УДК 517.988

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА ДЛЯ ГЛАДКО РАЗРЕШИМОГО НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ*

В. В. Смагин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 16.01.2012 г.

Аннотация. В гильбертовом пространстве задача Коши для абстрактного нелинейного параболического уравнения с монотонными операторами в условиях существования гладкого решения решается приближенно методом Галеркина. Получены энергетические оценки погрешностей приближенных решений, из которых следует сходимость приближенных решений к точному, а также для проекционных подпространств типа конечных элементов и скорость этой сходимости.
Ключевые слова: гильбертово пространство, метод Галеркина, нелинейное параболическое уравнение.

Abstract. In the Hilbert space under the conditions of existence of smooth solution the Cauchy problem for abstract nonlinear parabolic equation with monotone operators is resolved approximate by the Galerkin's method. There are calculated energy estimations of errors of the approximate solution, from which both convergence of the approximate solution to exact ones, and speed of this convergence for projective subspaces of finit elements type follow.
Key words: Hilbert space, Galerkin method, nonlinear parabolic equation.

ОПИСАНИЕ ИСХОДНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Пусть дана тройка вложенных вещественных сепарабельных гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$, где пространство V' — двойственное к V, а пространство H отождествляется со своим двойственным H'. Оба вложения являются плотными и непрерывными. Далее под выражение (z, v) понимается значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Если при этом $z \in H$, то выражение (z, v) совпадает со скалярным произведением в H [1].

Для почти всех $t \in [0, T]$, где $T < \infty$, определены операторы $A(t): V \to V'$ такие, что на $u, v \in V$ выполняется:

$$\big(A(t)u - A(t)v, u - v\big) \ge m\|u - v\|_V^2 \quad (m > 0); \quad (1)$$

$$\|A(t)u - A(t)v\|_{V'} \le M\|u - v\|_V. \quad (2)$$

Условие (1) означает, что операторы $A(t)$ сильно монотонные, а (2) — липшиц-непрерывные. Считаем также, что для функций $u(t) \in L_2(0, T; V)$ функция $A(t)u(t) \in L_2(0, T; V')$.

Получим оператор $A: X \to X'$, где пространства $X = L_2(0, T; V)$ и $X' = L_2(0, T; V')$, действующий по правилу $(Au)(t) = A(t)u(t)$, где $u \in L_2(0, T; V)$. Из определения оператора A и (1), (2) следует, что оператор $A: X \to X'$ сильно монотонный, липшиц-непрерывный и коэрцитивный (см. [2], [3]).

Рассмотрим задачу в X':

$$u' + Au = f, \qquad u(0) = u^0 \in H. \quad (3)$$

В (3) и далее производные понимаются в обобщенном смысле. Пусть функция $f \in X'$, а равенство (3) понимается в смысле пространства X', то есть для всех $v \in X$

$$\int_0^T \big(u'(t) + A(t)u(t), v(t)\big)\,dt = \int_0^T \big(f(t), v(t)\big)\,dt. \quad (4)$$

Из (4) следует, что для решения $u(t)$ задачи (3) почти всюду на $[0, T]$ выполняется равенство в смысле пространства V':

$$u'(t) + A(t)u(t) = f(t). \quad (5)$$

Обратим внимание, модельные нелинейные начально-краевые параболические задачи, сводящиеся к (3), приводятся, например, в [2].

Теорема 1. [2, с. 239]. *В сделанных выше предположениях задача (3) имеет единственное решение $u(t)$ такое, что $u \in X$ и $u' \in X'$.*

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 10-01-00276.

Заметим [2], что из условия $u \in X$ и $u' \in X'$ для функции $u(t)$ следует $u \in C\left([0,T], H\right)$, так что начальное условие $u(0) = u^0 \in H$ в (3) имеет смысл, и справедлива оценка

$$\max_{0\le t\le T}\left\|u(t)\right\|_H^2 \le K\int_0^T\left(\left\|u(t)\right\|_V^2 + \left\|u'(t)\right\|_{V'}^2\right)dt.$$

Лемма 1 [3]. *Для решения $u(t)$ задачи (3) при всех $t \in [0,T]$ выполняется оценка*

$$\left\|u(t)\right\|_H^2 + \int_0^t\left(\left\|u(s)\right\|_V^2 + \left\|u'(s)\right\|_{V'}^2\right)ds \le$$

$$\le C\left\{\left\|u^0\right\|_H^2 + \int_0^t\left\|A(s)\Theta\right\|_{V'}^2 ds + \int_0^t\left\|f(s)\right\|_{V'}^2 ds\right\}.$$

