УДК 517.958

ОБ ОДНОЙ АПРИОРНОЙ ОЦЕНКЕ РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ*

В. П. Орлов

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 2.03.2012 г.

Аннотация: Установлена первая априорная оценка решений для одной модели динамики вязкоупругой регуляризованной сплошной среды.
Ключевые слова: априорные оценки, вязкоупругая сплошная среда, плоский случай.

Abstract: First apriori estimate to solutions for some model of dynamics of viscoelastic continuous medium in the planar case are established.
Key words: viscoelastic continuous medium, apriori estimates, planar case.

ВВЕДЕНИЕ

В $Q_T = [0,T]\times\Omega$, где $\Omega \in R^2$ — ограниченная область с гладкой границей Γ рассматривается начально-краевая задача

$$\partial v(t,x)/\partial t + \sum_{i=1}^{2} v_i(t,x)\partial v(t,x)/\partial x_i -$$
$$-\mu_0\Delta v(t,x) - \mu_1 Div\int_{\tau(t,x)}^{t}\exp\big(\lambda(s-t)\big)\times$$
$$\times E(v)\big(s,z(s;t,x)\big)\,ds + \operatorname{grad} p(t,x) = f(t,x), \quad (1.1)$$
$$(t,x)\in Q_T;\ \operatorname{div} v(t,x) = 0, (t,x)\in Q_T;$$
$$\int_\Omega p(t,x)\,dx = 0;\ t\in[0,T];$$

$$v(0,x) = v^0(x),\ x\in\Omega_0, \qquad (1.2)$$

$$v(t,x) = v^1(x), (t,x)\in S_T = \\ = \{(t,x): t\in[0,T], x\in\Gamma.\} \qquad (1.3)$$

Здесь $v(t,x) = \big(v_1(t,x), v_2(t,x)\big)$ и $p(t,x)$ искомые векторная и скалярная функции, означающие скорость движения и давление среды, $f(t,x)$ плотность внешних сил, $\mathcal{E}(v) = \{\mathcal{E}_{ij}\}_{i,j=1}^2$ тензор скоростей деформаций, т.е. матрица с коэффициентами $\mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2}\big(\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i\big)$. Дивергенция $\mathrm{Div}\mathcal{E}(v)$ матрицы определяется как вектор с компонентами — дивергенциями строк, $\mu_0 > 0$, μ_1, λ — неотрицательные константы, v^0, v^1 заданные начальное и граничное значения функции v. Отметим, что необходимо $v^0(x) = v^1(x), x\in\Gamma$. Вектор-функция $z(\tau;t,x)$ определяется как решение задачи Коши (в интегральной форме)

$$z(\tau;t,x) = x + \int_t^\tau v\big(s, z(s;t,x)\big)\,ds, \\ \tau, t\in[0,T],\ \ x\in\Omega. \qquad (1.4)$$

Функция $\tau(t,x)$ определяется как

$$\tau(t,x) = \inf\{\tau : z(s;t,x)) \in \Omega, \tau \le s \le t\}. \qquad (1.5)$$

В случае однородного граничного условия данная задача достаточно хорошо изучена. При $\mu_1 = 0$ система уравнений (1.1.1)—(1.1.3) является системой уравнений Навье—Стокса, описывающей движение ньютоновских жидкостей. При $\mu_1 \ne 0$ данная система (1.1.1)—(1.1.3), описывает динамику вязкоупругих жидкостей. Нелокальная теорема существования и единственности слабых и сильных в [2], [3] при $\tau(t,x) = 0$ и $v^1(x) = 0$ для регуляризованной задачи (1.1.1)—(1.1.5), получающейся заменой (1.1.4) на регуляризованную задачу Коши

$$z(\tau;t,x) = x + \int_t^\tau S_\delta v\big(s, z(s;t,x)\big)\,ds, \\ \tau\in[0,T],\ \ (t,x)\in Q_T. \qquad (1.6)$$

Введение оператора S_δ, регуляризующего поле скоростей, объясняется тем фактом, что поле скоростей v, определяемое как слабое или сильное обобщенное решение задачи (1.1.1)—(1.1.2) в классах функций, суммируемых с квадратом вместе с производными, не позволяет восстановить траектории z движения частиц, или же траектории не обладают свойствами регулярности, необходимыми для корректности модели (см.[2]).

Появление неоднородного граничного условия $v^1(x) \ne 0$ приводит к тому, что траектория

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 04-01-0008.

частицы жидкости, которая в момент t попадает в точку x, может начинаться с точки границы в момент $\tau(t,x)>0$. В связи с этим возникает интеграл с переменным нижним пределом $\tau(t,x)$, зависящим от t и x. Это сильно усложняет задачу, поскольку сказывается на дифференциальных свойствах выражения под знаком Div.

