left((x, t) \in \Pi_T, j = \overline{0, m-1}, k = \overline{0, n-1}, \alpha_2 > 0, c_2 > 0\right)$.

б) Если $p_0 \leq 1$, то решение задачи Коши (2)—(3) единственно в классе функций любого роста по переменной $x$ в полосе $\Pi_T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U(x, t)$ — решение уравнения (2), удовлетворяющее нулевому начальному условию (3) $\left(F_j(x) = 0, j = \overline{0, m-1}\right)$.

Полагая $U_j(x, t) = \frac{\partial^{j-1} U(x,t)}{\partial t^{j-1}}$ $\left(j = \overline{1, m}\right)$, получим, что $\bar{U}(x, t) = \left(U_1(x, t), \ldots, U_m(x, t)\right)^T$ удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial \bar{U}(x, t)}{\partial t} = P\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\bar{U}(x, t), \tag{8}$$

где $P\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — блочная матрица вида

$$P\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) =$$
$$= \begin{pmatrix} O & E & O & \ldots & O \\ O & O & E & \ldots & O \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_0\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) & P_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) & P_2\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) & \ldots & P_{m-1}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \end{pmatrix}$$

$(O, E$ — соответственно нулевая и единичная матрицы размерности $s \times s)$ и начальному условию

$$\bar{U}(x, 0) = O. \tag{9}$$

Рассмотрим первый случай, когда $p_0 > 1$. Наряду с системой (8) рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром

$$P^*\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)\bar{Y}=\lambda\bar{Y}, \tag{10}$$

где

$$P^*\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)=\begin{pmatrix} O & O & \dots & O & P_0^*\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right) \\ E & O & \dots & O & P_1^*\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & E & P_{m-1}^*\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)\end{pmatrix},$$

$\bar{Y}=\left(Y_1,\dots,Y_m\right)^T$ — матрица размерности $sm\times s$, причем последняя координата $Y_m$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{gathered}\sum_{j=0}^{m-1}P_j^*\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)\lambda^jY_m-\lambda^mY_m\equiv\\ \equiv\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m_k}A_{kj}(x)\lambda^j\frac{d^kY_m}{dx^k}=0.\end{gathered} \tag{11}$$

Уравнению (11) сопоставим характеристическое уравнение

$$det\left\{\Delta(x,\lambda,\omega)\right\}=0. \tag{12}$$

Пусть $\beta_{lj}\left(l=\overline{1,N},j=\overline{1,sq_l}\right)$ — корни уравнений (4).

Обозначим

$$G_\varphi=\left\{(x,\lambda):|x|\le\theta|\lambda|^{\frac{1}{p_0}},arg\lambda=\varphi,|\lambda|>a\right\},$$

где $\theta$ — некоторая положительная постоянная, которая будет выбрана позднее, $a>$ — достаточно велико, $\varphi$ удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered}\cos\left(arg\left(\beta_{lj}-\beta_{li}\right)+\gamma_l\varphi\right)\ne\\ \ne0,\cos\left(arg\beta_{lj}+\gamma_l\varphi\right)\ne0\end{gathered} \tag{13}$$

$\left(l=\overline{1,N};\ i,j=\overline{1,sq_l};\ i\ne j\right)$.

Известно [4], что при выполнении условий 1)—2) и оценок (5) матричное уравнение (11) имеет $n$ линейно независимых решений $Y_m^{lj}(x,\lambda)(l=\overline{1,N},j=\overline{1,sq_l})$, элементы которых имеют асимптотику

$$\begin{gathered}\frac{d^k}{dx^k}\left(\left(Y_m^{lj}(x,\lambda)\right)_{pr}\right)=\\ =\Psi_{ljk}^{pr}(x,\lambda)\exp\left\{\int_0^x\omega_{l,(j-1)s+p}(\tau,\lambda)d\tau\right\},\end{gathered} \tag{14}$$

$$\left(l=\overline{1,N},\ j=\overline{1,sq_l},\ k=\overline{0,n-1},\ p,r=\overline{1,s}\right),$$

где

$$\omega_{l,(j-1)s+p}(x,\lambda)=\beta_{l,(j-1)s+p}\lambda^{\gamma_l}\left(1+o(1)\right)- \tag{15}$$

