УДК 517.9

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СТАЦИОНАРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛА В ОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОСТИ С ТРЕЩИНОЙ

А. С. Рябенко

Воронежский государственный университет

Поступило в редакцию 03.02.12.

Аннотация. В работе изучается краевая задача, моделирующая распределение тепла в однородной плоскости с трещиной $l = [-1;1]\times\{0\}$. Построено явное решение изучаемой задачи, а также выписаны явные представления сингулярных членов асимптотического разложения производных первого порядка этого решения в окрестности концов трещины l.
Ключевые слова: трещина, тепловой поток, сингулярность, асимптотики.

Annotation. In this work boundary value problem modeling heat transfer in a homogeneous plane with a crack $l = [-1;1]\times\{0\}$ are studied. The solution of the problem is constructed explicitly and explicit representations of singular terms of asymptotic expansions of the first order at the vicinity of the crack tips l have been obtained.
Key words: crack, heat flow, singularity, asymptotics.

ВВЕДЕНИЕ

В механике разрушений большой интерес представляет построение моделей, описывающих изменение физических характеристик материала с трещиной, а также последующий качественный анализ решений соответствующих моделей. При исследовании решений модельных задач, описывающих физические характеристики материалов с трещиной, особый интерес представляет качественный анализ решений в окрестности трещины, так как именно эта часть материала наиболее подвержена разрушениям [1].

Исследованию решений модельных задач, описывающих физические характеристики материала с трещиной, посвящено большое количество работ. Так, в статье [2] исследовалось взаимодействие в функционально-градиентном/однородном двухкомпонентном материале под действием антиплоского сдвига; в статье [3] исследовалось взаимодействие магистральной трещины с микротрещинами; в статье [4] изучалось стационарное распределение тепла в плоскости с трещиной в случае, когда коэффициент внутренней теплопроводности задается экспоненциальной функцией. Также в работе [4] содержится краткое описание результатов исследований, проведенных в статьях [5]—[16], в этих же статьях содержится большое количество ссылок на работы по данной тематике.

В работе [4] была предложена математическая модель для описания стационарного распределения тепла в плоскости с трещиной, в случае когда коэффициент внутренней теплопроводности имеет вид $G(x_2) = G_0 e^{kx_2}$, где $G_0 \equiv const \neq 0$, $k \equiv const \neq 0$. Предложенная в работе [4] модель имеет вид

$$\frac{\partial^2 U(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U(x_1,x_2)}{\partial x_2^2} + k\frac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 0,$$

$$x \in \mathbb{R}^2 \setminus [-1;1]\times\{0\},$$

$$U(x_1,+0) - U(x_1,-0) = q_0(x_1);$$

$$\frac{\partial U(x_1,+0)}{\partial x_2} + \frac{k}{2}U(x_1,+0) - \frac{\partial U(x_1,-0)}{\partial x_2} -$$

$$-\frac{k}{2}U(x_1,-0) = q_1(x_1);\ x_1 \in (-1;\ 1).$$

Также в работе [4] обсуждался вопрос выбора краевых условий для исследуемой задачи, было построено явное решение задачи, а при наличии условий $q_0(\pm 1) = q_1(\pm 1) = 0$ было выписано асимптотическое представление для $\dfrac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_2}$ (в явном виде был выделен компонент из представления $\dfrac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_2}$, который стремится к бесконечности при приближении к концам трещины). В работе [17] были получены асимптотические представления для тепловых потоков решения задачи, рассмотренной в работе [4], в случае когда $q_0'(\pm 1) = 0$.

В данной статье исследуется задача, моделирующая стационарное распределение тепла в плоскости с трещиной при постоянном коэффициенте внутренней теплопроводности. Изучение рассмотренной задачи проводилось в несколько этапов: сведение исходной задачи к обобщенной задачи Коши и построение решения получившейся обобщенной задачи Коши; доказательство того, что построенное решение обобщенной задачи Коши является решением рассматриваемой задачи; выделение в представлении производных первого порядка решения рассматриваемой задачи компонентов, которые быстрее всего стремятся к бесконечности при приближении к концам трещины (получение асимптотического представления для тепловых потоков).

Для изучаемой в статье задачи было построено явное представление решения. Основным результатом работы является построение асимптотических представлений тепловых потоков в окрестности концов трещины. При этом получилось, что главные члены в асимптотическом представлении тепловых потоков рассматриваемой задачи совпадают с главными членами в асимптотическом представлении тепловых потоков задачи, рассмотренной в статьях [4] и [17]. Из полученных в статье асимптотических представлений тепловых потоков в окрестности концов трещины следует, что скорость стремления тепловых потоков к бесконечности зависит от способа приближения к концам трещины.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $l = [-1;1] \times \{0\}$.

Рассмотрим задачу

$$\Delta v(x_1, x_2) = 0,\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / l, \tag{1}$$

$$v(x_1, +0) - v(x_1, -0) = q_0(x_1), \tag{2}$$

$$\frac{\partial v(x_1, +0)}{\partial x_2} - \frac{\partial v(x_1, -0)}{\partial x_2} = q_1(x_1), \tag{3}$$

где $x_1 \in (-1;1)$.