Общеизвестна роль априорных оценок при доказательстве разрешимости различных задач. Нашей целью является доказательство первой априорной оценки решений регуляризованной задачи (1.1.1)—(1.1.4) с неоднородным граничным условием.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для $u=(u_1,\cdots,u_n)$, $v=(v_1,\cdots,v_n)$ обозначим $uv=u_iv_i$. Через $|u|$ будем обозначать евклидову норму вектора или матрицы. При этом здесь и далее мы применяем соглашение о суммировании по повторяющимся индексам. Мы будем использовать обычные обозначения $L_p(\Omega)$, $L_p(Q)$, $W_q^k(\Omega)$, $W_q^{k,m}(Q)$ для вещественных пространств Лебега и Соболева функций на Ω и Q. При этом эти обозначения используются для скалярных, векторных или матричных функций, что понятно из контекста. Обозначим через (u,v) скалярное произведение в $L_2(\Omega)$ для функций $u,v\in L_2(\Omega)$. Норма функции u в $L_2(\Omega)$, $L_2(Q)$, $W_2^k(\Omega)$, $W_2^{k,m}(Q)$ в каждом из пространств обозначается соответственно символом $|u|_0$, $\|u\|_0$, $|u|_k$, $\|u\|_{k,m}$. Пусть $D(\Omega)$ — множество функций класса C^∞ с компактным носителем в Ω и $D_s(\Omega)=\{u\in D(\Omega):\mathrm{div}u=0\}$. Обозначим через H замыкание $D_s(\Omega)$ в норме пространства $L_2(\Omega)$ и через V — замыкание $D_s(\Omega)$ в норме пространства $W_2^1(\Omega)$. При этом норма $\|u\|_V$ функции в пространстве V определяется равенством $\|u\|_V=|u|_1$. Обозначим через $\mathcal{P}$ ортопроектор в $L_2(\Omega)$ на H. Пусть $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ — замыкание $D(\Omega)$ в норме пространства $W_2^1(\Omega)$.

Всюду ниже будем предполагать, что $v^1(x)$ является гладкой функцией, заданной на границе Γ и удовлетворяющей естественному условию

$$\int_\Gamma v^1(x)\cdot n(x)dx=0. \tag{2.1}$$

Здесь $v^1(x)\cdot n(x)$ скалярное произведение векторов в R^2, $n(x)$ вектор внешней нормали к Γ в точке $x\in\Gamma$. Тогда существует гладкая функция $\hat v(x)$, определенная в $\bar\Omega$, удовлетворяющая условию $\mathrm{div}v(t,x)=0$ и совпадающая с на $v^1(x)$ (см.[4], с. 34), причем $\|\hat v(x)\|_{C(\bar\Omega)}\le M\|v(x)\|_{C(\Gamma)}$.

Рассмотрим в H линейный неограниченный оператор A, определенный на области определения $D(A)=W_2^2(\Omega)\cap H\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ формулой $Av=-\mathcal{P}\Delta v$. Оператор A является (см.[4], гл. 2, р. 4, с. 54) положительно определенным самосопряженным оператором. Определим регуляризатор $S_\delta:L_2(\Omega)\to C^2(\Omega)$ как $\tilde u=S_\delta u$, где

$$\tilde u(x)=\hat v(x)+(I+\delta A)^{-1-\kappa}\big(u(x)-\hat v(x)\big),\quad \delta>0,\ \kappa>0. \tag{2.2}$$

Заметим, что в силу непрерывности вложений $W_2^\sigma(\Omega)\subset C^1(\Omega)$ (см. [5], с. 408), $D(A^\alpha)\subset W_2^{2\alpha}(\Omega)$, $\alpha>0$ (см. [7]), для

$$\tilde v(t,x)=S_\delta v(t,x) \tag{2.3}$$

при $v(t,x)\in W_2^{0,1}(Q_T)$ справедливо включение $\tilde v(t,x)\in L_1\big(0,T;C^2(\bar\Omega)\big)$. Нам достаточно, чтобы κ было сколь угодно мало. Имеются и другие конструкции оператора регуляризации S_δ. Все они обладают свойством, что при $\delta\to0$ имеет место сходимость $S_\delta u(x)$ к $u(x)$.

Рассмотрим задачу Коши

$$z(\tau;t,x)=x+\int_t^\tau\tilde v\big(s,z(s;t,x)\big)ds,\quad \tau\in[0,T],\ (t,x)\in Q_T. \tag{2.4}$$

В [6] было установлено, что если $\tilde v(t,x)\in L_1(0,T;C^1(\bar\Omega)\cap\overset{\circ}{C}(\bar\Omega))$, то задача Коши (2.4) однозначно нелокально разрешима и получены оценки решений при $\tau\in[0,T]$. В нашем случае $\tilde v(t,x)$ не обращается, вообще говоря, на границе в нуль, но, продолжив $\tilde v(t,x)$ гладким образом по x на некоторую окрестность $\bar\Omega$, вне которой продожение обращается в нуль, для продолженной задачи Коши справедлив результат ([6]). Ясно, что сужение решений продолженной задачи на Q_T дает однозначную разрешимость задачи (2.4) при всех $(t,x)\in Q_T$, однако $z(\tau;t,x)$ определяется лишь для $\tau\in[\tau(t,x),T]$.

Нас будут интересовать решения задачи Z, а именно, задачи нахождения решений задачи (1.1.1)—(1.1.3), (1.1.5) в которой z является решением задачи Коши (2.4). Под решением задачи Z будем понимать пару функций (v,p), $v\in W_2^{1,2}(Q_T)$, $p\in W_2^{0,1}(Q_T)$, удовлетворяющую при п.в. (t,x) уравнениям (1.1.1), и условиям (1.1.2)—(1.1.3).

Сформулируем основной результат.

Относительно поведения функции $v^1(x)$ на границе будем предполагать, что она вырождается лишь на конечном множестве точек границы $\mathcal{M} = \{z_1, \dots, z_k\}$, т.е.

$$v^1(z) \cdot n(z) \neq 0,\ z \notin \mathcal{M}. \tag{2.5}$$

Здесь $n(z)$ — вектор внешней нормали в точке $z \in \Gamma$.

Теорема 2.1. *Пусть* $f \in L_2(0,T;H)$, $v^0 \in L_2(\Omega)$, $v^1 \in C^1(\Gamma)$. *Пусть выполняется условие (2.5). Тогда для решения задачи* Z *справедлива априорная оценка*

$$\begin{gathered}\left|v(t,x)\right|_0^2 + \int_0^t \left|v(s,x)\right|_1^2 ds \leq \\ \leq M\left(\left\|f\right\|_0^2 + \left\|\hat{v}\right\|_{C^1(\Omega)}^4 + \left|v\right|_0^2\right),\ 0 \leq t \leq T.\end{gathered} \tag{2.6}$$

Непосредственно доказательство теоремы 2.1 проводится в разделе 4. В разделе 3 устанавливаются вспомогательные утверждения.

