УДК 517.5 : 004.94

ПОСТРОЕНИЕ 5-МЕРНЫХ МАТРИЧНЫХ АЛГЕБР ЛИ С ПОМОЩЬЮ ПАКЕТА MAPLE

Т. Т. З. Нгуен

Воронежский государственный архитектурно-строительный университет

Поступила в редакцию 12.01.2012 г.

Аннотация: Статья связана с задачей изучения аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства. В этой геометрической задаче рассматривается фрагмент, связанный с исследованием большой системы квадратичных уравнений. Посредством компьютерной обработки необходимой информации в статье получено полное решение такой системы в одном важном случае. Описаны все матричные алгебры Ли, отвечающие однородным поверхностям из обсуждаемого случая; получен новый пример однородной алгебраической поверхности.
Ключевые слова: матрица, алгебра Ли, компьютерное моделирование, символьные вычисления, система квадратичных уравнений, аффинное преобразование, однородная поверхность.

Abstract: An article is connected with the problem of studying of affine homogeneous real hypersurfaces of 3-dimensional complex space. A part of this geometrical problem is considered in the article connected with the large system of quadratic equations. By means of computer treatment of necessary information the complete solution is obtained in the article for one important case of such systems. All the Lie algebras are described related with the homogeneous surfaces of case under consideration; one new example is obtained of homogeneous algebraic surface.
Key words: matrix, Lie algebra, computer modeling, symbolic calculations, system of quadratic equations, affine transformation, homogeneous surface.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Настоящая статья связана с изучением аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей комплексного пространства $\mathbb{C}^3$. В этой задаче представляют интерес алгебры Ли, состоящие из комплексных квадратных матриц 4-го порядка вида

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & p \\ B_1 & B_2 & B_3 & s \\ a & b & c & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Для алгебр, отвечающих однородным поверхностям, имеется много ограничений на элементы их матриц (см., например, [1—3]).

Ограничения связаны с тем, что всякая матрица (1) — это представление аффинного векторного поля ($A_k, B_k, a, b, c, p, s, q$ — комплексные константы)

$$Z = \left(A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 w + p\right)\frac{\partial}{\partial z_1} + \left(B_1 z_1 + B_2 z_2 + B_3 w + s\right)\frac{\partial}{\partial z_2} + \left(a z_1 + b z_2 + c w + q\right)\frac{\partial}{\partial w},$$

в пространстве $\mathbb{C}^3$. Касание таким полем Z какой-либо гиперповерхности M этого пространства означает выполнение основного тождества

$$Re\left\{Z(\Phi)\right\}_{|M} \equiv 0. \qquad (2)$$

Здесь Φ — определяющая функция поверхности. В нашей работе мы обсуждаем лишь строго псевдо-выпуклые (СПВ) поверхности, задаваемые вещественно-аналитическими функциями. Каждая из обсуждаемых поверхностей считается проходящей через начало координат пространства $\mathbb{C}^3$.

Разложение в ряд Тейлора определяющей функции любой такой поверхности вблизи начала координат можно считать имеющим вид ([1])

$$v = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \left(\varepsilon_1\left(z_1^2 + z_2^2\right) + \varepsilon_2\left(\overline{z_1^2} + \overline{z_2^2}\right)\right) + F_3(z, \overline{z}, u) + F_4(z, \overline{z}, u) \ldots . \qquad (3)$$

В уравнении (3) индексы у слагаемых $F_3, F_4, \ldots$ — это веса. Весом многочлена $F_{klm}(z,\bar z,u)$ степени k по переменным $z=\left(z_1,z_2\right)$, степени l — по $\bar z=\left(\bar z_1,\bar z_2\right)$, степени m — по переменной u называется сумма $k+l+2m$.

Мы рассматриваем здесь только поверхности *трубчатого типа*, для которых выполняются условия

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\frac{1}{2}.$$

Задача описания аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей комплексного пространства $\mathbb{C}^3$ не решена пока даже в частном случае многообразий трубчатого типа.

