УДК 517.983

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

В. А. Попова, А. В. Глушак*

Воронежский государственный архитектурно-строительный университет,
Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Поступила в редакцию 13.01.2012 г.

Аннотация. В работе изучается обратная задача с нелокальным граничным условием для сингулярного уравнения с производящим оператором сильно непрерывной полугруппы класса C_0. Приведены необходимое и достаточное условия существования единственного решения исследуемой задачи, при этом важную роль играют нули функции типа Миттаг—Леффлера.
Ключевые слова: Эволюционное уравнение, линейный оператор, полугруппа, обратная задача.

Abstract: The Article is connected with study of the inverse problem with non-local border condition for singular equation with producing operator powerfully incessant semigroup of the class C_0. The necessary and sufficient conditions of existence of the single decision of the investigation problem are adduction, here the zeroes of the function of the type Mittag-Lefflera are play the important role.
Key words: Evolution equation, linear operator, semigroup, inverse problem.

Пусть E — банахово пространство, A — линейный замкнутый плотно определенный оператор в E с областью определения $D(A)$. Рассмотрим задачу определения функции $u(t) \in C^1\left((0,1], E\right)$, принадлежащей $D(A)$ при $t \in (0,1]$ и параметра $p \in E$ из соотношений

$$u'(t) + \frac{k}{t}u(t) = Au(t) + \frac{p}{t}, \qquad (1)$$

$$\lim_{t\to 0}\left(t^k u(t)\right) = u_0, \qquad (2)$$

$$\lim_{t\to 1} I^\beta\left(t^k u(t)\right) = u_1, \qquad (3)$$

где $I^\beta u(t) = \dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\displaystyle\int_0^t \frac{u(x)\,dx}{(t-x)^{1-\beta}}$ — дробный интеграл Римана—Лиувилля.

В статье [1] рассматривалась задача вида (1)—(3) и оператором, являющимся генератором k раз проинтегрированной полугруппы $T_k(t)$. В отличие от статьи [1], настоящая работа посвящена детализации случая, когда оператор A является генератором сильно непрерывной полугруппы. В случае $k = 0, \beta = 0$ и различных ограничениях на оператор A обратные задачи рассматривались ранее в работах [2]—[8], а при $k > 0, \beta > 0$ в случае производящего оператора аналитической полугруппы изучалась авторами в [9].

Если A порождает сильно непрерывную полугруппу, то задача (1) — (3) сводится к задаче о разрешимости уравнения

$$t^k u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t \tau^{k-1}T(t-\tau)p\,d\tau,$$

правая часть которого принадлежит $D(A)$, т.е. к задаче о существовании у оператора B, задаваемого соотношением

$$Bp = \frac{1}{\Gamma(k+\beta)}\int_0^1 (1-s)^{k+\beta-1}T(s)p\,ds,$$

обратного оператора.

Теорема 1. *Пусть A — производящий оператор сильно непрерывной полугруппы $T(t)$. Тогда справедливо представление*

$$Bx = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} E_{1,k+\beta+1}(z)R(z)x\,dz, \quad x \in D(A), \qquad (4)$$

где $E_{\alpha,\mu}(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(n\alpha+\mu)}$ *— функция Миттаг—Леффлера.*

* Работа второго автора выполнена при поддержке РФФИ, проект 10-01-00276-а

Доказательство. Из теоремы Хилле—Иосиды следует, что в некоторой полуплоскости $Rez \ge \sigma_0$ оператор A имеет резольвенту $R(z)$, для которой справедлива оценка

$$\|R(z)\| \le c. \tag{5}$$

Для полугруппы $T(t)$ справедливо представление (см. [10])

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} e^{zt} R(z) dz, \quad t > 0 \tag{6}$$

и, следовательно, при $x \in D(A)$ справедливо равенство

$$Bx = \frac{1}{\Gamma(k+\beta)} \int_0^1 (1-s)^{k+\beta-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} e^{zs} R(z) dz x ds =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(k+\beta) 2\pi i} \int_0^1 \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} (1-s)^{k+\beta-1} e^{zs} R(z) x dz ds.$$

Пусть $Re\lambda > \sigma_0$, λ — регулярная точка оператора А. Предположим, что $x \in D\left(A^2\right)$, тогда $x = \left[R(\lambda)\right]^2 y$, $y \in E$.