ПОСТАНОВКА ПРИБЛИЖЕННОЙ ЗАДАЧИ

Пусть V_h — конечномерное подпространство пространства V. Здесь параметр $h > 0$. Определим пространство V_h', задав на $u_h \in V_h$ двойственную норму $\left\|u_h\right\|_{V_h'} = \sup\left|\left(u_h, v_h\right)\right|$, где точная верхняя граница берется по всем $v_h \in V_h$ и $\left\|v_h\right\|_V = 1$. Очевидно, что $\left\|u_h\right\|_{V'_h} \le \left\|u_h\right\|_{V'}$. Обозначим через P_h ортогональный проектор в пространстве H на V_h. В [4] замечено, что оператор P_h допускает расширение по непрерывности до оператора $\bar{P}_h : V' \to V_h'$ и справедлива оценка

$$\left\|\bar{P}_h u\right\|_{V'_h} \le \left\|u\right\|_{V'} \quad (u \in V'). \tag{6}$$

Отметим также для $u \in V'$ и $v \in H$ важное соотношение

$$\left(\bar{P}_h u, v\right) = \left(u, P_h v\right), \tag{7}$$

которое получается соответствующим предельным переходом [5].

Задаче (3) поставим в соответствие приближенную в V_h задачу на $[0,T]$.

$$u_h'(t) + \bar{P}_h A(t)u_h(t) = \bar{P}_h f(t),\ u_h(0) = u_h^0, \tag{8}$$

где элемент $u_h^0 \in V_h$ считаем заданным. Решение $u_h(t)$ задачи (8) называется функция со значениями в V_h такая, что равенство (8) выполняется в смысле пространства $X'_h = L_2\left(0,T;V_h'\right)$.

Заметим, что уравнение (8) может в силу (7) записано в вариационной форме: найти функцию $u_h(t)$ со значениями в V_h такую, что для любых $v_h \in V_h$ почти всюду на $[0,T]$ выполняется

$$\left(u_h(t), v_h\right) + \left(A(t)u_h(t), v_h\right) = \left(f(t), v_h\right). \tag{9}$$

Таким образом, из (9) следует, что задача (8) сводится к задаче Коши для конечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Разрешимость этой задачи в соответствующих пространствах следует из теоремы 1 (см. [3]). Следовательно, задача (8) имеет единственное решение $u_h(t)$ такое, что $u_h \in C\left([0,T], H_h\right) \cap L_2\left(0,T;V_h\right)$ и $u'_h \in L_2\left(0,T;V_h'\right)$. Здесь через H_h и V_h обозначены множества V_h с нормами пространств H и V соответственно. Учитывая, что линейное пространство V_h конечномерно и в нем любые нормы эквивалентны, можно считать, что решение $u_h \in C\left([0,T], V_h\right)$ и $u_h' \in L_2\left(0,T;V_h\right)$. Решение $u_h(t)$ задачи (8) называется приближенным решением задачи (3), найденным по методу Галеркина.

Далее в работе рассматриваются вопросы сходимости в энергетической норме приближенных решений к точному решению. Предположим для этого, что задана последовательность $\left\{V_h\right\}$ произвольных конечномерных подпространств пространства V, которая является предельно плотной в V, то есть для любого $v \in V$ при $h \to 0$

$$\left\|\left(I - Q_h\right)v\right\|_V \to 0, \tag{10}$$

где Q_h — ортопроектор в пространстве V на V_h. Заметим [6], что такая последовательность $\left\{V_h\right\}$ предельно плотна также и в пространстве H, и в пространстве V'.

Вопросы сходимости метода Галеркина для задачи (3) изучались также в [2], где соответствующая сходимость приближенных решений установлена без указания скорости. Скорость сходимости была установлена в [3]. Однако кроме предельной полноты в V последовательности подпространств $\{V_h\}$ в [3] предполагается равномерная по $h > 0$ ограниченность $\left\|P_h\right\|_{V\to V}$. Для проекционных подпространств V_h, построенных методом конечных элементов, это означает равномерное разбиение области изменения пространственных переменных. В данной работе от условия равномерной ограниченности $\left\|P_h\right\|_{V\to V}$ удалось избавиться.

ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ И СХОДИМОСТЬ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ

Установим оценки погрешности приближенного решения для произвольного подпространства $V_h \subset V$.