Возникающие при оценках в неравенствах и цепочках неравенств константы, не зависящие от существенных параметров, обозначаются, как правило, одной буквой M, помечаясь при необходимости индексами и в скобках параметрами, от которых они зависят.

Всюду ниже $v_x(x)$ означает матрицу Якоби вектор-функции $v(x)$, $v_{xx}(x)$ — тензор, состоящий из вторых производных $\partial^2 v_k(x) / \partial x_i \partial x_j$.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Установим сначала некоторые свойства оператора регуляризации S_δ. Пусть $v \in W_2^1(\Omega)$, $\tilde{v}(x) = \hat{v}(x) + (I + \delta A)^{-1-\kappa}\left(v(x) - \hat{v}(x)\right), \delta > 0, \kappa > 0$.

Лемма 3.1. *Справедливы неравенства*

$$\left\|\tilde{v}(x)\right\|_{C^1(\Omega)} \leq M\left(\left|v(x)\right|_1 + \left\|\hat{v}(x)\right\|_{C^1(\Gamma)}\right), \tag{3.1}$$

$$\left\|\tilde{v}(x)\right\|_{C^2(\Omega)} \leq M\left(\left|v(x)\right|_1 + \left\|\hat{v}(x)\right\|_{C^2(\Gamma)}\right). \tag{3.2}$$

Доказательство леммы 3.1. Непосредственное дифференцирование $\tilde{v}(x)$ дает

$$\begin{gathered}\left\|\tilde{v}_{xx}(x)\right\|_{C(\Omega)} \leq \left\|\hat{v}_{xx}(x)\right\|_{C(\Omega)} + \\ + \left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(I + \delta A)^{-1-\kappa/2}(I + \delta A)^{-\kappa/2}\left(v(x) - \hat{v}^1(x)\right)\right\|_{C(\Omega)}.\end{gathered}$$

Воспользовавшись непрерывностью вложения $\frac{\partial^2}{\partial x^2} W_2^l(\Omega) \subset C(\Omega)$, $3 < l$, (см. [9], стр. 145) и тем, что $D(A^\alpha) \subset W_2^{2\alpha}(\Omega)$, $\alpha > 0$ (см. [7]), получаем, что

$$\begin{gathered}\tilde{v}_{xx}(x)\|\ \|_{C(\Omega)} \leq \left\|\hat{v}_{xx}(x)\right\|_{C(\Omega)} + \\ + \left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(I + \delta A)^{-1-\kappa/2}\right\|_{L_2(\Omega)\to C(\Omega)} \times \\ \left\|(I + \delta A)^{-\kappa/2}\left(v(x) - \hat{v}(x)\right)\right\|_{L_2(\Omega)} \leq \\ \leq M\left(\left\|\hat{v}(x)\right\|_{C^2(\Omega)} + \left\|v(x) - \hat{v}(x)\right\|_{W_2^1(\Omega)}\right) \leq \\ \leq M\left(\left\|\hat{v}(x)\right\|_{C^2(\Omega)} + \left\|v(x)\right\|_{W_2^1(\Omega)}\right).\end{gathered}$$

Неравенство (3.1) доказано. Неравенство (3.2) доказывается аналогично.

Лемма 3.1 доказана.

Из леммы 3.1 вытекает, что если $v(t,x) \in W^{0,1}\left(Q_T\right)$, то для $\tilde{v}(t,x)$ справедливы неравенства

$$\left\|\tilde{v}(t,x)\right\|_{C\left(0,T;C^2(\Omega)\right)} \leq M\left\|v(t,x)\right\|_{W_2^{0,1}}. \tag{3.3}$$

Установим некоторые оценки решений $z(\tau;t,x)$ задачи Коши (2.4).

Лемма 2.2. *Справедливо неравенство*

$$\begin{gathered}\left\|z_x(\tau;t,x)\right\|_{C(\Omega)} \leq M\left(\left\|v\right\|_{0,1}, \left\|v^1\right\|_{C^1(\Gamma)}\right), \\ \tau(t,x) \leq \tau \leq t.\end{gathered} \tag{3.4}$$

Доказательство леммы 2.2. Из (2.4) следует, что

$$z_x(\tau;t,x) = I + \int_t^\tau \tilde{v}_x\left(s, z(s;t,x)\right) z_x(s;t,x) ds \tag{3.5}$$

при $\tau(t,x) \leq \tau \leq t \leq T$, $x \in \Omega$. Здесь I — единичная матрица.

Из (3.4) и (3.1) следует, что

$$\begin{gathered}\left\|z_x(\tau;t,x)\right\|_{C(\Omega)} = \\ = 1 + \int_\tau^t \left\|\tilde{v}_x\left(s, z(s;t,x)\right)\right\|_{C(\Omega)} \left\|z_x(s;t,x)\right\|_{C(\Omega)} ds \leq \\ \leq 1 + M\int_\tau^t \left\|\tilde{v}_x(s,x)\right\|_{C(\Omega)} \left\|z_x(s;t,x)\right\|_{C(\Omega)} ds \leq \\ \leq 1 + M\int_\tau^t \left(\left\|v_x(s,x)\right\|_1 + \left\|\hat{v}(x)\right\|_{C(\Omega)}\right)\left\|z_x(s;t,x)\right\|_{C(\Omega)} ds.\end{gathered}$$

Из последнего интегрального неравенства следует, что

$$\begin{gathered}\left\|z_x(\tau;t,x)\right\|_{C(\Omega)} \leq \\ \leq \exp\left(M\int_0^t \left(\left\|v_x(s,x)\right\|_1 + \left\|\hat{v}(x)\right\|_{C(\Omega)}\right) ds = \right. \\ = \exp\left(M\int_0^T \left\|v_x(s,x)\right\|_1 ds\right)\exp\left(M\int_0^T \left\|\hat{v}(x)\right\|_{C^1(\Omega)} ds\right) \leq \\ \leq \exp\left(MT^{1/2}\left\|v(t,x)\right\|_{0,1}\right)\exp\left(MT\left\|v^1(x)\right\|_{C^1(\Gamma)}\right).\end{gathered}$$

Лемма 2.2 доказана.