При $x \in D\left(A^2\right)$ справедливо равенство

$$Bx = \frac{1}{\Gamma(k+\beta) 2\pi i} \times$$

$$\times \int_0^1 \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} (1-s)^{k+\beta-1} e^{zs} R(z) \left[R(\lambda)\right]^2 y dz ds.$$

Применяя в последнем представлении тождество Гильберта и интегрируя равенство

$$\frac{1}{2\pi i} (1-s)^{k+\beta-1} e^{zs} R(z) [R(\lambda)]^2 y =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} (1-s)^{k+\beta-1} e^{zs} \left(-\frac{\left[R(\lambda)\right]^2}{\lambda - z} - \frac{R(\lambda)}{(\lambda - z)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{R(z)}{(\lambda - z)^2} \right) y,$$

с помощью леммы Жордана получим равенство

$$Bx = \frac{1}{\Gamma(k+\beta) 2\pi i} \int_0^1 \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \frac{(1-s)^{k+\beta-1} e^{zs}}{(\lambda - z)^2} R(z) y dz ds. \tag{7}$$

В силу (5) имеем

$$\left\| \int_0^1 \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \frac{(1-s)^{k+\beta-1} e^{(\sigma_0 + i\rho)s}}{\left(\lambda - \sigma_0 - i\rho\right)^2} R\left(\sigma_0 + i\rho\right) y d\rho ds \right\| < \infty.$$

Следовательно, в силу теоремы Фубини, в (7) можно менять порядок интегрирования. Тогда получим

$$Bx = \frac{1}{\Gamma(k+\beta) 2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \frac{R(z) y}{(\lambda - z)^2} \int_0^1 (1-s)^{k+\beta-1} e^{zs} ds dz.$$

Воспользовавшись интегральным представлением для функции Миттаг—Леффлера ([11], с. 120) имеем

$$Bx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} E_{1,k+\beta+1}(z) \frac{R(z) y}{(\lambda - z)^2} dz.$$

Так как $y = \left(\lambda I - A\right)^2 x$, получим

$$Bx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \frac{E_{1,k+\beta+1}(z)}{(\lambda - z)^2} R(z) \left(\lambda I - A\right)^2 x dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \frac{E_{1,k+\beta+1}(z)}{(\lambda - z)^2} R(z) \times$$

$$\times \left(\left(\lambda - z\right) I + \left(zI - A\right) \right) \left(\lambda I - A\right) x dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \frac{E_{1,k+\beta+1}(z)}{(\lambda - z)} R(z) \left(\lambda I - A\right) x dz +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \frac{E_{1,k+\beta+1}(z)}{(\lambda - z)^2} \left(\lambda I - A\right) x dz. \tag{8}$$

В силу асимптотического поведения функции $E_{1,k+\beta+1}(z)$ при $|z| \to \infty$ ([11], с. 134)

$$E_{1,\mu}(z) = z^{1-\mu} e^z - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\Gamma(\mu - j) z^j} + O\left(|z|^{-n-1}\right),$$
$$\left|\arg z\right| \le \nu\pi, \nu \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \tag{9}$$

$$E_{1,\mu}(z) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\Gamma(\mu - j) z^j} + O\left(|z|^{-n-1}\right),$$
$$\nu\pi \le \left|\arg z\right| \le \pi, \tag{10}$$

и аналитичности функции $\dfrac{E_{1,k+\beta+1}(z)}{(\lambda - z)^2}$ второе слагаемое в (8) равно нулю. Следовательно,

$$Bx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \frac{E_{1,k+\beta+1}(z)}{(\lambda - z)} R(z) \left(\lambda I - A\right) x dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \frac{E_{1,k+\beta+1}(z)}{(\lambda - z)} R(z) \times$$

$$\times \left(\left(\lambda - z\right) I + \left(zI - A\right) \right) x dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} E_{1,k+\beta+1}(z) R(z) x dz +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \frac{E_{1,k+\beta+1}(z)}{(\lambda - z)} x dz.$$

Снова в силу асимптотики функции $E_{1,k+\beta+1}(z)$ и аналитичности функции $\dfrac{E_{1,k+\beta+1}(z)}{(\lambda - z)}$ второе слагаемое в последней строчке равно нулю. Следовательно,

$$Bx = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} E_{1,k+\beta+1}(z)R(z)xdz.$$

Теорема 1 доказана.

