УДК 517.19

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА*

Д. М. Поляков

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 19.01.2012 г.

Аннотация: В работе исследуются спектральные свойства несамосопряженного дифференциального оператора четвертого порядка методом подобных операторов. Получены результаты об асимптотике спектра и сходимости спектральных разложений дифференциального оператора.
Ключевые слова: Спектр оператора, дифференциальный оператор четвертого порядка, асимптотика спектра и спектральных проекторов, метод подобных операторов.

Abstract: In this paper the similar operators method is used for spectral analysis of differential fourth order operator nonself-adjoint operator. The asymptotic of differential of fourth order operator spectrum and the spectral factorization convergence are obtained.
Key words: Operator spectrum, differential of fourth order operator, spectrum asymptotic and spectral projections, spectrum distribution, similar operators method.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $L_2[-1,1]$ — гильбертово пространство суммируемых с квадратом на $[-1,1]$ комплекснозначных функций со скалярным произведением

$$(x,y) = \int_{-1}^{1} x(\tau)\overline{y(\tau)}d\tau, \quad x,y \in L_2[-1,1].$$

Символом $L_\infty[-1,1]$ обозначается банахово пространство существенно ограниченных на $[-1,1]$ комплекснозначных функций. Через $W_2^4[-1,1]$ обозначим пространство Соболева $\{y:[-1,1]\to\mathbb{C} : y$ имеет три непрерывные производные, y''' абсолютно непрерывна и $y^{IV} \in L_2[-1,1]\}$.

Рассматривается оператор

$$L = A - B : D(L) \subset L_2[-1,1] \to L_2[-1,1],$$

где операторы A и B определяются следующими дифференциальными выражениями

$$Ay = y^{IV}, \quad By = a(t)y'' + b(t)y,$$

где функция a непрерывно дифференцируема, функция $b \in L_\infty[-1,1]$, и область определения

$$y \in D(L) = D(A) = \{y \in W_2^4[-1,1] : y(-1) = \\ = y(1) = 0, y'(-1) = y'(1) = 0\}.$$

Оператор A — самосопряженный положительно определенный оператор. При изучении оператора L оператор A будет играть роль невозмущенного оператора. Оператор B, в свою очередь, будет играть роль возмущения.

Оператор A имеет компактную резольвенту, и его спектр допускает представление (см. [1])

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\},$$

где

$$\lambda_n = \mu_n^4, \quad \mu_n = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} + o\left(e^{-2\pi n}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Собственное подпространство, отвечающее собственному значению $\lambda_n, n \in \mathbb{N}$, является одномерным. Соответствующая собственная функция имеет вид

$e_n(t) = \frac{1}{\alpha_n}\left(\cos\mu_n \operatorname{ch}(\mu_n t) - \operatorname{ch}\mu_n \cos(\mu_n t)\right)$, если n нечетное (будем называть этот случай нечетным),

$e_n(t) = \frac{1}{\beta_n}\left(\sin\mu_n \operatorname{sh}(\mu_n t) - \operatorname{sh}\mu_n \sin(\mu_n t)\right)$, если n четное (будем называть этот случай четным),

где α_n и β_n имеют вид:

$$\alpha_n = \Big(\cos^2\mu_n\left(\tfrac{\operatorname{sh}2\mu_n}{2\mu_n} + 1\right) - \\ - \tfrac{2}{\mu_n}\cos\mu_n \operatorname{ch}\mu_n\left(\operatorname{ch}\mu_n \sin\mu_n + \operatorname{sh}\mu_n \cos\mu_n\right) + \\ + \operatorname{ch}^2\mu_n\left(1 + \tfrac{\sin 2\mu_n}{2\mu_n}\right)\Big)^{\frac{1}{2}},$$

$$\beta_n = \Big(\sin^2\mu_n\left(\tfrac{\operatorname{sh}2\mu_n}{2\mu_n} - 1\right) - \\ - \tfrac{2}{\mu_n}\sin\mu_n \operatorname{sh}\mu_n\left(\operatorname{ch}\mu_n \sin\mu_n - \operatorname{sh}\mu_n \cos\mu_n\right) + \\ + \operatorname{sh}^2\mu_n\left(1 - \tfrac{\sin 2\mu_n}{2\mu_n}\right)\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 10-01-00276.