Лемма 3.3. *Справедливо неравенство*

$$\left\|z_{xx}(\tau;t,x)\right\|_{C(\Omega)} \le M\left(\|v\|_{0,1}, \left\|v^1\right\|_{C^1(\Gamma)}\right), \quad \tau(t,x) \le \tau \le t. \tag{3.6}$$

Доказательство леммы 3.3. Дифференцируя (3.5) имеем

$$z_{xx}(\tau;t,x) = \int_t^\tau \tilde{v}_{xx}\left(s, z(s;t,x)\right) z_x(s;t,x) z_x(s;t,x) ds +$$
$$+\int_t^\tau \tilde{v}_x\left(s, z(s;t,x)\right) z_{xx}(s;t,x) z_x(s;t,x) ds.$$

Отсюда следует, что

$$\left\|z_{xx}(\tau;t,x)\right\|_{C(\Omega)} \le$$
$$\le \int_\tau^t \left\|\tilde{v}_{xx}\left(s, z(s;t,x)\right)\right\|_{C(\Omega)} \left\|z_x(s;t,x)\right\|^2_{C(\Omega)} ds +$$
$$+\int_\tau^t \left\|\tilde{v}_x\left(s, z(s;t,x)\right)\right\|_{C(\Omega)} \left\|z_{xx}(s;t,x)\right\|_{C(\Omega)} ds = I_1 + I_2.$$

Из (3.2) и (3.4) вытекает, что

$$I_1 \le M \int_\tau^t (\left|v_x(s,x)\right|_1 + \left\|v^1(x)\right\|_{C^2(\Gamma)}) \left\|z_x(s;t,x)\right\|^2_{C(\Omega)} ds \le$$
$$\le M\left(\|v\|_{0,1}, \left\|v^1\right\|_{C^1(\Gamma)}\right) = M_3.$$

Из (3.2) следует, что

$$I_2 \le M \int_0^t \left(\left|v(s,x)\right|_0 + \left\|v^1(x)\right\|_{C^1(\Gamma)}) \left\|z_{xx}(s;t,x)\right\|^2_{C(\Omega)}\right) ds \le$$
$$\le M\left(\|v\|_{0,1}, \left\|v^1\right\|_{C^1(\Gamma)}\right) \int_\tau^t \left\|z_{xx}(s;t,x)\right\|_{C(\Omega)} \Bigg) ds =$$
$$= M_4 \int_\tau^t \left\|z_{xx}(s;t,x)\right\|_{C(\Omega)} ds.$$

Следовательно,

$$\left\|z_{xx}(\tau;t,x)\right\|_{C(\Omega)} ds \le M_3 + M_4 \int_\tau^t \left\|z_{xx}(s;t,x)\right\|_{C(\Omega)} ds.$$

Из последнего интегрального неравенства следует (3.6).

4. СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $\tau(t,x)$.

Установим некоторые свойства функции $\tau(t,x)$.

Представим Ω в виде $\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_- \cup \Omega_0$, где

$$\Omega_+ = \left\{x : \tau(t,x) > 0, \left(v^1(z), n(z)\right) \ne 0, \right.$$
$$\left. z = z\left(\tau(t,x);t,x\right), x \in \Omega\right\};$$
$$\Omega_- = \left\{x : \tau(t,x) = 0, z\ \left(\tau(t,x);t,x\right) \in \Omega\right\};$$
$$\Omega_0 = \Omega \setminus (\Omega_+ \cup \Omega_-).$$

Справедлива

Лемма 4.1. *Справедливы следующие утверждения:*

1) Множество Ω_- является открытым;

2)множество Ω_+ является открытым и функция $\tau(t,x)$ непрерывна на Ω_+;

3) множество Ω_0 имеет меру нуль;

4) $m((\Omega_+ \cup \Omega_-) = m(\Omega)$.

Здесь $m(B)$ мера множества B.

Доказательство леммы 4.1. Пусть $x^0 \in \Omega_-$. Тогда $z(\tau;t,x)$ определена при $\tau \in [0,t]$ и $y^0 = z\left(\tau;t,x^0\right) \in \Omega$. Так как $\tilde{v} \in C\left(0,T;C^2(\overline{\Omega})\right)$, то $y = z(\tau;t,x)$ непрерывно зависит от начальных данных. Следовательно, при x, близких к x^0, $y = z(\tau;t,x)$ близко к y^0. Отсюда следует открытость Ω_-. Утверждение 1) доказано.

Отметим, что $\tau(t,x) \equiv 0$ на Ω_-.