Установим теперь необходимое условие однозначной разрешимости задачи (1)—(3).

Теорема 2. *Пусть A — производящий оператор сильно непрерывной полугруппы $T(t)$. Пусть задача (1)—(3) при любых $u_0,\ u_1 \in D(A)$ имеет решение. Для того, чтобы оно было единственным необходимо, чтобы каждая точка μ_j, являющаяся нулем функции $E_{1,k+\beta+1}(z)$, была регулярной точкой оператора A.*

Доказательство. Пусть μ_j — произвольная точка, удовлетворяющая неравенству $E_{1,k+\beta+1}(z) \neq 0$.

Рассмотрим ограниченный оператор D_k, заданный соотношением

$$D_k x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \frac{E_{1,k+\beta+1}(z)}{\mu_j - z} R(z)xdz, \quad x \in E.$$

При всех $x \in D(A)$ справедливо равенство

$$\frac{E_{1,k+\beta+1}(z)}{\mu_j - z}\left(\mu_j I - A\right)R(z)x =$$
$$= E_{1,k+\beta+1}(z)R(z)x + \frac{E_{1,k+\beta+1}(z)}{\mu_j - z}x.$$

В силу замкнутости оператора A, аналитичности функции $\dfrac{E_{1,k+\beta+1}(z)}{\mu_j - z}$ в полуплоскости $Rez \le \sigma_0$ и теоремы 1 при $x \in D(A)$ справедливо равенство

$$\left(\mu_j I - A\right)D_k x = Bx.$$

В силу замкнутости оператора A, ограниченности оператора B и плотности $D(A)$ в E при всех $x \in E$ справедливо $D_k x \in D(A)$ и

$$\left(\mu_j I - A\right)D_k x = Bx.$$

Предположим, что оператор B имеет определенный на всем $D(A)$ обратный оператор B^{-1}. Тогда справедливы соотношения

$$x = B^{-1}Bx = B^{-1}\left(\mu_j I - A\right)D_k x = \left(\mu_j I - A\right)B^{-1}D_k x,$$
$$x \in E,$$

$$x = BB^{-1}x = \left(\mu_j I - A\right)D_k B^{-1}x = B^{-1}D_k\left(\mu_j I - A\right)x,$$
$$x \in D(A).$$

Таким образом, оператор $B^{-1}D_j$ определен на всем E и является обратным по отношению к $\mu_j I - A$ оператором. Следовательно, μ_j — регулярная точка оператора A.

Теорема 2 доказана.

Приведем теперь достаточное условие существования единственного решения поставленной задачи.

Теорема 3. *Предположим, что A порождает сильно непрерывную полугруппу и существует $d > 0$, что во всех точках μ_j, являющихся нулем функции $E_{1,k+\beta+1}(z)$, значения резольвенты $R(\mu_j)$ оператора A определены и удовлетворяют соотношению*

$$\sup_{Re\mu_j < \sigma}\left\|R\left(\mu_j\right)\right\| \le d. \tag{11}$$

Пусть $u_0, u_1 \in D\left(A^2\right)$. Тогда задача (1)—(3) имеет единственное решение.

Доказательство. Существование единственного решения задачи (1)—(3) сводится к доказательству существования обратного у ограниченного оператора, определяемого равенством

$$Bp = \frac{1}{\Gamma(k+\beta)}\int_0^1 (1-s)^{k+\beta-1}T(s)pds.$$

В силу инвариантности $D(A)$ относительно $T(t)$ при $u_0, u_1 \in D\left(A^2\right)$ правая часть уравнения $Bp = q$ принадлежит $D\left(A^2\right)$. Покажем, что из (11) вытекает, что оператор B имеет определенный на всем $D\left(A^2\right)$ обратный. Поскольку каждый нуль μ_j функции $E_{1,k+\beta+1}(z)$ с $\mathrm{Re}\mu_j < \sigma$ принадлежит $\rho(A)$, то он принадлежит $\rho(A)$ вместе с некоторой круговой окрестностью Ω_n. Пусть Γ — контур на комплексной плоскости, состоящий из прямой $\mathrm{Re}\ z = \sigma > \omega$ и границ γ_n круговых окрестностей Ω_n, т.е. $\Gamma = \left\{\mathrm{Re}\ z = \sigma\right\}\bigcup \gamma_n$. Контур Γ является границей области, внутри которой расположен спектр $\sigma(A)$.