Определение. Решением задачи (1)-(3) назовем функцию $v(x_1, x_2)$, принадлежащую $C^2\left(\mathbb{R}^2 / l\right)$ и удовлетворяющую уравнению (1) в области $\mathbb{R}^2 / l$, для которой в смысле главного значения при x_1, принадлежащем $\left(-1;1\right)$, выполнены граничные условия (2), (3), и такую, что функции $v(x_1, x_2)$, $x_2 \dfrac{\partial v(x_1, x_2)}{\partial x_2}$ и $\dfrac{\partial v(x_1, x_2)}{\partial x_2} - \dfrac{\partial v(x_1, -x_2)}{\partial x_2}$ ограничены в окрестности трещины l.

Определение. Пусть $q(x_1)$ принадлежит пространству $C\left(\left[-1;1\right]\right)$. Через $q(x_1)\delta_{[-1;1]}(x_1, x_2)$ будем обозначать обобщенную функцию из $D'\left(\mathbb{R}^2\right)$, действующую по следующему правилу: для любой функции $\varphi(x_1, x_2)$, принадлежащей пространству $D\left(\mathbb{R}^2\right)$,

$$\left(q(x_1)\delta_{[-1;1]}(x_1, x_2), \varphi(x_1, x_2)\right) = \int_{-1}^{1} q(\sigma_1)\varphi(\sigma_1, 0)d\sigma_1 .$$

Замечание 1. В дальнейшем будем предполагать, что функции $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ принадлежат пространству $C^3\left(\left[-1;1\right]\right)$.

СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ (1)—(3) К ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ КОШИ. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ

Теорема 1. Решение задачи (1)—(3) является решением следующей обобщенной задачи:

$$\Delta v(x_1, x_2) = q_1(x_1)\delta_{[-1;1]}(x_1, x_2) + \\ + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(q_0(x_1)\delta_{[-1;1]}(x_1, x_2)\right).$$

Доказательство. Пусть функция $v(x_1, x_2)$ — решение задачи (1)—(3). Поскольку функция $v(x_1, x_2)$ локально интегрируемая, то $v(x_1, x_2)$ принадлежит пространству $D'\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Пусть $\Pi^\varepsilon = [-1-\delta; 1+\delta] \times [-\varepsilon; \varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $\partial\Pi^\varepsilon$ — граница Π^ε. Для $\partial\Pi^\varepsilon$ справедливо представление $\partial\Pi^\varepsilon = \Pi_1^\varepsilon \cup \Pi_2^\varepsilon \cup \cup \Pi_3^\varepsilon \cup \Pi_4^\varepsilon$, где $\Pi_1^\varepsilon = \left\{1+\delta\right\} \times [-\varepsilon; \varepsilon]$, $\Pi_2^\varepsilon = [-1-\delta; 1+\delta] \times \left\{\varepsilon\right\}$, $\Pi_3^\varepsilon = \left\{-1-\delta\right\} \times [-\varepsilon; \varepsilon]$, $\Pi_4^\varepsilon = [-1-\delta; 1+\delta] \times \left\{-\varepsilon\right\}$.

Определим, как выглядит частная производная второго порядка по x_1 от функции $v(x_1, x_2)$ в смысле $D'\left(\mathbb{R}^2\right)$. Пусть функция $\varphi(x_1, x_2)$ принадлежит пространству $D\left(\mathbb{R}^2\right)$, тогда

$$\left(\frac{\partial^2 v(x_1, x_2)}{\partial x_1^2}, \varphi(x_1, x_2)\right) = \left(v(x_1, x_2), \frac{\partial^2 \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_1^2}\right) = \\ = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^2/\Pi^\varepsilon} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} v dx_1 dx_2. \tag{4}$$

Применив два раза интегрирование по частям в области $\mathbb{R}^2 / \Pi^\varepsilon$, получаем, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2/\Pi^\varepsilon} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} v dx_1 dx_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^2/\Pi^\varepsilon} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \varphi dx_1 dx_2 + \int\limits_{\Pi_1^\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial x_1} \varphi dl - $$
$$ - \int\limits_{\Pi_3^\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial x_1} \varphi dl - \int\limits_{\Pi_1^\varepsilon} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dl + \int\limits_{\Pi_3^\varepsilon} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dl.$$

Поскольку $v(x_1,x_2)$ и $\dfrac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_1}$ ограничены на Π_1^ε и Π_3^ε, то из (4) и последнего равенства получаем, что

$$\left(\frac{\partial^2 v(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}, \varphi(x_1,x_2)\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^2/\Pi^\varepsilon} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \varphi dx_1 dx_2. \quad (5)$$

Определим, как выглядит частная производная второго порядка по x_2 от функции $v(x_1,x_2)$ в смысле $D'\left(\mathbb{R}^2\right)$. Пусть функция $\varphi(x_1,x_2)$ принадлежит пространству $D\left(\mathbb{R}^2\right)$, тогда

$$\left(\frac{\partial^2 v(x_1,x_2)}{\partial x_2^2}, \varphi(x_1,x_2)\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} v \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} dx_1 dx_2 = $$
$$ = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^2/\Pi^\varepsilon} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} v dx_1 dx_2. \quad (6)$$