Ниже мы введем еще несколько дополнительных условий на коэффициенты уравнения (3). Например, будем считать, что многочлен $F_3(z,\bar z,u)$ не зависит от переменной u.

Замечание. Для всех однородных поверхностей трубчатого типа в пространстве $\mathbb{C}^2$ это требование выполняется (см. [6]).

В [4] показано, что в обсуждаемой ситуации многочлен $F_3(z,\bar z)$ из уравнения (3) аффинно-однородной поверхности трубчатого типа удовлетворяет существенным дополнительным ограничениям.

В свою очередь, в [5] показано, что элементы матрицы (1) выражаются линейным образом через коэффициенты многочлена F_3. В силу сказанного интерес представляют, например, 5-мерные матричные алгебры с базисами вида:

$$E_1=\begin{pmatrix} -6t_1-4it_2+m_1 & -2it_7+n_1 & A_3^{(1)} & 1\\ -2it_3+it_7-n_1 & -2it_4+it_8+m_1 & B_3^{(1)} & 0\\ 4i & 0 & 2m_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$E_2=\begin{pmatrix} 2t_2+m_2 & n_2 & A_3^{(2)} & i\\ 2t_3-t_7-n_2 & t_8+m_2 & B_3^{(2)} & 0\\ 0 & 0 & 2m_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$E_3=\begin{pmatrix} -2it_3+it_7+m_3 & -2it_4+it_8+n_3 & A_3^{(3)} & 0\\ -2it_8-n_3 & -6t_5-4it_6+m_3 & B_3^{(3)} & 1\\ 0 & 4i & 2m_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$E_4=\begin{pmatrix} t_7+m_4 & n_4 & A_3^{(4)} & 0\\ 2t_4-t_8-n_4 & 2t_6+m_4 & B_3^{(4)} & i\\ 0 & 0 & 2m_4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$E_5=\begin{pmatrix} m_5-\frac{1}{2}\mu_1+2i\lambda & n_5 & A_3^{(5)} & 0\\ -\mu_2-n_5 & m_5-\frac{1}{2}\mu_3+2i\lambda & B_3^{(5)} & 0\\ 0 & 0 & 2m_5+2i\lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

Здесь $t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7,t_8,m_k,n_k,\mu_1,\mu_2,\mu_3,\lambda$ — вещественные, а $A_3^{(k)}, B_3^{(k)}$ — комплексные параметры, где $k=\overline{1,5}$.

Всякой алгебре с базисом вида (4) соответствуют аффинно-однородные гиперповерхности. Получать такие поверхности можно, интегрируя алгебры (см. [6]). И получение конкретных алгебр, и их интегрирование — достаточно сложные задачи. В настоящей статье мы решаем первую из этих задач при дополнительных условиях

$$t_1=t_5=0.$$

Тем самым, в статье изучаются матричные алгебры с базисами вида

$$E_1=\begin{pmatrix} -4it_2+m_1 & -2it_7+n_1 & A_3^{(1)} & 1\\ -R_1i-n_1 & -R_2i+m_1 & B_3^{(1)} & 0\\ 4i & 0 & 2m_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$E_2=\begin{pmatrix} 2t_2+m_2 & n_2 & A_3^{(2)} & i\\ R_1-n_2 & t_8+m_2 & B_3^{(2)} & 0\\ 0 & 0 & 2m_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$E_3=\begin{pmatrix} -iR_1+m_3 & -iR_2+n_3 & A_3^{(3)} & 0\\ -2it_8-n_3 & -4it_6+m_3 & B_3^{(3)} & 1\\ 0 & 4i & 2m_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$E_4=\begin{pmatrix} t_7+m_4 & n_4 & A_3^{(4)} & 0\\ R_2-n_4 & 2t_6+m_4 & B_3^{(4)} & i\\ 0 & 0 & 2m_4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$E_5=\begin{pmatrix} m_5-\frac{1}{2}\mu_1+2i\lambda & n_5 & A_3^{(5)} & 0\\ -\mu_2-n_5 & m_5-\frac{1}{2}\mu_3+2i\lambda & B_3^{(5)} & 0\\ 0 & 0 & 2m_5+2i\lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