Теорема 2. *Пусть для задачи (3) выполнены условия теоремы 1. Пусть $u(t)$ — решение задачи (3) такое, что $u' \in L_2(0,T;V)$. Пусть $u_h(t)$ — решение задачи (8). Тогда справедлива оценка*

$$\max_{0\le t\le T}\left\|Q_h u(t)-u_h(t)\right\|_H^2+\int_0^T\left\|u(t)-u_h(t)\right\|_V^2 dt\le$$
$$\le C\left(\left\|Q_h u^0-u_h^0\right\|_H^2+\int_0^T\left\|\left(Q_h-I\right)u(t)\right\|_V^2 dt+\right.\quad(11)$$
$$\left.+\int_0^T\left\|\left(Q_h-I\right)u'(t)\right\|_{V'}^2 dt\right).$$

Доказательство. К равенству (5), равносильному (3), применим оператор $\bar{P}_h$. Учитывая, что почти при всех $t\in[0,T]$ выполняется $u'(t)\in V$, получим

$$P_h u'(t)+\bar{P}_h A(t)u(t)=\bar{P}_h f(t).\qquad(12)$$

Запишем (12) в виде

$$Q_h u'(t)+\bar{P}_h A(t)Q_h u(t)=$$
$$=\bar{P}_h f(t)+\left(Q_h-P_h\right)u'(t)+\qquad(13)$$
$$\bar{P}_h A(t)Q_h u(t)-\bar{P}_h A(t)u(t).$$

Из полученного равенства (13) вычтем (8).

$$\left[Q_h u(t)-u_h(t)\right]'+\left[\bar{P}_h A(t)Q_h u(t)-\bar{P}_h A(t)u_h(t)\right]=$$
$$=\left(Q_h-P_h\right)u'(t)+\left[\bar{P}_h A(t)Q_h u(t)-\bar{P}_h A(t)u(t)\right].\qquad(14)$$

Равенство (14) умножим скалярно в H на $Q_h u(t)-u_h(t)$. Учитывая (7), получим

$$\frac{d}{dt}\left\|Q_h u(t)-u_h(t)\right\|_H^2+$$
$$+2\left(A(t)Q_h u(t)-A(t)u_h(t),Q_h u(t)-u_h(t)\right)=\qquad(15)$$
$$=2\left((Q_h-I)u'(t),Q_h u(t)-u_h(t)\right)+$$
$$+2\left(A(t)Q_h u(t)-A(t)u(t),Q_h u(t)-u_h(t)\right).$$

Левую часть равенства (15), учитывая (1), оцениваем снизу.

$$2\left(A(t)Q_h u(t)-A(t)u_h(t),Q_h u(t)-u_h(t)\right)\ge$$
$$\ge 2m\left\|Q_h u(t)-u_h(t)\right\|_V^2.$$

Слагаемые в правой части (15) оцениваем сверху с произвольным $\varepsilon>0$.

$$2\left((Q_h-I)u'(t),Q_h u(t)-u_h(t)\right)\le$$
$$\le 2\left\|(Q_h-I)u'(t)\right\|_{V'}\left\|Q_h u(t)-u_h(t)\right\|_V\le$$
$$\le\varepsilon^{-1}\left\|(Q_h-I)u'(t)\right\|_{V'}^2+\varepsilon\left\|Q_h u(t)-u_h(t)\right\|_V^2.$$

Аналогично, с использованием (2), оцениваем слагаемое

$$2\left(A(t)Q_h u(t)-A(t)u(t),Q_h u(t)-u_h(t)\right)\le$$
$$\le 2\left\|A(t)Q_h u(t)-A(t)u(t)\right\|_{V'}\left\|Q_h u(t)-u_h(t)\right\|_V\le$$
$$\le M^2\varepsilon^{-1}\left\|\left(Q_h-I\right)u(t)\right\|_V^2+\varepsilon\left\|Q_h u(t)-u_h(t)\right\|_V^2.$$

Положим теперь $\varepsilon=m/2$. Тогда из (15) следует оценка

$$\frac{d}{dt}\left\|Q_h u(t)-u_h(t)\right\|_H^2+m\left\|Q_h u(t)-u_h(t)\right\|_V^2\le$$
$$\le 2m^{-1}\left\|\left(Q_h-I\right)u'(t)\right\|_{V'}^2+$$
$$+2M^2m^{-1}\left\|\left(Q_h-I\right)u(t)\right\|_V^2.$$

Последнюю оценку интегрируем от 0 до $t\in(0,T]$.