Применив два раза интегрирование по частям в области $\mathbb{R}^2 / \Pi^\varepsilon$, получаем, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2/\Pi^\varepsilon} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} v dx_1 dx_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^2/\Pi^\varepsilon} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \varphi dx_1 dx_2 + $$
$$ + \int\limits_{\Pi_2^\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial x_2} \varphi dl - \int\limits_{\Pi_4^\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial x_2} \varphi dl - \int\limits_{\Pi_2^\varepsilon} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dl + \int\limits_{\Pi_4^\varepsilon} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dl. \quad (7)$$

$$\int\limits_{\Pi_2^\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial x_2} \varphi dl - \int\limits_{\Pi_4^\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial x_2} \varphi dl = \int\limits_{-1-\delta}^{1+\delta} \frac{\partial v(\sigma_1,\varepsilon)}{\partial x_2} \varphi(\sigma_1,\varepsilon) d\sigma_1 - $$
$$ - \int\limits_{-1-\delta}^{1+\delta} \frac{\partial v(\sigma_1,-\varepsilon)}{\partial x_2} \varphi(\sigma_1,-\varepsilon) d\sigma_1 = $$
$$ = \int\limits_{-1-\delta}^{1+\delta} \frac{\partial v(\sigma_1,\varepsilon)}{\partial x_2} \varphi(\sigma_1,\varepsilon) - \frac{\partial v(\sigma_1,-\varepsilon)}{\partial x_2} \varphi(\sigma_1,-\varepsilon) d\sigma_1.$$

Применив теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Pi_2^\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial x_2} \varphi dl - \int\limits_{\Pi_4^\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial x_2} \varphi dl = $$
$$ = \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{\partial v(\sigma_1,+0)}{\partial x_2} - \frac{\partial v(\sigma_1,-0)}{\partial x_2} \right) \varphi(\sigma_1,0) d\sigma_1 = \quad (8)$$
$$ = \int\limits_{-1}^{1} q_1(\sigma_1)\varphi(\sigma_1,0) d\sigma_1.$$

Аналогичным образом получаем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} - \int\limits_{\Pi_2^\varepsilon} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dl + \int\limits_{\Pi_4^\varepsilon} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dl = $$
$$ = -\int\limits_{-1}^{1} q_0(\sigma_1) \frac{\partial \varphi(\sigma_1,0)}{\partial x_2} d\sigma_1. \quad (9)$$

Из (6), (7), (8) и (9) получаем, что

$$\left(\frac{\partial^2 v(x_1,x_2)}{\partial x_2^2}, \varphi(x_1,x_2)\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^2/\Pi^\varepsilon} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \varphi dx_1 dx_2 + $$
$$ + \int\limits_{-1}^{1} q_1(\sigma_1)\varphi(\sigma_1,0) d\sigma_1 - \int\limits_{-1}^{1} q_0(\sigma_1) \frac{\partial \varphi(\sigma_1,0)}{\partial x_2} d\sigma_1. \quad (10)$$

Из равенств (5) и (10) следует, что

$$\left(\Delta v(x_1,x_2), \varphi(x_1,x_2)\right) = $$
$$ = \int\limits_{-1}^{1} q_1(\sigma_1)\varphi(\sigma_1,0) d\sigma_1 - \int\limits_{-1}^{1} q_0(\sigma_1) \frac{\partial \varphi(\sigma_1,0)}{\partial x_2} d\sigma_1,$$

то есть

$$\Delta v(x_1,x_2) = q_1(x_1)\delta_{[-1;1]}(x_1,x_2) + $$
$$ + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(q_0(x_1)\delta_{[-1;1]}(x_1,x_2)\right). \quad (11)$$

Замечание 2. Фундаментальным решение оператора Δ в $\mathbb{R}^2$ является функция $\dfrac{1}{2\pi}\ln|x|$ (см. [18]).

Замечание 3. Обобщенная функция $q(x_1)\delta_{[-1;1]}(x_1,x_2)$ финитна, и для нее $\operatorname{supp} q(x_1)\delta_{[-1;1]}(x_1,x_2) \subset l$ (см. [19]).