где

$$R_1 = 2t_3 - t_7, R_2 = 2t_4 - t_8. \quad (6)$$

В формулах (5) — (6) большое количество комплексных элементов базисных матриц выражено через 20 вещественных параметров

$$m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, \\ t_2, t_3, t_4, t_6, t_7, t_8, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \lambda. \quad (7)$$

Кроме этих параметров в матрицы (5) входят еще 10 неизвестных комплексных величин $A_3^{(k)}$, $B_3^{(k)}$ $(k = \overline{1..5})$. Выделяя в них вещественные и мнимые части, в целом получаем 40 неизвестных вещественных параметров.

Основная цель нашей работы — построение полного списка алгебр Ли с базисами вида (5). Интегрирование полученных нами алгебр привело к новым примерам аффинно-однородных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$.

Для переработки большого объема информации, связанной с решаемой задачей, естественно использовать пакеты символьных вычислений. В связи с этим еще одну цель нашей работы можно обозначить как иллюстрацию эффективности компьютерных информационных технологий [7] в приложении к задачам чистой математики.

2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИМВОЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ОБ ОДНОРОДНОСТИ

Рассмотрим алгебру Ли $h = \langle E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 \rangle$, являющуюся вещественной линейной оболочкой пяти базисных матриц вида (5). Эта алгебра должна быть замкнута относительно операции матричной скобки (коммутатора)

$$[A, B] = A \cdot B - B \cdot A. \quad (8)$$

Проверку условия замкнутости можно проводить только для базисных матриц. Следовательно, необходимо рассмотреть $C_5^2 = 10$ скобок. Для каждой из них должно выполняться равенство

$$[E_k, E_l] = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_4 + \alpha_5 E_5, \quad (9)$$

с некоторыми вещественными $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$.

Совокупность десяти таких равенств представляет необходимые и достаточные условия для того, чтобы линейное пространство $h = \langle E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 \rangle$ было алгеброй Ли.

Заметим, что каждая из этих скобок $[E_k, E_l]$ $(1 \le k < l \le 5)$ является квадратной матрицей 4-го порядка. При этом, четвёртая строка любой такой скобки содержит, как и матрицы (5), лишь нулевые элементы.

Следовательно, матричное равенство (9) для отдельной скобки означает систему из 12 скалярных равенств по числу элементов в трех строках матрицы вида (1). Всего предлагается рассмотреть $120 = 12 \times 10$ подобных уравнений. В нашей ситуации с большим числом параметров естественным является использование компьютерных программ символьных вычислений.

Упомянем в связи с этим работу [8]. В ней также изучались компьютерными методами однородные гиперповерхности 3-мерных пространств. Наш случай вещественных поверхностей в комплексном пространстве по сравнению с [8] в два раза увеличивает размерность задачи.

Замечание. Можно изучать вопрос об алгебрах Ли для произвольных матриц вида (1) без учета дополнительных ограничений типа (5), (6). Но такое «лобовое» рассмотрение 120 комплексных уравнений представляется малоперспективным даже при использовании современных информационных технологий.

Полученное нами решение поставленной задачи существенно опирается на вид (5) базисных матриц. В свою очередь, такой вид является результатом достаточно объемных рассуждений и вычислений, которые мы здесь не приводим. Частично они отражены в [5], другая их часть готовится к публикации.

3. АЛГОРИТМ ПОИСКА МАТРИЧНЫХ АЛГЕБР

Сначала мы уменьшим общее число изучаемых уравнений со 120 до 90. Для этого вычислим в первую очередь последние столбцы всех 10 скобок. Например, такой столбец для скобки $W_{12} = [E_1, E_2]$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} (-4it_2 + m_1)i - (m_2 + 2t_2)1 \\ (-R_1 i - n_1)i - (R_1 - n_2)1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Отсюда можно определить коэффициенты разложения скобки по базису (3):

$$W_{12} = (2t_2 - m_2)E_1 + m_1 E_2 + n_2 E_3 - n_1 E_4 - 4E_5. \quad (11)$$

Рассмотрим теперь вместо этой и остальных скобок их «исправленные» варианты

$$R_{kl} = W_{kl} - (\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_4 + \alpha_5 E_5). \quad (12)$$