Возьмем $\lambda \in \rho(A)$, $\mathrm{Re}\ \lambda > \sigma > \omega$ и рассмотрим ограниченный оператор

$$Vq = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{R(z)qdz}{E_{1,k+\beta+1}(z)(z-\lambda)^2}(\lambda I - A)^2 = \\ = V_1(\lambda I - A)^2 q. \tag{12}$$

Отметим, что интеграл в (12) абсолютно сходится. Действительно, в силу выбора контура Γ, оценок (5), (11), асимптотики

$$z_n = 2\pi ni + (k+\beta-1)\left(\ln 2\pi|n| + i\frac{\pi}{2}\,sign\,n\right) - $$
$$-\ln\Gamma(k+\beta) + O\left(\frac{\ln|n|}{|n|}\right),\ \ n\to\pm\infty$$

и известного ([11], с. 134) асимптотического поведения функции Миттаг—Леффлера при $|z|\to\infty$ (9), (10), справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\bigcup\gamma_n}\frac{R(z)qdz}{E_{1,k+\beta+1}(z)(\lambda-z)^2} =$$
$$= \sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{+\infty}\frac{R(\mu_n)qdz}{E_{1,k+\beta+1}(\mu_n)(\lambda-\mu_n)^2}.$$

При этом, поскольку (см. ([11], формула (1.5) на с. 118))

$$E'_{1,k+\beta+1}(\mu_n) = \mu_n^{-1}\left(E_{1,k+\beta}(\mu_n) - (k+\beta)E_{1,k+\beta+1}(\mu_n)\right),$$

то

$$E'_{1,k+\beta+1}(\mu_n) = \frac{1}{\mu_n}\left(\frac{\mu_n^{1-k-\beta}\left(2\pi|n|\right)^{k+\beta-1}e^{iIm\mu_n}}{\Gamma(k+\beta)} - \right.$$
$$-\frac{1}{\Gamma(k+\beta)\mu_n} - \frac{(k+\beta)\mu_n^{-k-\beta}\left(2\pi|n|\right)^{k+\beta-1}e^{iIm\mu_n}}{\Gamma(k+\beta)} -$$
$$\left. -\frac{k+\beta}{\Gamma(k+\beta)\mu_n} + O\left(\frac{1}{|\mu_n|^2}\right)\right).$$

Следовательно,

$$\left|E'_{1,k+\beta+1}(\mu_n)\right| = \frac{1}{|\mu_n|}\left(\frac{1}{\Gamma(k+\beta)} + O\left(\frac{1}{|\mu_n|}\right)\right),$$

и интеграл по $\bigcup\gamma_n$ абсолютно сходится. Сходимость же интеграла (12) по прямой $\mathrm{Re}z=\sigma$ очевидна.

Покажем, что V как раз и будет обратным по отношению к B оператором. Применяя представление (4) и интегральную формулу Коши, получим, что при $x\in D(A)$ справедливо

$$V_1Bx = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{R(z)dz}{E_{1,k+\beta+1}(z)(z-\lambda)^2}\times$$
$$\times\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}E_{1,k+\beta+1}(\xi)R(\xi)xd\xi =$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_\Gamma\int\limits_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}\frac{E_{1,k+\beta+1}(\xi)R(z)R(\xi)xd\xi dz}{E_{1,k+\beta+1}(z)(z-\lambda)^2}.$$