Теорема 2. Решение задачи (11) представимо в виде

$$v(x_1,x_2) = v_0(x_1,x_2) + v_1(x_1,x_2), \quad (12)$$

где функция $v_0(x_1,x_2)$ — стационарный тепловой потенциал двойного слоя:

$$v_0(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-1}^{1} \frac{q_0(\sigma_1)x_2}{(x_1-\sigma_1)^2 + x_2^2} d\sigma_1,$$

а функция $v_1(x_1,x_2)$ — стационарный тепловой потенциал простого слоя:

$$v_1(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{-1}^{1} q_1(\sigma_1) \ln\left[(x_1-\sigma_1)^2 + x_2^2\right] d\sigma_1.$$

Доказательство. Решение задачи (11) представимо в виде

$$v(x_1,x_2) = v_0(x_1,x_2) + v_1(x_1,x_2),$$

где функция $v_0(x_1,x_2) = \dfrac{1}{2\pi}\ln|x| * \dfrac{\partial}{\partial x_2} \times \left(q_0(x_1)\delta_{[-1;1]}(x_1,x_2)\right)$, а функция $v_1(x_1,x_2) =$

$$= \frac{1}{2\pi}\ln|x| * q_1(x_1)\delta_{[-1;1]}(x_1,x_2).$$

Вычислим функцию $v_0(x_1,x_2)$. Пусть функция $\eta(x_1,x_2)$ принадлежит пространству $D(\mathbb{R}^2)$ и $\eta(x_1,x_2)\equiv 1$ в окрестности l, а функция $\varphi(x_1,x_2)$ принадлежит пространству $D(\mathbb{R}^2)$, тогда по теореме о свертке с финитным функционалом (см. [19]) получаем, что

$$\left(\frac{1}{2\pi}\ln|x| * \frac{\partial}{\partial x_2}\left(q_0(x_1)\delta_{[-1;1]}(x_1,x_2)\right), \varphi(x_1,x_2)\right) =$$
$$= -\left(\frac{1}{2\pi}\ln|x| * \left(q_0(x_1)\delta_{[-1;1]}(x_1,x_2)\right), \frac{\partial\varphi(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right) =$$
$$= -\left(\frac{1}{2\pi}\ln|x|\cdot\left(q_0(y_1)\delta_{[-1;1]}(y_1,y_2)\right), \eta(y_1,y_2)\frac{\partial\varphi(x_1+y_1,x_2+y_2)}{\partial x_2}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\ln|x|\cdot\int\limits_{-1}^{1}\eta(y_1,0)\,q_0(y_1)\frac{\partial\varphi(x_1+y_1,x_2)}{\partial x_2}dy_1dx_1dx_2.$$

Поскольку функция $\eta(x_1,x_2)\equiv 1$ в окрестности l, то при $y_1\in[-1;1]$ $\eta(y_1,0)\equiv 1$, следовательно, последнее равенство примет вид

$$\left(\frac{1}{2\pi}\ln|x| * \frac{\partial}{\partial x_2}\left(q_0(x_1)\delta_{[-1;1]}(x_1,x_2)\right), \varphi(x_1,x_2)\right) =$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\ln|x|\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\int\limits_{-1}^{1}q_0(y_1)\varphi(x_1+y_1,x_2)dy_1\right)dx_1dx_2.$$

По лемме, доказанной в [19], функция $\int\limits_{-1}^{1}q_0(y_1)\frac{\partial\varphi(x_1+y_1,x_2)}{\partial x_2}dy_1$ принадлежит пространству $D(\mathbb{R}^2)$. Проведя в последнем равенстве интегрирование по частям по переменной x_2, получим, что

$$\left(\frac{1}{2\pi}\ln|x| * \frac{\partial}{\partial x_2}\left(q_0(x_1)\delta_{[-1;1]}(x_1,x_2)\right), \varphi(x_1,x_2)\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}q_0(y_1)\varphi(x_1+y_1,x_2)dy_1dx_1dx_2 =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-1+x_1}^{1+x_1}\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}q_0(\sigma-x_1)\varphi(\sigma,x_2)d\sigma dx_1dx_2 =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-1+\sigma}^{1+\sigma}\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}q_0(\sigma-x_1)dx_1\varphi(\sigma,x_2)d\sigma dx_2 =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}-\int\limits_{1}^{-1}\frac{x_2}{(\sigma-\sigma_1)^2+x_2^2}q_0(\sigma_1)d\sigma_1\varphi(\sigma,x_2)d\sigma dx_2 =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{x_2}{(\sigma-\sigma_1)^2+x_2^2}q_0(\sigma_1)d\sigma_1\varphi(\sigma,x_2)d\sigma dx_2.$$

Таким образом,

$$v_0(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{q_0(\sigma_1)x_2}{(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2}d\sigma_1. \qquad (13)$$

Вычислим функцию $v_1(x_1,x_2)$. Пусть функция $\eta(x_1,x_2)$ принадлежит пространству $D(\mathbb{R}^2)$ и $\eta(x_1,x_2)\equiv 1$ в окрестности l, а функция $\varphi(x_1,x_2)$ принадлежит пространству $D(\mathbb{R}^2)$, тогда по теореме о свертке с финитным функционалом получаем, что

$$\left(\frac{1}{2\pi}\ln|x| * \left(q_1(x_1)\delta_{[-1;1]}(x_1,x_2)\right), \varphi(x_1,x_2)\right) =$$
$$= \left(\frac{1}{2\pi}\ln|x|\cdot\left(q_1(y_1)\delta_{[-1;1]}(y_1,y_2)\right), \eta(y_1,y_2)\varphi(x_1+y_1,x_2+y_2)\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\ln|x|\cdot\int\limits_{-1}^{1}\eta(y_1,0)\,q_1(y_1)\varphi(x_1+y_1,x_2)dy_1dx_1dx_2.$$