У каждой из этих матриц 4-ого порядка последняя строка и последний столбец содержат только нулевые элементы. Требование замкнутости обсуждаемого пространства $h=\langle E_1,E_2,E_3,E_4,E_5\rangle$ относительно скобки означает, что и элементы левых верхних (3×3) — блоков всех матриц R_{kl} также должны быть нулевыми.

Таких элементов имеется $90=9\times 10$, и они выражаются квадратичным образом через обозначенные в формулах (5) — (6) вещественные параметры. Именно эту систему из 90 уравнений относительно 40 неизвестных вещественных величин мы будем исследовать далее.

На следующем этапе из этой большой системы комплексных уравнений мы выделим относительно простую ее подсистему, содержащую 21 вещественное уравнение. В эту подсистему мы включим уравнения, отвечающие левым верхним (2×2) — блокам матриц W_{14},W_{23},W_{24} а также $(3,3)$ — уравнение, соответствующее матрице W_{24}. Например, $(3,3)$ — уравнение, соответствующее матрице $W_{24}=\left[E_2,E_4\right]$, есть

$$-m_2n_2+m_2t_7-m_4t_8+m_4R_2-m_4n_4=0.$$

Отметим, что первые восемь из названных уравнений имеют нетривиальные вещественные и мнимые части. Последние 5 уравнений оказываются вещественными из-за относительно простого вида матриц E_2 и E_4. При этом важно, что в выделенную подсистему входят только 20 вещественных параметров из (7), а не полный набор из 40 неизвестных величин.

Выделенные 21 уравнение имеют достаточно сложный вид:

$$
\begin{gathered}
n_1R_2-4m_1t_7-3n_1m_2-3n_4m_3-2t_2n_1=0,\\
n_4R_1-R_2t_7+t_7n_4-2m_4t_2+2t_2t_7=0,\\
-m_1n_4+n_1m_4+2n_1t_6-2n_1t_7-n_1n_2-n_3n_4=0,\\
2t_7^2-2t_6t_7-2n_4t_2-t_7m_4+n_4R_2=0,\\
-n_1m_4+n_1n_2+3m_1n_4+n_3n_4-4m_3t_6-\\
-3m_1R_2-2n_3m_2+8m_5-n_1R_1+2n_1t_6=0,\\
n_4R_2-R_2^2+4t_2R_2-R_1m_4+8\lambda+2t_6R_1-\\
-4n_4t_2+2n_4t_8=0,\\
-n_1R_2-m_1t_7-n_1m_2-n_1t_8-n_4m_3-2m_1t_6=0,\\
-n_4R_1-m_4R_2+3R_2t_7-2t_7n_4+4n_4t_6=0,\\
-R_1n_3+m_1R_1-m_1n_2+2m_3t_2+m_3t_8-n_3m_4-t_7n_3=0,\\
-t_8R_1-n_2R_2+4n_2t_2+R_1R_2+m_2R_1-4R_1t_2-2n_2t_8=0,\\
-n_3m_2+2t_2n_3+3n_2m_3-8m_5+4m_1t_2-\\
-2n_1m_4+n_1R_1-n_1n_2-n_3n_4=0,\qquad (13)\\
2t_7n_2+n_2R_1-2t_7R_1-8\lambda+m_2R_2-4n_2t_6-2t_2R_2=0,\\
-n_2m_3+n_1n_2+n_3n_4+n_3m_2-n_1R_1+2t_2n_3-\\
-n_3R_2-2n_3t_8+R_1m_3=0,\\
2n_2R_1-4n_2t_6+2m_2t_8+4t_2t_8+4t_6R_1-2R_1^2-4t_8^2=0,\\
R_1n_3-3n_3m_4+3m_1R_1-3m_1n_2+4m_3t_8-2n_3t_6=0,\\
4m_2t_6+2n_2t_8-4t_6t_8+2n_2R_2-2R_1R_2=0,\\
n_2R_2-n_4R_1-m_2n_2-2n_2t_2+2m_4t_2+2t_2t_7-\\
-m_4t_8-t_7t_8+m_4R_2+R_2t_7-m_4n_4-t_7n_4=0,\\
-n_4m_2+2n_4t_2+n_2m_4+2n_2t_6-\\
-2n_4t_8-n_2^2+n_4R_2-n_4^2=0,\\
2t_7R_1-2t_7n_2-n_2R_1-2t_2R_2-m_2R_2+\\
+2n_2t_6-2n_4R_2+R_2^2-2t_6R_1+\\
+2n_4t_2+R_1m_4+n_4m_2-n_2m_4+n_2^2+n_4^2=0,\\
n_4R_1-n_2R_2-n_2m_2-n_2t_8+m_2t_7+t_7t_8-2m_2t_6-\\
-2t_6t_8+m_4R_2+2R_2t_6-m_4n_4-2n_4t_6=0,\\
-m_2n_2+m_2t_7-m_4t_8+m_4R_2-m_4n_4=0.
\end{gathered}
$$