Пусть $x^0 \in \Omega_+$. Это означает, что $\tau^0 = \tau(t,x^0) \in (0,t)$ и $y^0 = z\left(\tau(t,x^0);t,x^0\right) \in \Gamma$. Покажем, что $\tau(t,x)$ непрерывно в точке x^0. Пусть $x^n \to x^0$, $y^n = z\left(\tau(t,x^n);t,x^n\right)$. Очевидно, что $y^n \in \Gamma$. Допустим, что $\tau^n = \tau\left(t,x^n\right) \not\to \tau\left(t,x^0\right)$. Тогда существует подпоследовательность, для которой либо $\tau^{n_k} > \tau^0 + \varepsilon$, либо $\tau^{n_k} < \tau^0 - \varepsilon$ при некотором малом $\varepsilon > 0$. Пусть (отождествим последовательность с подпоследовательностью) $\tau^n > \tau^0 + \varepsilon$. Тогда $y^n \in \Gamma$. Будем считать, что $\tau^n \to \tau^* \ge \tau^0 + \varepsilon$, а $y^n \to y^*$ (Γ — компактное множество). Тогда в силу непрерывности решения задачи Коши по начальным данным, переходя к пределу в $y^n = z\left(\tau\left(t,x^n\right);t,x^n\right)$ получаем, $y^* = z\left(\tau\left(t,x^*\right);t,x^*\right)$ причем $\tau^* > \tau^0$. Отсюда следует, что $\tau\left(t,x^0\right) \ge \tau^* > \tau^0 = \tau\left(t,x^0\right)$. Получили противоречие. Аналогично рассматривается случай $\tau^n < \tau^0 - \varepsilon$.

Непрерывность $\tau(t,x);t,x)$ на Ω_+ установлена. Непрерывность $\tau(t,x)$ в точке x^0 означает, что в некоторой окрестности x^0 значение $\tau(t,x) > 0$ в силу $\tau\left(t,x^0\right) > 0$. Открытость Ω_+ установлена. Утверждение 2) доказано.

Докажем утверждение 3). Пусть $\hat{\Omega} = \left\{y : z(t;0,y) \in \Gamma\right\}$. Ясно, что $\Omega_0 \subset \hat{\Gamma}$. Так как $\operatorname{div}\tilde{v}(t,x) = 0$, то определитель $\det z_x(\tau;t,x)$ отображения $y = z_x(\tau;t,x) = 0$ равен единице, так что отображение $x = z(t;0,y)$ Γ на $\hat{\Omega}$ локально взаимно однозначно. Кроме того, оно является гладким. Поэтому отображение $x = z(t;0,y)$ границы Γ на $\hat{\Gamma}$ сохраняет меру. Множество $\Omega_0 \subset \hat{\Gamma}_0$, следовательно его мера равна нулю, так как мера Γ и $\hat{\Omega}$ равна нулю. Следовательно, $m\left(\Omega_0\right) = 0$. Утверждение 3) доказано.

Утверждение 4) следует из 3) и представления $\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_- \cup \Omega_0$.

Итак, нами показано, что множество $\Omega_- \cup \Omega_+$ является множеством полной меры на $\Omega\Big(m\big(\Omega_- \cup \Omega_+\big) = m(\Omega),\ m$ — мера множества). Лемма 4.1 доказана.

Замечание. Из леммы 4.1 следует, что функция $\tau(t,x)$ непрерывна на $\Omega_- \cup \Omega_+$.

Пусть граница Γ задается уравнением $\Phi(x) = 0$, где $\Phi(x)$ — гладкая функция.

Лемма 4.2. *Функция $\tau(t,x)$ дифференцируема на Ω_+, и справедливо соотношение*

$$\frac{\partial \tau(t,x)}{\partial x_i} =$$

$$= -\left(\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}\big(z\big(\tau(t,x);t,x\big)\big)\frac{\partial z_k}{\partial x_i}\big(\tau(t,x);t,x\big)\right)\times \tag{4.1}$$

$$\times\Big(\nabla\Phi\Big(z\big(\tau(t,x);t,x\big)\Big)v^1\Big(z\big(\tau(t,x);t,x\big)\Big)^{-1},$$

$$i = 1,2.$$

Доказательство леммы 4.2. Прежде всего отметим, что функция $\tau(t,x)$ дифференцируема на Ω_+. Для этого нужно написать соответствующие конечно-разностные отношения и перейти к пределу, получив соответствующие линейные обыкновенные дифференциальные уравнения для производных $\tau(t,x)$, так же, как в [8], стр. 120, используя гладкость $\tilde{v}$ и непрерывность $\tau(t,x)$.

Так как

$$\Phi\Big(z\big(\tau(t,x);t,x\big)\Big) = 0,\ x \in \Omega_+, \tag{4.2}$$

то дифференцируя (4.2), имеем

$$\Big(\nabla\Phi\Big(z\big(\tau(t,x);t,x\big)\Big), \tilde{v}\Big(\tau(t,x), z\big(\tau(t,x);t,x\big)\Big)\Big)\times$$

$$\times\frac{\partial \tau(t,x)}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi\Big(z\big(\tau(t,x);t,x\big)\Big)}{\partial x_1}\frac{\partial z_1\big(\tau(t,x);t,x\big)}{\partial x_i} + \tag{4.3}$$

$$+\frac{\partial \Phi\Big(z\big(\tau(t,x);t,x\big)\Big)}{\partial x_2}\frac{\partial z_2\big(\tau(t,x);t,x\big)}{\partial x_i} = 0,\ i = 1,2.$$

Так как

$$\Big(\nabla\Phi\Big(z\big(\tau(t,x);t,x\big)\Big), \tilde{v}\big(\tau(t,x), z(\tau(t,x);t,x\big)\Big) =$$

$$= \Big(\nabla\Phi\Big(z\big(\tau(t,x);t,x\big)\Big), \tilde{v}^1\Big(z(\tau(t,x);t,x\big)\Big) \neq 0$$

на Ω_+, то из (4.3) вытекает (4.1).