Поскольку функция $\eta(x_1,x_2)\equiv 1$ в окрестности l, а при $y_1\in[-1;1]$ $\eta(y_1,0)\equiv 1$, последнее равенство примет вид

$$\left(\frac{1}{2\pi}\ln|x| * \left(q_1(x_1)\delta_{[-1;1]}(x_1,x_2)\right), \varphi(x_1,x_2)\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{-1}^{1}q_1(y_1)\varphi(x_1+y_1,x_2)\ln|x|\,dy_1dx_1dx_2 =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{-1+x_1}^{1+x_1}q_1(\sigma-x_1)\varphi(\sigma,x_2)\ln|x|\,d\sigma dx_1dx_2 =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-1+\sigma}^{1+\sigma}q_1(\sigma-x_1)\ln\left[x_1^2+x_2^2\right]dx_1\varphi(\sigma,x_2)d\sigma dx_2 =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}-\int\limits_{1}^{-1}q_1(\sigma_1)\ln\left[(\sigma-\sigma_1)^2+x_2^2\right]d\sigma_1\varphi(\sigma,x_2)d\sigma dx_2 =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{-1}^{1}q_1(\sigma_1)\ln\left[(\sigma-\sigma_1)^2+x_2^2\right]d\sigma_1\varphi(\sigma,x_2)d\sigma dx_2.$$

Таким образом,

$$v_1(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-1}^{1}q_1(\sigma_1)\ln\left[(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2\right]d\sigma_1. \qquad (14)$$

Из (12), (13) и (14) следует, что

$$v(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{q_0(\sigma_1)x_2}{(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2}d\sigma_1 + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-1}^{1}q_1(\sigma_1)\ln\left[(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2\right]d\sigma_1. \qquad (15)$$

ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ $\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_1}$ И $\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_2}$ В ОКРЕСТНОСТИ КОНЦОВ ТРЕЩИНЫ l

Теорема 3. Для частных производных первого порядка функции $v(x_1,x_2)$, определенной равенством (15), при (x_1, x_2), принадлежащем $\mathbb{R}^2 / l$, справедливы следующие представления:

$$\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_1} = -\frac{q_0(1)}{2\pi}\frac{x_2}{(1-x_1)^2+x_2^2} +$$

$$+\frac{q_0(-1)}{2\pi}\frac{x_2}{(1+x_1)^2+x_2^2} - \frac{q_1(1)}{4\pi}\ln[(1-x_1)^2+x_2^2] +$$

$$+\frac{q_1(-1)}{4\pi}\ln[(1+x_1)^2+x_2^2] + R_1(x_1,x_2),$$

где $R_1(x_1,x_2)$ — ограниченная на любом компакте функция,

$$\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_2} = -\frac{q_0(1)}{2\pi}\frac{1-x_1}{(1-x_1)^2+x_2^2} -$$

$$-\frac{q_0(-1)}{2\pi}\frac{1+x_1}{(1+x_1)^2+x_2^2} + \frac{q_0'(1)}{4\pi}\ln[(1-x_1)^2 +$$

$$+x_2^2] - \frac{q_0'(-1)}{4\pi}\ln[(1+x_1)^2+x_2^2] + R_2(x_1,x_2),$$

где $R_2(x_1,x_2)$ — ограниченная на любом компакте функция.

Доказательство. При любом $\delta > 0$

$$\lim_{x\to 0} x^{\delta}\ln|x| = 0. \tag{16}$$

Из (15) следует, что при (x_1, x_2), принадлежащем $\mathbb{R}^2 / l$, для функции $\dfrac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_1}$ будет справедливо представление

$$\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_1} = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x_2(x_1-\sigma_1)}{\left[(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2\right]^2}q_0(\sigma_1)d\sigma_1 + \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x_1-\sigma_1}{(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2}q_1(\sigma_1)d\sigma_1. \tag{17}$$

Из (17) при помощи интегрирования по частям получаем, что

$$\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_1} = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x_2(x_1-\sigma_1)}{\left[(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2\right]^2}q_0(\sigma_1)d\sigma_1 +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x_1-\sigma_1}{(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2}q_1(\sigma_1)d\sigma_1 =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left.\frac{x_2 q_0(\sigma_1)}{(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2}\right|_{-1}^{1} +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\operatorname{arctg}\left[\frac{\sigma_1-x_1}{x_2}\right]q_0'(\sigma_1)\Big|_{-1}^{1} -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\operatorname{arctg}\left[\frac{\sigma_1-x_1}{x_2}\right]q_0''(\sigma_1)d\sigma_1 -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\ln[(\sigma_1-x_1)^2+x_2^2]q_1(\sigma_1)\Big|_{-1}^{1} +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\operatorname{arctg}\left[\frac{\sigma_1-x_1}{x_2}\right]x_2 q_1'(\sigma_1)\Big|_{-1}^{1} +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\Big(-2(\sigma_1-x_1)+\ln\left[(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2\right](\sigma_1-x_1)\Big)q_1'(\sigma_1)\Big|_{-1}^{1} -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}\Big(-2(\sigma_1-x_1)+\ln\left[(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2\right](\sigma_1-x_1)\Big)q_1''(\sigma_1)d\sigma_1 -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\operatorname{arctg}\left[\frac{\sigma_1-x_1}{x_2}\right]x_2 q_1''(\sigma_1)d\sigma_1.$$