корни характеристического уравнения (12), $o(1)$ — функция от $x$ и $\lambda$, такая, что $o(1)\to0$ при $\lambda\to\infty$, $(x,\lambda)\in G_\varphi$, $\Psi_{ljk}^{pr}(x,\lambda)$ — функции, удовлетворяющие оценке

$$\begin{gathered}\left|\Psi_{ljk}^{pr}(x,\lambda)\right|\le c_3|\lambda|^{\mu_{ik}},i=i(l,j)=\sum_{p=0}^{l-1}k_p+j,\\ \mu_{ik}=\sum_{t=2}^{i}\varepsilon_t+(k-i+1)\varepsilon_i\end{gathered} \tag{16}$$

(при $i=1$ сумма считается равной нулю), $\varepsilon_i=\gamma_l$ при $k_{l-1}+1\le i\le k_l(l=\overline{1,N}),c_3>0,(x,\lambda)\in$ $\in G_\varphi$.

Обозначим $Z(x,\lambda)$ — решение уравнения (11), удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{gathered}D_x^kZ(x,\lambda)|_{x=0}=O\left(k=\overline{0,n-2}\right),\\ D_x^{n-1}Z(x,\lambda)|_{x=0}=P_{0n_0}^{-1}.\end{gathered} \tag{17}$$

Отметим, что любое решение $Z(x,\lambda)$ уравнения (11) имеет вид

$$Z(x,\lambda)=\sum_{l=1}^{N}\sum_{j=1}^{q_l}Y_m^{lj}(x,\lambda)C_{lj}(\lambda), \tag{18}$$

где $C_{lj}(\lambda)$ — некоторые $s\times s$ матрицы.

Положим

$$\begin{gathered}Y_i^{lj}(x,\lambda)=\sum_{k=0}^{i-1}\lambda^{k-i}P_k^*\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)Y_m^{lj}(x,\lambda)\\ \left(i=\overline{1,m-1}\right),\end{gathered} \tag{19}$$

тогда $\left(Y_1^{lj},\dots,Y_m^{lj}\right)^T=\bar{Y}^{lj}$ — решение уравнения (10), а любое решение $\bar{Z}$ уравнения (10) можно записать в виде

$$\bar{Z}(x,\lambda)=\sum_{l=1}^{N}\sum_{j=1}^{q_l}\bar{Y}_m^{lj}(x,\lambda)C_{lj}(\lambda).$$

Из (13) и (15) следует, что при $(x,\lambda)\in G_\varphi$ имеет место соотношение

$$\begin{gathered}\operatorname{sgn}\left(\operatorname{Re}\omega_{lj}(x,\lambda)\right)=\rho_{lj}=\text{const}\ne0\\ \left(l=\overline{1,N},j=\overline{1,sq_l}\right).\end{gathered}$$

Обозначим

$$\begin{gathered}\Lambda_{lj}(\theta)=-\rho_{lj}\theta|\lambda|^{\frac{1}{p_0}}\left(l=\overline{1,N},j=\overline{1,sq_l}\right),\\ \bar{\Lambda}_{lj}(\theta)=\left(\Lambda_{l,(j-1)s+1},\dots,\Lambda_{l,js}\right)\left(l=\overline{1,N},j=\overline{1,q_l}\right),\end{gathered}$$

$\bar{o}$ — нулевой вектор длины $s$.

Для дальнейшего применим следующие обозначения: если $D(x)$ — некоторая квадратная функциональная матрица размерности $k\times k$, $D_j(x)$ — ее столбцы, $\bar{a}=\left(a_1,\dots,a_k\right)$, $\bar{b}=\left(b_1,\dots,b_k\right)$, то $D(\bar{a})=\left(D_1(a_1),\dots,D_k(a_k)\right),D(x)|_{\bar{a}}^{\bar{b}}=$ $=D(\bar{b})-D(\bar{a}),\int_{\bar{a}}^{\bar{b}}D(x)dx=\left(\int_{a_1}^{b_1}D_1(x)dx,\dots,\int_{a_k}^{b_k}D_k(x)dx\right)$.