При изучении системы мы используем компьютерный перебор, связанный с ее уравнениями и значениями параметров (7) в них. Например, выделяется важный подслучай $t_2\neq 0, t_6=0, m_2=m_4=0$. Здесь 21 уравнение системы (13) принимают вид

$$
\begin{gathered}
n_1R_2-4m_1t_7-3n_4m_3-2t_2n_1=0,\\
-2R_2t_7+4t_2t_7+2t_7n_4+2n_4R_1=0,\\
-m_1n_4-2n_1t_7-n_1n_2-n_3n_4=0,\\
2n_4R_2-4n_4t_2+4t_7^2=0,\\
n_1n_2+3m_1n_4+n_3n_4-3m_1R_2+8m_5-n_1R_1=0,\\
n_4R_2-R_2^2+4t_2R_2+8\lambda-4n_4t_2+2n_4t_8=0,\\
-n_1R_2-m_1t_7-n_1t_8-n_4m_3=0,\\
3R_2t_7-2t_7n_4-n_4R_1=0,\\
-R_1n_3+m_1R_1-m_1n_2+2m_3t_2+m_3t_8-t_7n_3=0,\\
-t_8R_1-n_2R_2+4n_2t_2+R_1R_2-4R_1t_2-2n_2t_8=0,\qquad (14)\\
2t_2n_3+3n_2m_3-8m_5+4m_1t_2+n_1R_1-n_1n_2-n_3n_4=0,
\end{gathered}
$$

$$-2t_7R_1 - 2t_2R_2 + n_2R_1 - 8\lambda + 2t_7n_2 = 0,$$
$$-n_2m_3 + n_1n_2 + n_3n_4 - n_1R_1 + 2t_2n_3 -$$
$$-n_3R_2 - 2n_3t_8 + R_1m_3 = 0,$$
$$2n_2R_1 + 4t_2t_8 - 2R_1^2 - 4t_8^2 = 0,$$
$$R_1n_3 + 3m_1R_1 - 3n_1n_2 + 4m_3t_8 = 0,$$
$$n_2(t_8 + R_2) - R_1R_2 = 0,$$
$$n_2R_2 - n_4R_1 - 2n_2t_2 + 2t_2t_7 - t_7t_8 + t_7R_2 - t_7n_4 = 0,$$
$$2n_4t_2 - 2n_4t_8 - n_2^2 + n_4R_2 - n_4^2 = 0,$$
$$2t_7R_1 - 2t_7n_2 - n_2R_1 - 2t_2R_2 - 2n_4R_2 +$$
$$+R_2^2 + 2n_4t_2 + n_2^2 + n_4^2 = 0,$$
$$n_4R_1 - n_2R_2 - n_2t_8 + t_7t_8 = 0,$$
$$0 = 0.$$

Если, далее, $t_4 \neq 0$ то из 16-го уравнения (14) следует, что $n_2 = \frac{R_1R_2}{2t_4}$. Подставляя эту формулу в остальные уравнения подсистемы, приводим систему (14) к новому виду. Здесь еще один подслучай $R_1 = 0$ доводится до $t_7 = 0$, $m_3 = 0$, $t_8 = t_2$ и $\lambda = -\frac{1}{4}t_2R_2$.