Лемма 4.1 доказана.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1

Без ограничения общности будем считать, что $\lambda = 0$. Умножив (1.1) на обращающуюся на границе Γ функцию $v(t,x) - \hat{v}(x)$ скалярно в $L_2(\Omega)$ и воспользовавшись стандартными соображениями (см. [4], стр. 141) при интегрировании по частям, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big|v(t,x)\big|_0^2 + \mu_0\big|v_x(t,x)\big|_0^2 = I, \tag{5.1}$$

$$I = \big(f(t,x), v(t,x)\big) - \big(f(t,x), \hat{v}(x)\big) -$$
$$-\mu_0\big(\mathcal{E}(v)(t,x), \mathcal{E}(\hat{v})(x)\big) -$$
$$\mu_1\Big(\int_{\tau(t,x)}^{t}\mathcal{E}(v)\big(s, z(s;t,x)ds, \mathcal{E}(v)(t,x)\big) +$$
$$+\mu_1\Big(\int_{\tau(t,x)}^{t}\mathcal{E}(v)\big(s, z(s;t,x)ds, \mathcal{E}(\hat{v})(x)\big) + \tag{5.2}$$
$$+\frac{1}{2}\left(\left(v_i v_j, \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{2}\left(v_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \hat{v}_j\right)\right) +$$
$$+\frac{d}{dt}\big(v(t,x), \hat{v}(x)\big) = \sum_{k=1}^{7} I_k.$$

Здесь мы воспользовались легко проверяемым с помощью интегрирования по частям и соленоидальности $v(t,x)$ соотношением

$$\left(v_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \big(v_j - \hat{v}_j\big)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int_\Omega v_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\hat{v}_j\,dx + \int_\Omega v_i v_j\frac{\partial \hat{v}_j}{\partial x_i}\,dx\right). \tag{5.3}$$

Легко видеть, что

$$\big|I_1\big|_0 \le M\big|v(t,x)\big|_0\big|f(t,x)\big|_0,$$
$$\big|I_2\big|_0 \le M\big|\hat{v}(x)\big|_0\big|f(t,x)\big|_0. \tag{5.4}$$

Оценим I_3, I_4. С помощью несложных преобразований получаем, что

$$\big|I_3\big|_0 \le M\big|v_x(t,x)\big|_0\big|\hat{v}_x(x)\big|_0 \le$$
$$\le \varepsilon\big|v_x(t,x)\big|_0^2 + C(\varepsilon)\big|\hat{v}_x(x)\big|_0^2, \tag{5.5}$$

$$\big|I_4\big|_0^2 \le M\left|\int_{\tau(t,x)}^{t}(\mathcal{E}(v)(s, z(s;t,x)ds\right|_0\big|v_x(t,x)\big|_0 \le$$
$$\le M\left(\int_\Omega\int_{\tau(t,x)}^{t}\big|v_x(s, z(s;t,x)\big|ds\big|^2dx\right)^{1/2}\big|v_x(t,x)\big|_0 \le$$
$$\le M\left(\int_\Omega\int_{\tau(t,x)}^{t}\big|v_x(s, z(s;t,x)\big|^2dsdx\right)^{1/2}\big|v_x(t,x)\big|_0 \le \tag{5.6}$$
$$\le M\left(\int_\Omega\int_{\tau(t,x)}^{t}\big|v_x(s, z(s;t,x)\big|^2dsdx\right)^{1/2}\big|v_x(t,x)\big|_0 =$$
$$= MI_{41}I_{42}.$$

Оценим I_{41}. Пусть

$$\Omega_s = \big\{x : \tau(t,x) \le s\big\},$$
$$\hat{\Omega}_s = \big\{y : y = z(s;t,x),\ x \in \Omega_s\big\}. \tag{5.7}$$

Нетрудно видеть, что

$$\hat{\Omega}_s = \left\{y : y = z(s;t,x),\, x \in \Omega_s\right\},$$
$$\Omega_s = \left\{x : x = z(t;s,y),\, y \in \hat{\Omega}_s\right\}. \quad (5.8)$$

В силу достаточной гладкости $\tilde{v}(t,x)$ функция $z(s;t,x)$ является непрерывной по совокупности переменных, непрерывно дифференцируемой по x и абсолютно непрерывной по s.

Определим отображение $\Upsilon_s : \Omega \to \Omega$ на области определения $D(\Upsilon_s) : \left\{x : \tau(t,x) \leq s\right\}$ формулой $\Upsilon_s(x) = z(s;t,x),\, x \in D(\Upsilon_s)$. Из свойств $\tau(t,x)$ вытекает, что $D(\Upsilon_s) \cap \Omega_+$, $D(\Upsilon_s) \cap \Omega_-$, $D(\Upsilon_s) \cap \Omega_0$ являются измеримыми, а поэтому и $D(\Upsilon_s)$ измеримо. Кроме того, $\tilde{v}(t,x)$ является соленоидальной и непрерывно дифференцируемой по x, а поэтому отображение Υ_s переводит измеримое множество $\hat{\Omega}_s = D(\Upsilon_s)$ на измеримое множество $\hat{\Omega}_s \subset \Omega$, и якобиан этого отображения равен 1. Таким образом, $z\left(s;t,\hat{\Omega}_s\right) = \Omega_s$.

Введем функцию $\varphi(s,x)$:

$$\varphi(s,x) = 1,\, x \in \Omega_s;\;\; \varphi(s,x) = 0,\, x \not\in \Omega_s.$$

Функция $\varphi(s,x)$ является измеримой по совокупности переменных.