Положим

$$\left\langle \bar{U}(x,t), \bar{Y}^{lj}(x,\lambda) \right\rangle = \sum_{k=1}^{m} U_k(x,t) Y_k^{lj}(x,\lambda),$$

$$L_{lj}(t,\lambda,\theta) = \int_{\bar{o}}^{\bar{\Lambda}_{lj}(\theta)} \left\langle \bar{U}(x,t), \bar{Y}^{lj}(x,\lambda) \right\rangle dx,$$

где $\bar{U}(x,t)$ — решение задачи Коши (8)—(9),

$$L(t,\lambda,\theta) = \sum_{l=1}^{N} \sum_{j=1}^{q_l} L_{lj}(t,\lambda,\theta) C_{lj}(\lambda).$$

Тогда, интегрируя по частям, получим

$$\frac{d}{dt} L_{lj}(t,\lambda,\theta) = \int_{\bar{o}}^{\bar{\Lambda}_{lj}(\theta)} \left\langle \frac{\partial \bar{U}(x,t)}{\partial t}, \bar{Y}^{lj}(x,\lambda) \right\rangle dx =$$

$$= \int_{\bar{o}}^{\bar{\Lambda}_{lj}(\theta)} \left\langle P\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \bar{U}(x,t), \bar{Y}^{lj}(x,\lambda) \right\rangle dx =$$

$$= \int_{\bar{o}}^{\bar{\Lambda}_{lj}(\theta)} \left\langle \bar{U}, P^*\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\bar{Y}^{lj}\right) \right\rangle dx + R_{lj}(x,t,\lambda) \Big|_{\bar{o}}^{\bar{\Lambda}_{lj}(\theta)} = \tag{20}$$

$$= \lambda \int_{\bar{o}}^{\bar{\Lambda}_{lj}(\theta)} \left\langle \bar{U}, \bar{Y}^{lj} \right\rangle dx + R_{lj}(x,t,\lambda) \Big|_{\bar{o}}^{\bar{\Lambda}_{lj}(\theta)} =$$

$$= \lambda L_{lj}(t,\lambda,\theta) + R_{lj}(x,t,\lambda) \Big|_{\bar{o}}^{\bar{\Lambda}_{lj}(\theta)},$$

где

$$R_{lj}(x,t,\lambda) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n_i - 1} \sum_{r=1}^{k-1} (-1)^{k-r-1} \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial^r U_i(x,t)}{\partial x^r} \frac{\partial^{k-r-1}}{\partial x^{k-r-1}} \left( P_{i-1,k}(x) Y_m^{lj}(x,\lambda) \right). \tag{21}$$

Из (20) следует, что

$$\frac{d}{dt} L(t,\lambda,\theta) = \lambda L(t,\lambda,\theta) + \sum_{l=1}^{N} \sum_{j=1}^{q_l} R_{lj}(x,t,\lambda) C_{lj}(\lambda) \Big|_{\bar{o}}^{\bar{\Lambda}_{lj}(\theta)}. \tag{22}$$

Учитывая (17), из (21) получим

$$\sum_{l=1}^{N} \sum_{j=1}^{q_l} R_{lj}(0,t,\lambda) C_{lj}(\lambda) = (-1)^{n-1} U(0,t),$$

поэтому (22) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} L(t,\lambda,\theta) = \lambda L(t,\lambda,\theta) - H(t,\lambda,\theta) + (-1)^{n-1} U(0,t), \tag{23}$$

где

$$H(t,\lambda,\theta) = \sum_{l=1}^{N} \sum_{j=1}^{q_l} R_{lj}\left(\bar{\Lambda}_{lj}(\theta), t, \lambda\right) C_{lj}(\lambda). \tag{24}$$

Так как $\bar{U}(x,t)$ удовлетворяет нулевому начальному условию (9), то

$$L(0,\lambda,\theta) = 0. \tag{25}$$

Из (23) и (25) имеем

$$L(t,\lambda,\theta) = \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)E} H(\tau,\lambda,\theta) d\tau + (-1)^{n-1} \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)E} U(0,\tau) d\tau. \tag{26}$$

Матричная функция $F(t,\lambda) = \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)E} U(0,\tau) d\tau$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt} X = \lambda X + U(0,t),$$

поэтому если мы покажем, что $F(t,\lambda) \equiv 0$, то и $U(0,t) \equiv 0$ при $0 \le t < T$.

Из (26) имеем

$$(-1)^{n-1} F(t,\lambda) = L(t,\lambda,\theta) - \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)E} H(\tau,\lambda,\theta) d\tau. \tag{27}$$

Оценим члены правой части равенства (27) при $|\lambda| \to \infty$ на луче $arg\lambda = \varphi$, где $\varphi$ — любое число из промежутка $[0; 2\pi)$, удовлетворяющее (14).

Сначала оценим $L(t,\lambda,\theta)$.