$$\left\|Q_h u(t)-u_h(t)\right\|_H^2+m\int_0^t\left\|Q_h u(s)-u_h(s)\right\|_V^2 ds\le$$
$$\le\left\|Q_h u^0-u_h^0\right\|_H^2+\frac{2M^2}{m}\int_0^t\left\|\left(Q_h-I\right)u(s)\right\|_V^2 ds+$$
$$+\frac{2}{m}\int_0^t\left\|\left(Q_h-I\right)u'(s)\right\|_{V'}^2 ds.$$

Отсюда легко получается оценка (11). □

Следствие 1. *В условиях теоремы 2 выполняется оценка*

$$\max_{0\le t\le T}\left\|u(t)-u_h(t)\right\|_H^2\le C\left(\left\|Q_h u^0-u_h^0\right\|_H^2+\right.$$
$$+\max_{0\le t\le T}\left\|\left(Q_h-I\right)u(t)\right\|_H^2+\int_0^T\left\|\left(Q_h-I\right)u(t)\right\|_V^2 dt+\qquad(16)$$
$$\left.+\int_0^T\left\|\left(Q_h-I\right)u'(t)\right\|_{V'}^2 dt\right).$$

Покажем теперь, как из установленных оценок (11) и (16) получается сходимость приближенных решений к точному.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Предположим $\{V_h\}$ — предельно плотная в пространстве V последовательность конечномерных подпространств, то есть выполнено условие (10). Пусть $\left\|Q_h u^0-u_h^0\right\|_H\to 0$ при $h\to 0$. Тогда при $h\to 0$*

$$\max_{0\le t\le T}\left\|u(t)-u_h(t)\right\|_H^2+\int_0^T\left\|u(t)-u_h(t)\right\|_V^2 dt\to 0.\qquad(17)$$

Доказательство. Утверждение (17) следует из оценок (11) и (16), в которых следует установить стремление к нулю при $h\to 0$ соответствующих слагаемых в правых частях. Итак, учитывая непрерывное вложение $V\subset H$, получим

$$\max_{0\le t\le T}\left\|\left(Q_h-I\right)u(t)\right\|_H^2\le C\max_{0\le t\le T}\left\|\left(Q_h-I\right)u(t)\right\|_V^2.\qquad(18)$$

стремление к нулю правой части в (18) следует из того, что решение $u\in C\left([0,T],V\right)$. А на компактном множестве значений $\{u(t)\}\subset V$ из сильной сходимости операторов Q_n к I следует равномерная сходимость. Стремление к нулю выражения $\int_0^T\left\|\left(Q_h-I\right)u(s)\right\|_V^2 ds$ следует из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Заметим, наконец, что в силу непрерывного вложения $V \subset H \subset V'$ выполняется оценка

$$\int_0^T \left\|\left(Q_h - I\right) u'(t)\right\|_{V'}^2 dt \le C\int_0^T \left\|\left(Q_h - I\right) u'(t)\right\|_V^2 dt,$$

в которой правая часть стремится к нулю также по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. □

Из оценок (11) и (16), если известны аппроксимационные свойства подпространств V_h, можно получить и порядки скорости сходимости. Для этого предположим существование гильбертова пространства E такого, что $E \subset V$ и пространство V совпадает с интерполяционным пространством $[E, H]_{1/2}$ (см. [7]). Например, если параболическое уравнение в области пространственных переменных Ω определено дифференциальным оператором второго порядка и краевым условием Дирихле, то считаем $H = L_2(\Omega)$, $V = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $E = W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Если же на границе области Ω задается условие Неймана, то полагаем $H = L_2(\Omega)$, $V = W_2^1(\Omega)$, и $E = W_2^2(\Omega)$.

Относительно подпространств V_h далее вместо (10) предположим выполнение более сильного аппроксимационного условия

$$\left\|\left(I - Q_h\right) v\right\|_V \le r_1 h \left\|v\right\|_E \quad (v \in E), \tag{19}$$

где $r_1 > 0$ и не зависит от $h > 0$ и $v \in V$. Свойство (19) является типичным для проекционных подпространств типа конечных элементов (см. [8]). Например, для параболического уравнения второго порядка, одномерного по пространственным переменным, в качестве V_h можно взять подпространство кусочно-линейных функций.

Из (19) для $v \in V$ получается [9] оценка (аналог леммы Обена—Нитше)

$$\left\|\left(I - Q_h\right) v\right\|_H \le r_2 h \left\|\left(I - Q_h\right) v\right\|_V, \tag{20}$$

где $r_2 > 0$ и не зависит от $h > 0$ и $v \in V$.