Из (16) и последнего представления следует, что

$$\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_1} = -\frac{q_0(1)}{2\pi}\frac{x_2}{(1-x_1)^2+x_2^2} +$$

$$+\frac{q_0(-1)}{2\pi}\frac{x_2}{(1+x_1)^2+x_2^2} - \frac{q_1(1)}{4\pi}\ln[(1-x_1)^2+x_2^2] +$$

$$+\frac{q_1(-1)}{4\pi}\ln[(1+x_1)^2+x_2^2] + R_1(x_1,x_2).$$

Из (15) следует, что при (x_1, x_2), принадлежащем $\mathbb{R}^2 / l$,

$$\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2}q_0(\sigma_1)d\sigma_1 - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x_2^2}{\left[(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2\right]^2}q_0(\sigma_1)d\sigma_1 + \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x_2}{(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2}q_1(\sigma_1)d\sigma_1. \tag{18}$$

Из (18) при помощи интегрирования по частям получаем, что

$$\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2}q_0(\sigma_1)d\sigma_1 -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x_2^2}{\left[(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2\right]^2}q_0(\sigma_1)d\sigma_1 +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x_2}{(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2}q_1(\sigma_1)d\sigma_1 =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_1-x_1}{\left[(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2\right]}q_0(\sigma_1)\Big|_{-1}^{1} +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\ln[(\sigma_1-x_1)^2+x_2^2]q_0{}'(\sigma_1)\Big|_{-1}^{1} +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\operatorname{arctg}\left[\frac{\sigma_1-x_1}{x_2}\right]q_1(\sigma_1)\Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{2\pi}\operatorname{arctg}\left[\frac{\sigma_1-x_1}{x_2}\right]x_2 q_0{}''(\sigma_1)\Big|_{-1}^{1} -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\Big(-2(\sigma_1-x_1)+\ln\left[(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2\right](\sigma_1-x_1)\Big)q_0{}''(\sigma_1)\Big|_{-1}^{1} -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\operatorname{arctg}\left[\frac{\sigma_1-x_1}{x_2}\right]q_1'(\sigma_1)\,d\sigma_1 +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\operatorname{arctg}\left[\frac{\sigma_1-x_1}{x_2}\right]x_2 q_0{}'''(\sigma_1)d\sigma_1 +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}\Big(-2(\sigma_1-x_1)+\ln\left[(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2\right](\sigma_1-x_1)\Big)q_0{}'''(\sigma_1)d\sigma_1.$$

Из (16) и последнего представления следует, что

$$\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_2}=-\frac{q_0(1)}{2\pi}\frac{1-x_1}{(1-x_1)^2+x_2^2}-$$
$$-\frac{q_0(-1)}{2\pi}\frac{1+x_1}{(1+x_1)^2+x_2^2}+\frac{q_0'(1)}{4\pi}\ln[(1-x_1)^2+x_2^2]-$$
$$-\frac{q_0'(-1)}{4\pi}\ln[(1+x_1)^2+x_2^2]+R_2(x_1,x_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1)—(3)

Теорема 4. Функция $v(x_1,x_2)$, определенная равенством (15), принадлежит пространству $C^\infty\left(\mathbb{R}^2/l\right)$ и является решением задачи (1)—(3).

Доказательство. Из представления функции $v(x_1,x_2)$ следует, что она принадлежит пространству $C^\infty\left(\mathbb{R}^2/l\right)$. Покажем, что функция $v(x_1,x_2)$ ограничена в окрестности трещины l.

Из (15) при помощи интегрирования по частям получаем, что

$$v(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi}\operatorname{arctg}\left[\frac{\sigma_1-x_1}{x_2}\right]q_0(\sigma_1)\Big|_{-1}^{1}-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\operatorname{arctg}\left[\frac{\sigma_1-x_1}{x_2}\right]q_0'(\sigma_1)d\sigma_1+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\Big(-2(\sigma_1-x_1)+\ln\left[(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2\right](\sigma_1-x_1)+$$
$$+2\operatorname{arctg}\left[\frac{\sigma_1-x_1}{x_2}\right]x_2\Big)\cdot q_1(\sigma_1)\Big|_{-1}^{1}-$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}\Big(-2(\sigma_1-x_1)+\ln\left[(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2\right](\sigma_1-x_1)\Big)q_1'(\sigma_1)d\sigma_1-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\operatorname{arctg}\left[\frac{\sigma_1-x_1}{x_2}\right]x_2q_1'(\sigma_1)d\sigma_1.$$

Из последнего равенства и (16) следует ограниченность функции $v(x_1,x_2)$ в окрестности трещины l. Из теоремы 3 следует, что $x_2\dfrac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_2}$ и $\dfrac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_2}-\dfrac{\partial v(x_1,-x_2)}{\partial x_2}$ ограничены в окрестности трещины l.