Применяя тождество Гильберта, получим

$$V_1Bx = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_\Gamma\frac{R(z)xdz}{E_{1,k+\beta+1}(z)(z-\lambda)^2}\times$$
$$\times\int\limits_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}\frac{E_{1,k+\beta+1}(\xi)}{(z-\xi)}d\xi -$$
$$-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}E_{1,k+\beta+1}(\xi)R(\xi)xd\xi\times$$
$$\times\int\limits_\Gamma\frac{dz}{E_{1,k+\beta+1}(z)(z-\lambda)^2(z-\xi)}.$$

Заметим, что контур интегрирования выбран так, что $E_{1,k+\beta+1}(z)\neq 0,\ z-\lambda\neq 0,\ z-\xi\neq 0.$ Тогда замыкая контур, в силу теоремы Коши имеем

$$\int\limits_\Gamma\frac{dz}{E_{1,k+\beta+1}(z)(z-\lambda)^2(z-\xi)} = 0.$$

Используя интегральную формулу Коши, получаем

$$\int\limits_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}\frac{E_{1,k+\beta+1}(\xi)}{(z-\xi)}d\xi = E_{1,k+\beta+1}(z).$$

Таким образом,

$$V_1Bx = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{R(z)dz}{(z-\lambda)^2} = (\lambda I - A)^{-2}x.$$

В силу ограниченности операторов V_1, B и $(\lambda I-A)^{-2}$, плотности $D(A)$ в E и того, что операторы V_1 и B коммутируют, получаем, что при всех $x\in E$ справедливо равенство

$$V_1Bx = BV_1x = (\lambda I-A)^{-2}x,\quad x\in D(A).$$

Отсюда следует,

$$BVx = (\lambda I-A)^{-2}(\lambda I-A)^2x = x,\quad x\in D(A^2),$$
$$VBx = (\lambda I-A)^2(\lambda I-A)^{-2}x = x,\quad x\in E.$$

Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Глушак А. В.* Обратная задача для эволюционного уравнения с интегралом дробного порядка в граничном условии // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2008. — Т. 29. — С. 49—61.

2. *Эйдельман Ю. С.* Одна обратная задача для эволюционного уравнения // Докл. АН УССР. — 1983. — № 4. — С. 15—18.

3. *Эйдельман Ю. С.* Единственность решения абстрактной задачи для дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения. — 1987. — Т. 23. — № 9. — С. 1647—1649.

4. *Орловский Д. Г.* К задаче определения параметра эволюционного уравнения. Диф. уравнения.

— 1990. — Т. 26. — № 9. — С. 1614—1621.

5. *Эйдельман Ю. С.* Одна обратная задача для эволюционного уравнения// Математические заметки. — 1991. — Т. 99. — № 5. — С. 135—141.

6. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for Solving Invers Problems in Mathemetical Physics. — New York — Basel: Marcel Dekker, 2000. — 709 p.

7. *Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С.* Обратная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве и распределение нулей целой функции типа Миттаг—Леффлера // Дифференциальные уравнения. — 2002. — 38 № 5. — С. 637—644.

8. *Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С.* Критерий единственности в обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения с нестационарным неоднородным слагаемым// Мат. заметки. — 2005. — Т. 77. — № 2. — С. 273—290.

9. *Попова В. А., Глушак А. В.* Об одной обратной задаче с нелокальным граничным условием для сингулярного эволюционного уравнения // Научные ведомости Белгородского государственного университета. — 2007. — № 6. — Вып. 13. — С. 16—22.

10. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. Иностранная литература. — 1962. — 895 с.

11. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной плоскости. — М.: Наука. — 1966.

Попова В. А. — преподаватель кафедры высшей математики, ассистент, Воронежский государственный архитектурно-строительный университет
E-mail: pva3003@gmail.com
Тел.: 8-473-271-53-62

Глушак А. В. — профессор кафедры математического анализа, Белгородский государственный национальный исследовательский университет
E-mail: Glushak@bsu.edu.ru
Тел.: +7 (4722)30-18-10,

Popova V. A. — teacher of the pulpit high mathematicians, assistant, Voronezh state architectural-building university
E-mail: pva3003@gmail.com
Tel.: 8-473-271-53-62

Glushak A. V. — professor of the pulpit of the mathematical analysis, Belgorod state national exploratory university
E-mail: Glushak@bsu.edu.ru
Tel.:+7 (4722)30-18-10