Для этого обозначим

$$\mu(\varphi) = \frac{1}{2} \min_{1 \le j \le sq_l, 1 \le l \le N} \left| \beta_{lj} \cos\left( arg\beta_{lj} + \gamma_l \varphi \right) \right|,$$

$$G_{\varphi,l,j} = \left\{ (x,\lambda) \in G_\varphi, sgnx = -\rho_{lj} \right\} \quad \left( l = \overline{1,N}, j = \overline{1,sq_l} \right).$$

Из (15) получаем, что при $(x,\lambda) \in G_{\varphi,l,j}$

$$Re \int_0^x \omega_{lj}(\xi,\lambda) d\xi \le -\mu(\varphi) |x| |\lambda|^{\gamma_l}. \tag{28}$$

Для удобства при дальнейшем оценивании разобьем $L_{lj}(t,\lambda,\theta)$ на два слагаемых:

$$L_{lj}(t,\lambda,\theta) = L_{lj}^1(t,\lambda,\theta) + L_{lj}^2(t,\lambda,\theta),$$

где

$$L_{lj}^1(t,\lambda,\theta) = \sum_{k=1}^{m-1} \int_{\bar{o}}^{\bar{\Lambda}_{lj}(\theta)} U_{k+1}(x,t) Y_k^{lj}(x,\lambda) dx,$$

$$L_{lj}^2(t,\lambda,\theta) = \sum_{i=1}^{m} P_{i-1}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \left[ U_i(x,t) \right] Y_m^{lj}(x,\lambda) dx.$$

Применяя оценки (6), (7), (14), (16) и (28), получим

$$\left\| L_{lj}^1(t,\lambda,\theta) \right\| \le \le c_5 |\lambda|^{\mu_{i(n-1)}} \int_0^{\theta|\lambda|^{\frac{1}{p_0'}}} \exp\left\{ \left[ \alpha\theta^{p_0'-1} - \mu(\varphi) \right] |\lambda|^{\gamma_1} x \right\} dx \tag{29}$$

$(l = \overline{1,N}, j = \overline{1,q_l}, i = i(l,j)$ (см. (16)).

Применяя оценки (5), (7), (14), (16) и (28), получим

$$\left\|L^2_{lj}(t,\lambda,\theta)\right\| \le \le c_6 \int_0^{\theta|\lambda|^{\frac{1}{p_0'}}} \exp\left\{\left[\alpha\theta^{p_0'-1} - \mu(\varphi)\right]|\lambda|^{\gamma_1} x\right\} dx \quad (30)$$

$\left(l = \overline{1,N}, j = \overline{1,q_l}\right)$.

Из (29) и (30) следует, что

$$\left\|L_{lj}(t,\lambda,\theta)\right\| \le \le c_7 |\lambda|^{\mu_{i(n-1)}} \int_0^{\theta|\lambda|^{\frac{1}{p_0'}}} \exp\left\{\left[\alpha\theta^{p_0'-1} - \mu(\varphi)\right]|\lambda|^{\gamma_1} x\right\} dx \quad (31)$$

$(l = \overline{1,N}, j = \overline{1,q_l}, i = i(l,j)$ (см. (16)).

Оценим поведение матриц $C_{lj}(\lambda)\left(l = \overline{1,N}, j = \overline{1,q_l}\right)$ вдоль луча $arg\lambda = \varphi$.

Для этого к равенству (18) присоединим еще $n-1$ равенств, получаемых из (18) последовательным дифференцированием по $x$. Полагая затем в этих равенствах $x = 0$ и учитывая (17), получим матричную систему относительно матриц $C_{lj}(\lambda)$, определитель которой есть вронскиан решений $Y^{lj}_m(0,\lambda)$, совпадающий с определителем матрицы $B(0,\lambda)Q(\lambda)$, где $B(x,\lambda)$ — матрица, размерности $sn \times sn$, преобразующая матрицу системы (11) к нормальной жордановой форме, а $Q(\lambda) = diag\left\{\lambda^{v_1},\ldots,\lambda^{v_n}\right\}$, $v_j = \sum_{k=2}^{j}\varepsilon_k - (j-1)\varepsilon_j \left(j = \overline{1,n}\right)$, $E$ — единичная матрица размерности $s \times s$.