Поскольку второе слагаемое в (15), первое и второе слагаемые в (18) являются четными функциями по переменной x_2, то при x_1, принадлежащем $(-1;1)$, получаем следующие равенства:

$$v(x_1,+0)-v(x_1,-0)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{q_0(\sigma_1)}{(x_1-\sigma_1)^2+\varepsilon^2}d\sigma_1=$$
$$=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon\int_{-1}^{1}\frac{q_0(\sigma_1)-q_0(x_1)}{(x_1-\sigma_1)^2+\varepsilon^2}d\sigma_1+ \tag{19}$$
$$+\frac{q_0(x_1)}{\pi}\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon\int_{-1}^{1}\frac{1}{(x_1-\sigma_1)^2+\varepsilon^2}d\sigma_1,$$

$$\frac{\partial v(x_1,+0)}{\partial x_2}-\frac{\partial v(x_1,-0)}{\partial x_2}=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{q_1(\sigma_1)}{(x_1-\sigma_1)^2+\varepsilon^2}d\sigma_1=$$
$$=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon\int_{-1}^{1}\frac{q_1(\sigma_1)-q_1(x_1)}{(x_1-\sigma_1)^2+\varepsilon^2}d\sigma_1+ \tag{20}$$
$$+\frac{q_1(x_1)}{\pi}\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon\int_{-1}^{1}\frac{1}{(x_1-\sigma_1)^2+\varepsilon^2}d\sigma_1.$$

Из теоремы Тейлора следует, что при $\sigma_1,\ x_1\in[-1;1]$ и $i=0,\,1$

$$q_i(\sigma_1)-q_i(x_1)=q_i'(x_1)(\sigma_1-x_1)+\frac{q_i''(\xi_i)}{2}(\sigma_1-x_1)^2,$$

тогда

$$\int_{-1}^{1}\frac{q_i(\sigma_1)-q_i(x_1)}{(x_1-\sigma_1)^2+\varepsilon^2}d\sigma_1=q_i'(x_1)\int_{-1}^{1}\frac{\sigma_1-x_1}{(x_1-\sigma_1)^2+\varepsilon^2}d\sigma_1+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{q_i''(\xi_1)(\sigma_1-x_1)^2}{(x_1-\sigma_1)^2+\varepsilon^2}d\sigma_1=$$
$$=\frac{q_i'(x_1)}{2}\ln\left[(x_1-\sigma_1)^2+\varepsilon^2\right]\Big|_{-1}^{1}+ \tag{21}$$
$$+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{q_i''(\xi_1)(\sigma_1-x_1)^2}{(x_1-\sigma_1)^2+\varepsilon^2}d\sigma_1.$$

Из последнего равенства при $i=0,\,1$ получаем, что $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{q_i(\sigma_1)-q_i(x_1)}{(x_1-\sigma_1)^2+\varepsilon^2}d\sigma_1$ — ограниченная функция, когда x_1 принадлежит $(-1;1)$. Следовательно, при $i=0,\,1$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon\int_{-1}^{1}\frac{q_i(\sigma_1)-q_i(x_1)}{(x_1-\sigma_1)^2+\varepsilon^2}d\sigma_1=0. \tag{22}$$

Из (19), (20) и (22) получаем, что

$$v(x_1,+0)-v(x_1,-0)=$$
$$=\frac{q_0(x_1)}{\pi}\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon\int_{-1}^{1}\frac{1}{(x_1-\sigma_1)^2+\varepsilon^2}d\sigma_1,$$
$$\frac{\partial v(x_1,+0)}{\partial x_2}-\frac{\partial v(x_1,-0)}{\partial x_2}= \tag{23}$$
$$=\frac{q_1(x_1)}{\pi}\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon\int_{-1}^{1}\frac{1}{(x_1-\sigma_1)^2+\varepsilon^2}d\sigma_1.$$

Поскольку

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varepsilon}{(x_1-\sigma_1)^2+\varepsilon^2}d\sigma_1=$$
$$=\operatorname{arctg}\frac{1-x_1}{\varepsilon}+\operatorname{arctg}\frac{1+x_1}{\varepsilon}, \tag{24}$$

то из (23) и (24) следует, что при x_1, принадлежащем $(-1;1)$,

$$v(x_1,+0)-v(x_1,-0)=q_0(x_1),$$
$$\frac{\partial v(x_1,+0)}{\partial x_2}-\frac{\partial v(x_1,-0)}{\partial x_2}=q_1(x_1).$$

Замечание 4. Для функции $v(x_1,x_2)$ выполнены следующие соотношения:

$$v(\pm 1,+0)-v(\pm 1,-0)=\frac{q_0(\pm 1)}{2},$$
$$\frac{\partial v(\pm 1,+0)}{\partial x_2}-\frac{\partial v(\pm 1,-0)}{\partial x_2}=\frac{q_1(\pm 1)}{2}.$$

Доказательство. Из (16) и (21) получаем, что при $i = 0, 1$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\int_{-1}^{1}\frac{q_i(\sigma_1)-q_i(\pm 1)}{(\pm 1-\sigma_1)^2+\varepsilon^2}d\sigma_1=0,$$

следовательно, при $x_1=\pm 1$ справедливы равенства (23). Из (23) и (24) следует справедливость замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Партон В. З.* Механика разрушения / В. З. Партон. — М.: Наука, 1990. — 240 с.