Перепишем I_{41} с помощью $\varphi(s,x)$, избавившись от переменной x в пределе интегрирования и меняя порядок интегрирования, получим

$$I_{41}^2 = \int_\Omega \int_0^t \left|v_x\left(s, z(s;t,x)\right)\right|^2 \varphi(s,x)\,ds\,dx = \quad (5.9)$$
$$\int_0^t \int_\Omega \left|v_x\left(s, z(s;t,x)\right)\right|^2 \varphi(s,x)\,dx\,ds.$$

Отметим, что вне $\operatorname{supp}\varphi(s,x)$ функция $v_x\left(s, z(s;t,x)\right)$ не определена, но произведение $v_x\left(s, z(s;t,x)\right)\varphi(s,x)$ при $(s,x) \not\in \operatorname{supp}\varphi(s,x)$ равно нулю, так что подынтегральное выражение в последнем интеграле имеет смысл.

Делая во внутреннем интеграле, определяющем норму, замену $y = \Upsilon_s(x)$ или, что то же,

$$y = z(s;t,x),\, x \in \Omega_s, \quad (5.10)$$

и учитывая, что якобиан этого отображения равен 1, имеем

$$\int_\Omega \left|v_x(s, z(s;t,x)\right|^2 \varphi(s,x)\,dx =$$
$$= \int_{\Omega_s} \left|v_x(s, z(s;t,x)\right|^2 dx =$$
$$= \int_{\hat{\Omega}_s} \left|v_x(s,y)\right|^2 dy \leq \int_\Omega \left|v_x(s,y)\right|^2 dy \leq \quad (5.11)$$
$$\leq M\left|v(s,x)\right|_1^2.$$

Из (5.6), (5.11) вытекает, что

$$I_4 \leq M\left(\int_0^t \left|v(s,x)\right|_1^2 ds\right)^{1/2} \left|v_x(t,x)\right|_0 \leq$$
$$\leq C(\varepsilon)\int_0^t \left|v(s,x)\right|_1^2 ds + \varepsilon\left|v(t,x)\right|_1^2. \quad (5.12)$$

Используя преобразования, аналогичные применявшимся при оценке I_4, получаем

$$I_5\left|\;\right| \leq M\left(\int_0^t \left|v(s,x)\right|_1^2 ds + \left|\hat{v}(x)\right|_1^2\right). \quad (5.13)$$

Оценим I_6. С помощью интегрирования по частям с учетом того, что $\operatorname{div} v(t,x) = 0$, имеем

$$\left(v_i\,\frac{\partial v}{\partial x_i}, v\right) =$$
$$= -\left(v_i\,\frac{\partial v}{\partial x_i}, v\right) + \int_\Gamma v(t,x)\cdot n(x)\left|v(t,x)\right|^2 dx.$$

Здесь $v(t,x)\cdot n(x)$ скалярное произведение векторов в R^2, $\left|v(t,x)\right|$ норма вектора $v(t,x)$ в R^2. Учитывая граничное условие (1.3), получаем отсюда

$$\left(v_i\,\frac{\partial v}{\partial x_i}, v\right) = \frac{1}{2}\int_\Gamma v^1(x)\cdot n(x)\left|v^1(x)\right|^2 dx. \quad (5.14)$$

Аналогично

$$(v_i\,\frac{\partial v}{\partial x_i}, \hat{v}) = -\left(v_i\,\frac{\partial v}{\partial x_i}, \hat{v}\right) + \int_\Gamma \hat{v}(x)\cdot n(x)\left|v(t,x)\right|^2 dx.$$

Отсюда следует, что

$$\left(v_i\,\frac{\partial \hat{v}}{\partial x_i}, v\right) = \frac{1}{2}\int_\Gamma v^1(x)\cdot n(x)\left|v^1(x)\right|^2 dx. \quad (5.15)$$

Из (5.14) и (5.15) вытекает, что

$$I_6 = -\left(v_i(t,x)\,\frac{\partial \hat{v}(x)}{\partial x_i}, v(t,x)\right). \quad (5.16)$$

С помощью несложных преобразований имеем

$$\left(v_i\,\frac{\partial \hat{v}}{\partial x_i}, v\right) = \left((v_i - \hat{v}_i)\,\frac{\partial \hat{v}}{\partial x_i}, (v_i - \hat{v}_i)\right) +$$
$$+\left(\hat{v}_i\,\frac{\partial \hat{v}}{\partial x_i}, v\right) + \left((v_i - \hat{v}_i)\,\frac{\partial \hat{v}}{\partial x_i}, \hat{v}_i\right) = \quad (5.17)$$
$$= I_{61} + I_{62} + I_{63}.$$

Оценим I_{6k}. Для оценки I_{61} воспользуемся следующим результатом из [1]. Функция $\hat{v}(x)$ является продолжением граничной функции $v^1(x)$ в область Ω, причем таких продолжений много. Из леммы 1.8 (см. [1] , с. 143) и теоремы 2.1 (см. [1] , с. 366) вытекает, что для произвольной граничной функции $v^1(x)$, удовлетворяющей условию (2.1), для любого $\varepsilon > 0$ существует такое продолжение $\hat{v}(x)$, что справедливо неравенство

$$\left|\left(u_i(x)\frac{\partial \hat{v}(x)}{\partial x_i}, u(x)\right)\right| \le \varepsilon \left|u(x)\right|_1^2, \quad \forall u(x) \in V. \quad (5.18)$$

Пусть $\hat{v}(x)$ такое продолжение $v^1(x)$. Тогда из (5.18) следует, что

$$\left|I_{61}\right| = \left|\left(\left(v_i(t,x) - \hat{v}_i(x)\right)\frac{\partial \hat{v}(t,x)}{\partial x_i}, \left(v_i(t,x) - \hat{v}_i(x)\right)\right)\right| \le$$
$$\le \varepsilon \left|v_i(t,x) - \hat{v}_i(x)\right|_1^2 \le 2\varepsilon \left|v(t,x)\right|_1^2 + 2\varepsilon \left|\hat{v}(x)\right|_1^2.$$

Для слагаемого I_{62} имеем

$$\left|I_{62}\right| \le M\int_\Omega \left|v(t,x)\right|\left|\hat{v}_x(x))\right|\left|\hat{v}(x)\right| dx \le$$
$$\le M\left\|v(t,x)\right\|_{L_1(\Omega)} \left\|\hat{v}(x)\right\|_{C^1(\Omega)}^2 \le$$
$$\le \varepsilon \left|v(t,x)\right|_0^2 + C(\varepsilon)\left\|\hat{v}(x)\right\|_{C^1(\Omega)}^4.$$

Аналогичная оценка справедлива и для I_{63}.