Решая полученную выше систему относительно матриц $C_{lj}(\lambda)$ и учитывая [4] асимптотические формулы для блоков матрицы, обратной к матрице $B(x,\lambda)$:

$$\left(B^{-1}\right)_{ij} = M_{ij}\left(E + \Phi_{ij}(x,\lambda)\right)\lambda^{\sum_{k=j}^{i-1}\varepsilon_k - (i-1)\varepsilon_i}, \quad j \le i, i, j = \overline{1,n},$$

$$\left(B^{-1}\right)_{ij} = M_{ij}\left(E + \Phi_{ij}(x,\lambda)\right)\lambda^{-\sum_{k=i+1}^{j}\varepsilon_k - (i-1)\varepsilon_i}, \quad j > i, i, j = \overline{1,n},$$

где $M_{ij}$ — некоторые числовые матрицы размерности $s \times s$, $E$ — единичная матрица размерности $s \times s$, $\Phi_{ij}(x,\lambda)$ — функциональные матрицы размерности $s \times s$, элементы которых стремятся к нулю при $\lambda \to \infty, (x,\lambda) \in G_\varphi$, заключаем, что

$$\left\|C_{lj}(\lambda)\right\| \le c_8 |\lambda|^{-\sum_{t=2}^{n}\varepsilon_t}\left(l = \overline{1,N}, j = \overline{1,q_l}\right) \quad (32)$$

Так как $\mu_{i(n-1)} - \sum_{t=2}^{n}\varepsilon_t \le 0$, то из (31)—(32) при $\theta$, удовлетворяющем условию

$$\alpha\theta^{p_0'-1} < \frac{\mu(\varphi)}{2}, \quad (33)$$

имеем

$$\left\|L(t,\lambda,\theta)\right\| \to 0 \quad (34)$$

при $\lambda \to \infty, arg\lambda = \varphi$.

Оценим второй член правой части равенства (27).

Применяя (5), (7), (14), (15), (16), (19) и (28), из (24) получим (при выбранном $\theta$):

$$\left\|H(t,\lambda,\theta)\right\| \le c_9 \exp\left\{-\frac{\mu(\varphi)}{2}\theta|\lambda|\right\} (0 \le t < T). \quad (35)$$

Из (35) следует, что

$$\left\|\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)E} H(\tau,\lambda,\theta)d\tau\right\| \to 0. \quad (36)$$

при $\lambda \to \infty$, $arg\lambda = \varphi$, $0 \le t \le T(\varphi) = \frac{\mu(\varphi)}{2}\theta$.

На основании (34) и (36) имеем

$$F(t,\lambda) \to 0\left(\lambda \to \infty, arg\lambda = \varphi, 0 \le t \le T(\varphi)\right). \quad (37)$$

Так как $F(t,\lambda)$ — целая функция по $\lambda$ первого порядка, а условие (37) может не выполняться лишь для конечного числа лучей, то по теореме Фрагмена—Линделефа из (37) следует, что $F(t,\lambda) \equiv 0\left(0 \le t \le t_0\right)$, где $t_0$ зависит только от $\alpha$ (см. (33)). Поэтому, как мы уже замечали ранее, $U(0,t) \equiv 0\left(0 \le t \le t_0\right)$..

Отсюда получаем [3], что $U(0,t) \equiv 0$ при $(x,t) \in \Pi_T$.

Доказательство теоремы при $p_0 \le 1$ проводится так же, как и в предыдущем случае, с той лишь разницей, что оценки проводятся в областях

$$G'_\varphi = \left\{(x,\lambda) : |x| \le 1, arg\lambda = \varphi, |\lambda| > a\right\}$$

и потому оценка (7) не требуется (см. также [3]).

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. — М.: Физматлит, 1958. — 274 с.

2. *Золотарев Г. Н.* Нетривиальные решения задачи Коши с нулевыми начальными условиями // Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-та. — 1963. — Т. 31. — С. 29—36.

3. *Палюткин В. Г.* Классы единственности решения задачи Коши уравнений с переменными коэффициентами // Мат. заметки. — 1979. — Т. 26. — Вып. 6. — С. 835—844.

4. *Туртин Д. В.* Асимптотика решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром // Математика и ее приложения. Жур-

нал Ивановского математического общества. — 2006. — Вып. 1(3). — С. 67—80.

5. *Чеботарев Н. Г.* Теория алгебраических функций. — М.: Гостехиздат, 1948. — 396 с.

*Туртин Д. В. — старший преподаватель, кафедра вычислительной и прикладной математики, Ивановский государственный университет*

*E-mail: turtin@mail.ru*

*Тел.: 8-910-685-05-26*

*Turtin D. V. — Senior Lecturer, Chair of Calculus and Applied Mathematics, Ivanovo State University*

*E-mail: turtin@mail.ru*

*Tel.: 8-910-685-05-26*