Проекторы Рисса $P_n, n \in \mathbb{N}$, построенные по одноточечным множествам $\{\lambda_n\}$, для любого $x \in L_2[-1,1]$, имеют вид

$$P_n x = (x, e_n) e_n, n \geq 1.$$

В данной статье для исследования спектральных свойств оператора L используется метод подобных операторов [2]—[4]. Суть этого метода состоит в преобразовании подобия исследуемого оператора в оператор, спектральные свойства которого близки к спектральным свойствам невозмущенного оператора (в нашем случае оператора A). Таким образом существенно упрощается изучение исследуемого оператора L. Интерес к изучению оператора L связан с тем, что такие операторы возникают при визуализации аттракторов для математической модели в гидродинамике [1]. Также исходный оператор с заданными краевыми условиями может описывать модель балки или стержня с жестко закрепленными концами [5, гл. 2.7].

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Применяя метод подобных операторов для исследования спектральных свойств оператора L, мы получим следующие результаты.

Теорема 1. *Исследуемый дифференциальный оператор $L = A - B$ является оператором с компактной резольвентой и его собственные значения $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \ldots$ допускают следующую асимптотику*

$$\tilde{\lambda}_n = \left(-\frac{\pi}{4} + \pi n\right)^4 - \\ -\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n\right)^2 \left(\int_{-1}^{0} a(t) e^{\left(\frac{\pi}{2} - 2\pi n\right)t + \frac{\pi}{2} - 2\pi n} dt + \right. \\ \left. + \int_{0}^{1} a(t) e^{\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)t + \frac{\pi}{2} - 2\pi n} dt\right) - \\ -\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n\right)^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{nj} a_{jn}}{\lambda_j - \lambda_n} + O\left(\frac{1}{n^4}\right), n \in \mathbb{N},$$

для нечетного случая;

$$\tilde{\lambda}_n = \left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right)^4 - \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right)^2 \left(\int_{-1}^{0} a(t) e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)t - \frac{\pi}{2} - 2\pi n} dt + \right. \\ \left. + \int_{0}^{1} a(t) e^{\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)t - \frac{\pi}{2} - 2\pi n} dt\right) - \\ -\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right)^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{nj} a_{jn}}{\lambda_j - \lambda_n} + O\left(\frac{1}{n^4}\right), n \in \mathbb{N},$$

для четного случая, где $a_{nj} = \int_{-1}^{1} a(t)\tilde{e}_j(t) e_n(t) dt$, $n, j \in \mathbb{N}$,

$$\tilde{e}_j(t) = \frac{1}{\alpha_j}\left(\cos\mu_j \operatorname{ch}(\mu_i t) + \operatorname{ch}\mu_j \cos(\mu_j t)\right), j \in \mathbb{N},$$

для нечетного случая,

$$\tilde{e}_j(t) = \frac{1}{\beta_j}\left(\sin\mu_j \operatorname{sh}(\mu_i t) + \operatorname{sh}\mu_j \sin(\mu_j t)\right), j \in \mathbb{N},$$

для четного случая.

Подчеркнем, что последовательность $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n\right)^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{nj} a_{jn}}{\lambda_j - \lambda_n}, n \geq 1$ имеет порядок $O\left(\frac{1}{n}\right)$, при $n \to \infty$, если функция a непрерывно дифференцируема.

Отметим, что из теоремы 1 следует существование такого $m \in \mathbb{N}$, что спектр оператора $L = A - B$ представим в виде

$$\sigma(L) = \sigma_{(m)} \bigcup \left(\bigcup_{n \geq m+1} \sigma_n\right),$$

где $\sigma_{(m)}$ — конечное множество, с числом точек не превосходящих m, а множество $\sigma_n = \{\tilde{\lambda}_n\}$ одноточечно, и собственные значения $\tilde{\lambda}_n, n \geq m+1$, определяются в теореме 1.