В итоге получается следующий набор значений 20 интересующих нас параметров:

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = 0,$$
$$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 0, \qquad (15)$$
$$t_3 = 0, t_4 = \frac{3}{2}t_2, t_6 = t_7 = 0, t_8 = t_2,$$
$$R_1 = 0, R_2 = 2t_2, \lambda = -\frac{1}{2}t_2^2,$$

$n_5, t_2 \neq 0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ — произвольные числа.

Набор (15) составляет одно из решений выделенной подсистемы из 21 уравнения.

Остальные подслучаи в выделенной подсистеме обсуждаются аналогично. Получаемые в них результаты имеют для основной задачи вспомогательное значение. Поэтому мы их здесь не приводим. Отметим лишь, что всего получается 10 разных типов решений подсистемы. В каждом из них большинство параметров имеют нулевые значения.

4. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Только часть из полученных решений вспомогательной подсистемы достраивается до решений полной исходной задачи. По каждому явному решению подсистемы можно довести исследование либо до получения решения полной задачи, либо прийти к противоречию. С учетом нулевых значений многих параметров из набора (7) сделать это достаточно легко.

Построенный выше набор (15) продолжается до одного из решений полной задачи. В итоге нами получена теорема.

Теорема. *Всякая алгебра Ли с базисом вида (5)—(6) имеет один из пяти следующих типов:*

g_1 :

$$E_1 = \begin{pmatrix} -4it_2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 4t_2 & 0 & 0 & i \\ 0 & 2t_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4t_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

g_2 :

$$E_1 = \begin{pmatrix} -4it_2 & 0 & -it_2^2 & 1 \\ 0 & -2it_2 & 0 & 0 \\ 4i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 2t_2 & 0 & t_2^2 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2it_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -it_2^2 & 1 \\ 0 & 4i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2t_2 & 0 & t_2^2 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_5 = \begin{pmatrix} -it_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -it_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -it_2^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

g_3 :

$$E_1 = \begin{pmatrix} -4it_2 & 0 & -it_2^2 & 1 \\ 0 & -2it_2 & 0 & 0 \\ 4i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 4t_2 & 0 & 0 & i \\ 0 & 2t_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4t_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2it_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2t_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

g_4 :

$$E_1 = \begin{pmatrix} -4it_2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 4t_2 & 0 & 0 & i \\ 0 & 4t_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4t_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4it_2 & 0 & -4it_2^2 & 1 \\ 0 & 4i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

g_5 :

$$E_1 = \begin{pmatrix} -4it_2 & 0 & -it_2^2 & 1 \\ 0 & -2it_2 & 0 & 0 \\ 4i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 2t_2 & 0 & t_2^2 & i \\ 0 & t_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2it_2 & 0 & 0 \\ -2it_2 & 0 & -it_2^2 & 1 \\ 0 & 4i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2t_2 & 0 & t_2^2 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_5 = \begin{pmatrix} -it_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -it_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -it_2^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Параметр t_2 в выписанных матрицах можно положить равным единице (или любому другому ненулевому вещественному числу).

Построенные алгебры можно проинтегрировать. Это тоже сложная задача, при решении которой также можно использовать пакет символьной математики Maple.

5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ АЛГЕБРЫ g_2

Соответствующая базисным матрицам g_2 система уравнений получается слишком громоздкой. Для упрощения задачи интегрирования системы уравнений с частными производными предлагается перейти к другому семейству алгебр, подобных исходному семейству.