Предположим теперь, что выполнены условия теоремы 2 и решение $u(t)$ задачи (3) такое, что $u \in L_2(0, T; E)$. Тогда из (11), (19) и (20) получим

$$\begin{gathered}\int_0^T \left\|u(t) - u_h(t)\right\|_V^2 dt \le \\ \le C\left\{\left\|Q_h u^0 - u_h^0\right\|_H^2 + h^2 \int_0^T \left(\left\|u(t)\right\|_E^2 + \left\|u'(t)\right\|_V^2\right) dt\right\}.\end{gathered} \tag{21}$$

Из оценок (16), (19) и (20) следует оценка

$$\begin{gathered}\max_{0 \le t \le T} \left\|u(t) - u_h(t)\right\|_H^2 \le C\left\{\left\|Q_h u^0 - u_h^0\right\|_H^2 + \right. \\ \left. + h^2 \left[\max_{0 \le t \le T} \left\|u(t)\right\|_V^2 + \int_0^T \left(\left\|u(t)\right\|_E^2 + \left\|u'(t)\right\|_V^2\right) dt\right]\right\}.\end{gathered} \tag{22}$$

Замечание. Начальную аппроксимацию $u_h^0 \in V_h$, в частности, можно положить $u_h^0 = Q_h u^0$. Тогда в (21) и (22) слагаемое $\left\|Q_h u^0 - u_h^0\right\|_H = 0$. Можно также выбирать $u_h^0 = P_h u^0$. В этом случае получим, учитывая (20),

$$\begin{gathered}\left\|Q_h u^0 - u_h^0\right\|_H = \left\|Q_h u^0 - P_h u^0\right\|_H \le \\ \le \left\|(Q_h - I) u^0\right\|_H \le r_2 h \left\|u^0\right\|_V.\end{gathered} \tag{23}$$

Полученная оценка (23) позволяет в случае $u_h^0 = P_h u^0$ оценки (21) и (22) записать в виде

$$\begin{gathered}\max_{0 \le t \le T} \left\|u(t) - u_h(t)\right\|_H^2 + \int_0^T \left\|u(t) - u_h(t)\right\|_V^2 dt \le \\ Ch^2 \left\{\max_{0 \le t \le T} \left\|u(t)\right\|_V^2 + \int_0^T \left(\left\|u(t)\right\|_E^2 + \left\|u'(t)\right\|_V^2\right) dt\right\}.\end{gathered}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Обэн Ж.-П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач / Ж.-П. Обэн. — М.: Мир, 1977. — 384 с.
2. *Гаевский Х.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас. — М.: Мир, 1978. — 336 с.
3. *Смагин В. В.* О скорости сходимости метода Галеркина для нелинейного параболического уравнения / В.В. Смагин // Вестник Воронежского гос. ун-та. Серия: физика, математика. — 2009. — № 2. — С. 121—125.
4. *Вайникко Г. М.* О сходимости и быстроте сходимости метода Галеркина для абстрактных эволюционных уравнений / Г. М. Вайникко, П. Э. Оя // Дифференц. уравнения. — 1975. — Т. 11. — № 7. — С. 1269—1277.
5. *Смагин В. В.* Оценки скорости сходимости проекционного и проекционно-разностного методов для слабо разрешимых параболических уравнений / В. В. Смагин // Математ. сборник. — 1997. — Т. 188. — № 3. — С. 143—160.
6. *Смагин В. В.* Сходимость проекционно-разностного метода для квазилинейных параболических уравнений / В. В.Смагин, Д. С. Сотников // Вестник Воронежского гос. ун-та. Серия: физика, математика. — 2006. — № 1. — С. 193—198.
7. *Лионс Ж.-Л.* Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. — М.: Мир, 1971. — 372 с.
8. *Марчук Г. И.* Введение в проекционно-сеточные методы / Г. И. Марчук, В. И. Агошков. — М.: Наука, 1981. — 416 с.

9. *Смагин В. В.* Проекционно-разностные методы приближенного решения параболических уравнений с несимметричными операторами / В. В. Смагин // Дифференц. ур-ния. — 2001. — Т. 37. — № 1. — С. 115—123.

Смагин В. В. — доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа и операторных уравнений, Воронежский государственный университет
E-mail: smagin@math.vsu.ru
Тел.: 220-87-71

Smagin V. V. — Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor of the Department of functional analysis and operation equations, Voronezh State University
E-mail: smagin@math.vsu.ru
Tel.: 220-87-71