Пусть $\widetilde{P}_{(m)}$, $\widetilde{P}_n$, $n \geq m+1$, — спектральные проекторы Рисса, построенные по оператору L и множествам $\sigma_{(m)}$, σ_n, $n \geq m+1$, соответственно. Далее через $P_{(m)}$ обозначается проектор $\sum_{k \leq m} P_k$, который является проектором Рисса, построенным по конечному множеству $\sigma_m^0 = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$. Для любого подмножества $\Omega \subset \mathbb{N} \setminus \sigma_m^0$ (не обязательно конечного) символом $P(\Omega)$ обозначим спектральный проектор $\sum_{k \in \Omega} P_k$, а через $\tilde{P}(\Omega)$ — спектральный проектор $\sum_{k \in \Omega} \tilde{P}_k$. Отметим, что

$$I = \sum_{k \geq m+1} P_k + P_{(m)}, \quad I = \sum_{k \geq m+1} \tilde{P}_k + \tilde{P}_{(m)}.$$

Далее для любого подмножества $\Omega \subset N$ через $k(\Omega)$ обозначим число $\min_{k \in \Omega} k$.

Теорема 2. *Для любого подмножества $\Omega \subset \mathbb{N} \setminus \sigma_m^0$ имеет место оценка (равномерной безусловной равносходимости спектральных разложений)*

$$\left\|\tilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\right\|_2 \leq \frac{C}{k(\Omega)} \|X_0\|_2, \tag{1}$$

где $C > 0$ — постоянная, не зависящая от Ω, и символ $\|X\|_2$ обозначает норму Гильберта — Шмидта оператора X из идеала $\mathfrak{S}(L_2[-1,1])$ операторов Гильберта—Шмидта, действующих в $L_2[-1,1]$ (см. [6]).

Следствие 1. *В условиях теоремы 2 имеют место следующие оценки*

$$\left\|\tilde{P}_n - P_n\right\|_2 \le \frac{M}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $M > 0$ *— некоторая константа.*

Следствие 2. *Имеет место следующее свойство*

$$\sum_{n \ge m+1} \left\|\tilde{P}_n - P_n\right\|_2^2 < \infty.$$

Теорема 3. *Имеют место оценки*

$$\left\|\tilde{P}_m + \sum_{k=m+1}^{n} \tilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{k=m+1}^{n} P_k\right\|_2 \le \frac{C}{n+1},$$
$$n \ge m+1,$$

где $C > 0$ *— постоянная из (1), не зависящая от* n.

Следствие 3. *Имеет место равномерная сходимость спектральных разложений операторов* $L = A - B$ *и* A:

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\tilde{P}_m + \sum_{k=m+1}^{n} \tilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{k=m+1}^{n} P_k\right\|_2 = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Турбин М. В.* Визуализация аттракторов для математической модели движения слабоконцентрированных водных растворов полимеров / М. В. Турбин, С. К. Кондратьев // Вестник ВГУ сер. физ. матем. — 2010. — Т. 2. — С. 142—163.

2. *Баскаков А. Г.* Гармонический анализ линейных операторов / А. Г. Баскаков — Воронеж: Изд-во ВГУ, 1987. — 165 с.

3. *Баскаков А. Г.* Спектральный анализ возмущённых неквазианалитических и спектральных операторов / А. Г. Баскаков // Изв. РАН. Сер. матем. — 1994. — Т. 58. — № 4. — С. 3—32.

4. *Баскаков А. Г.* Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом / А. Г. Баскаков, А. В. Дербушев, А. О. Щербаков // Известия РАН. сер. матем. — 2011. — Т. 75. — № 3. — С. 3—28.

5. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости / В. В. Болотин. — М.: Гос. изд-во физ-мат. литературы, 1961. — 340 с.

6. *Гохберг И. Ц.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. — М.: Наука, 1965. — 448 с.

Поляков Д. М. — студент математического факультета, Воронежский государственный университет

E-mail: DmitryPolyakow@mail.ru

Тел.: 8-919-244-56-45

Polyakov D. M. — student of mathematics faculty, Voronezh State University

E-mail: DmitryPolyakow@mail.ru

Tel.: 8-919-244-56-45