Из оценок $I_{6k}, k = 1,2,3$ и неравенства $\left|v\right|_0 \le M\left|v\right|_1, v \in W_2^1(\Omega)$, вытекает, что

$$\left|I_6\right| \le 3\varepsilon \left|v(t,x)\right|_1^2 + M(\varepsilon)\left\|\hat{v}(x)\right\|_{C^1(\Omega)}^4. \quad (5.19)$$

В силу неравенства Корна (см. [10], с. 30)

$$\left|v(t,x)\right|_0^2 \ge M_1\left|v(t,x)\right|_1^2 - M_2\left|v(t,x)\right|_0^2. \quad (5.20)$$

Из (5.1)—(5.2), (5.20) и оценок слагаемых I_k получаем, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\frac{d}{dt}\left|v(t,x)\right|_0^2 + \left|v(t,x)\right|_1^2 \le$$
$$\le M_0\left(\left|f(t,x)\right|_0^2 + \left\|\hat{v}(x)\right\|_{C(\Omega)}^4 + \int_0^t \left|v(s,x)\right|_1^2 ds\right) + \quad (5.21)$$
$$+\frac{d}{dt}\left(v(t,x), \hat{v}(x)\right).$$

Интегрируя по t, получаем

$$\left|v(t,x)\right|_0^2 + \int_0^t \left|v(s,x)\right|_1^2 ds \le$$
$$\le M_0\left(\int_0^t \left|f(s,x)\right|_0^2 ds + \left\|\hat{v}(x)\right\|_{C(\Omega)}^4\right) +$$
$$+\left(v(0,x), \hat{v}(x)\right) + \quad (5.22)$$
$$+M_0\int_0^t\left(\int_0^\xi \left|v(s,x)\right|_1^2 ds + \left|v(\xi,x)\right|_0^2\right)d\xi.$$

Пользуясь оценкой

$$\left|\left(v(0,x), \hat{v}(x)\right)\right| \le \varepsilon\left|v^0(x))\right|_0^2 + C(\varepsilon)\left|\hat{v}(x)\right|_1^2,$$

и (5.22), получаем интегральное неравенство

$$q(t) \le M_1 + M_2\int_0^t q(s)\,|ds, \quad (5.23)$$

где

$$q(t) = \int_0^t \left|v(\tau,x)\right|_1^2 d\tau + \left|v(t,x)\right|_0^2,$$
$$M_1 = M_0\left(\left\|f\right\|_0^2 + \left\|\hat{v}\right\|_{C^1(\Omega)}^4 + \left|v\right|_0^2\right), M_2 = M_0.$$

Из (5.23) вытекает неравенство

$$\left|v(t,x)\right|_0^2 + \int_0^t \left|v(\tau,x)\right|_1^2 d\tau \le$$
$$\le M\left(\left\|f\right\|_0^2 + \left\|\hat{v}\right\|_{C^1(\Omega)}^4 + \left|v\right|_0^2\right), 0 \le t \le T. \quad (5.24)$$

Таким образом, нами установлена теорема 2.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Темам Р.* Уравнение Навье—Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. — М.: Мир, 1987. — 408 с.

2. *Звягин В. Г.* О слабых решениях начально-краевой задачи для регуляризованной модели вязкоупругой жидкости / В. Г. Звягин, В. Т. Дмитриенко // Дифференциальные уравнения. — 2002. — № 12. — Т. 38. — С. 1633—1645.

3. *Звягин В. Г.* О сильных решениях начально-краевой задачи для регуляризованной модели несжимаемой вязкоупругой жидкости / В. Г. Звягин, В. Т. Дмитриенко // Известия ВУЗов. Математика. — 2004. — № 9. — Т. 508. — С. 24—40.

4. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О. А. Ладыженская — М.: Наука, 1970. — 204 с.

5. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы / Х. Трибель — М.: Мир, 1980. — 664 с.

6. *Orlov V. P.* On mathematical models of a viscoelasticity with a memory / V. P. Orlov, P. E. Sobolevskii // Differential and Integral Equations. — 1991. — № 1. — Vol. 4. — P. 103—115.

7. *Соболевский П. Е.* О дробных нормах в банаховом пространстве, порожденном неограниченным оператором / П. Е. Соболевский. — УМН. — 1964. — № 6. — Т. 19. — С. 219—222.

8. *Бибиков Ю. Н.* Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Н. Бибиков. — Ленинград : Изд-во Ленинградского ун-та, 1981. — 232 с.

9. *Бесов О. В.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы / О. В. Бесов и др. — М.: Мир, 1980. — 664 с.

10. *Литвинов В. Г.* Движение нелинейно-вязкой жидкости / В. Г. Литвинов — М.: Наука, 1982. — 376 с.

Орлов В. П. — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования математического факультета, Воронежский государственный университет

E-mail: orlov_vp@mail.ru

Orlov V. P. — Doct. Sc. (Phys. and Math.), professor at the Share of Mathematical Modelling of Department of Mathematics, Voronezh State University

E-mail: orlov_vp@mail.ru