2. *Караулова Н. Е.* Взаимодействие трещин в функционально-градиентном / однородном двухкомпонентном материале под действием антиплоского сдвига / Н. Е. Караулова, В. Е. Петрова // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2011. — № 1. — С. 157—167.

3. *Петрова В. Е.* Взаимодействие магистральной трещины с микротрещинами в условиях продольного сдвига / В. Е. Петрова, В. П. Тамуж // Трехмерные задачи структурно-неоднородных сред. — Воронеж: Изд-во ВГУ, 1991. — С. 135—140.

4. *Глушко А. В.* Асимптотические свойства решения задачи о стационарном распределении тепла в неоднородной плоскости с трещиной / А. В. Глушко, Е. А. Логинова // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2010. — № 2. — С. 47-50.

5. *Chen Y. F.* The interface crack problem for a nonhomogeneous coating bonded to a homogeneous substrate / Y. F. Chen, F. Erdogan. — J. Mech. Phys. Solids 44, 1996. — P. 771—787.

6. *Choi H. J.* Collinear cracks in a layered half-plane with a graded nonhomogeneous interfacial zone / H. J. Choi, K. Y. Lee, T. E. Jin. — part A: mechanical response. Int. J. Fract. 94(2), 1998. — P. 103—122.

7. *Choi H. J.* Collinear cracks in a layered half-plane with a graded nonhomogeneous interfacial zone / H. J. Choi, T. E. Jin, K. Y. Lee. — part B: thermal shock response. Int. J. Fract. 94(2), 1998. — P. 123—135.

8. *Guo L. C.* Fracture analysis of a functionally graded coating-substrate structure with a crack perpendicular to the interface / L. C. Guo, L. Z. Wu, T. Zeng. — Part I: static problem. Int. J. Fract. 127(1), 2004. — P. 21—38.

9. *Guo L. C.* Fracture analysis of a functionally graded coating-substrate structure with a crack perpendicular to the interface / L. C. Guo, L. Z. Wu, T. Zeng. — Part II: transient problem. Int. J. Fract. 127(1), 2004. — P. 39—59.

10. *Erdogan F.* The crack problem for bonded nonhomogeneous materials under antiplane shear loading / F. Erdogan. — J. Appl. Mech. 52, 1985. — P. 823—828.

11. *Hu K. Q.* Anti-plane shear crack in a functionally gradient piezoelectric material / K. Q. Hu, Z. Zhong, B. — Acta Mech. Solida Sin. 15(2), 2002. — P. 140—148.

12. *Zhou Z. G.* Investigation of the behavior of an interface crack between two half-planes of orthotropic functionally graded materials by using a new method / Z. G. Zhou, B. Wang, L. J. Yang. — JSME Int. J. Ser. C, Mech. Syst. Mach. Elem. Manuf. 47(3), 2004. — P. 467—487.

13. *Ou Y. L.* Mode III crack problems for two bonded functionally graded piezoelectric materials / Y. L. Ou, C. H. Chue. — Int. J. Solids Struct. 42, 2005. — P. 3321—3337.

14. *Ou Y. L.* Two mode internal cracks located with in two bonded functionally graded piezoelectric half planes respectively / Y. L. Ou, C. H. Chue. — Arch. Appl. Mech. 75(6/7), 2006. — P. 364—378.

15. *Yong H. D.* Analysis of a mode III crack problem in a functionally graded coating-substrate system with finite thickness / H. D. Yong, Y. H. Zhou. — Int. J. Fract. 141, 2006. — P. 459—467.

16. *Li Y.-D.* An anti-plane crack perpendicular to the wick/micro-discontinuous interface in a bi-FGM structure with exponential and non-homogeneities / Y.-D. Li, K. Y. Lee. — Int. J. Fract.141. 2007. — P. 203—211.

17. *Логинова Е. А.* Асимптотическое представление тепловых потоков для задачи о стационарном распределении тепла в неоднородной плоскости с трещиной / Е. А. Логинова // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения XXII». — Воронеж, 2011. — С. 104-105.

18. *Владимиров В. С.* Сборник задач по уравнениям математической физики / В. С. Владимиров, В. П. Михайлов, А. А. Вашарин [и др.]. — М.: Наука, 1982. — 256 с.

19. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. — М.: Наука, 1976. — 527 с.

Рябенко А. С. — кандидат физико-математических наук; преподаватель кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета, Воронежский государственный университет
Тел.: (473) 2-36-76-38.
E-mail: alexr-83@yandex.ru

Ryabenko A. S. — candidate of physical and mathematical sciences; lecturer department of partial differential and probability theory, faculty of mathematics, Voronezh State University
Tel.: (473) 2-36-76-38.
E-mail: alexr-83@yandex.ru