Матрицу подобия свяжем с диагонализацией матрицы E_3. Существуют 4 собственных вектора, отвечающих собственным значениям матрицы E_3 :

$$X = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 3i/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -3i/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 9i \end{pmatrix}.$$

Тогда предлагается рассмотреть подобие с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} -3/2 & -3/2 & 1 & 0 \\ 3i/2 & -3i/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9i \end{pmatrix}.$$

При таком подобии матрицы базиса g_2 примут более простой вид:

$$D_1 = \begin{pmatrix} -3i & 0 & i & 0 \\ 0 & -3i & i & 0 \\ 0 & 0 & -3i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_5 = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эти базисные матрицы мы ещё преобразуем, переходя к базису D_1^*, D_2^*, D_3^*, D_4^*, D_5^*. Каждая из матриц D_k^* нового базиса является линейной комбинацией (с вещественными коэффициентами) старых базисных матриц: $D_1^* = D_1 - 3D_5 - D_4$, $D_2^* = D_2$, $D_3^* = D_3$, $D_4^* = D_1 - 3D_5 + D_4$, $D_5^* = -D_5$, так что

$$D_1^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_2^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_3^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_4^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_5^* = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для еще одного упрощения задачи интегрирования, необходимо преобразовать базисные матрицы алгебры к нижнему треугольному виду с помощью матрицы

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получим следующие базисные матрицы алгебры:

$$E_1^* = S^{-1}D_1^*S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_2^* = S^{-1}D_2^*S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_3^* = S^{-1}D_3^*S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_4^* = S^{-1}D_4^*S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_5^* = S^{-1}D_5^*S = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицам $E_1^* - E_5^*$ соответствуют следующие векторные поля:

$$E_1^* = iz_1 \frac{\partial}{\partial w},\ E_2^* = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1},\ E_3^* = z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} - w \frac{\partial}{\partial w},$$

$$E_4^* = iz_1 \frac{\partial}{\partial z_2},\ E_5^* = iz_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + iz_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + iw \frac{\partial}{\partial w}.$$

В соответствии с основным тождеством (2) получаем для $E_1^* - E_5^*$ систему уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\left\{\left(ix_1 - y_1\right)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial u} + i\right)\right\} = 0 \\ \operatorname{Re}\left\{\left(x_1 + iy_1\right)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} - i\frac{\partial F}{\partial y_1}\right)\right\} = 0 \\ \operatorname{Re}\left\{\left(x_2 + iy_2\right)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x_2} - i\frac{\partial F}{\partial y_2}\right) + \right. \\ \left. + (-u - iF)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial u} + i\right)\right\} = 0 \\ \operatorname{Re}\left\{\left(ix_1 - y_1\right)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x_2} - i\frac{\partial F}{\partial y_2}\right)\right\} = 0 \\ \operatorname{Re}\left\{\left(ix_1 - y_1\right)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} - i\frac{\partial F}{\partial y_1}\right) + \right. \\ + \left(ix_2 - y_2\right)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x_2} - i\frac{\partial F}{\partial y_2}\right) + \\ \left. + \left(iu - F\right)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial u} + i\right)\right\} = 0 \end{cases} \qquad (16)$$

Упрощая систему, получим:

$$\begin{cases} y_1 \dfrac{\partial F}{\partial u} + x_1 = 0 \\ x_1 \dfrac{\partial F}{\partial x_1} + y_1 \dfrac{\partial F}{\partial y_1} = 0 \\ x_2 \dfrac{\partial F}{\partial x_2} + y_2 \dfrac{\partial F}{\partial y_2} - u \dfrac{\partial F}{\partial u} + F = 0 \\ -y_1 \dfrac{\partial F}{\partial x_2} + x_1 \dfrac{\partial F}{\partial y_2} = 0 \\ -y_1 \dfrac{\partial F}{\partial x_1} + x_1 \dfrac{\partial F}{\partial y_1} - y_2 \dfrac{\partial F}{\partial x_2} + \\ +x_2 \dfrac{\partial F}{\partial y_2} - F \dfrac{\partial F}{\partial u} - u = 0 \end{cases} \qquad (17)$$

Будем решать систему поочередно, постепенно уменьшая количество уравнений и число переменных в системе. Решим первое уравнение системы (17). Его общее решение имеет вид:

$$F=-\frac{x_1}{y_1}u+G\left(x_1,x_2,y_1,y_2\right), \qquad (18)$$

где G — произвольная аналитическая функция от 4-х переменных.

Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=-\frac{u}{y_1}+\frac{\partial G}{\partial x_1},\frac{\partial F}{\partial x_2}=\frac{\partial G}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_1}=-\frac{x_1u}{y_1^2}+\frac{\partial G}{\partial y_1},\frac{\partial F}{\partial y_2}=\frac{\partial G}{\partial y_2}.$$

Перепишем систему (17) с учетом полученного решения (18):

$$\begin{cases} x_1\dfrac{\partial G}{\partial x_1}+y_1\dfrac{\partial G}{\partial y_1}=0 \\ x_2\dfrac{\partial G}{\partial x_2}+y_2\dfrac{\partial G}{\partial y_2}+G=0 \\ -y_1\dfrac{\partial G}{\partial x_2}+x_1\dfrac{\partial G}{\partial y_2}=0 \\ -y_1\dfrac{\partial G}{\partial x_1}+x_1\dfrac{\partial G}{\partial y_1}-y_2\dfrac{\partial G}{\partial x_2}+x_2\dfrac{\partial G}{\partial y_2}-\dfrac{\partial x_1}{\partial y_1}G=0 \end{cases} \qquad (19)$$

Решим первое уравнение системы (19). Переходя к полярной системе, связанной с координатами x_1,y_1, получим обыкновенное дифференциальное уравнение: $r_1\frac{\partial G}{\partial r_1}=0$. Его решение имеет вид:

$$G=H\left(\varphi,x_2,y_2\right)=H\left(\operatorname{arctg}\frac{y_1}{x_1},x_2,y_2\right)= \\ =g\left(\frac{y_1}{x_1},x_2,y_2\right) \qquad (20)$$

где g — произвольная аналитическая функция от 3-х переменных.

Для удобства дальнейших вычилений введем замену переменных:

$$t_1=\frac{y_1}{x_1},t_2=x_2,t_3=y_2.$$

Тогда

$$\frac{\partial G}{\partial x_1}=-\frac{y_1}{x_1^2}\frac{\partial g}{\partial t_1},\frac{\partial G}{\partial x_2}=\frac{\partial g}{\partial t_2},$$

$$\frac{\partial G}{\partial y_1}=-\frac{1}{x_1}\frac{\partial g}{\partial t_1},\frac{\partial G}{\partial y_2}=\frac{\partial g}{\partial t_3}.$$

Перепишем уравнения системы (19) с учетом полученного решения (20):

$$\begin{cases} t_2\dfrac{\partial g}{\partial t_2}+t_3\dfrac{\partial g}{\partial t_3}+g=0 \\ t_1\dfrac{\partial g}{\partial t_2}-\dfrac{\partial g}{\partial t_3}=0 \\ (t_1^2+1)\dfrac{\partial g}{\partial t_1}-t_3\dfrac{\partial g}{\partial t_2}+t_2\dfrac{\partial g}{\partial t_3}-\dfrac{g}{t_1}=0 \end{cases} \qquad (21)$$

Решим второе уравнение системы (21). Для этого следует перейти к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dt_2}{t_1}=\dfrac{dt_3}{-1} \\ \dfrac{dt_1}{0}=\dfrac{dg}{0}. \end{cases}$$

Вычисляя интегралы этой системы, получим следующее решение:

$$g=h\left(t_1,t_2+t_1t_3\right), \qquad (22)$$

где h — произвольная аналитическая функция от 2-х переменных.

Снова введем замену переменных:

$$s_1=t_1,s_2=t_2+t_1t_3.$$

Тогда

$$\frac{\partial g}{\partial t_1}=\frac{\partial h}{\partial s_1}+t_3\frac{\partial h}{\partial s_2},\frac{\partial g}{\partial t_2}=\frac{\partial h}{\partial s_2},\frac{\partial g}{\partial t_3}=t_1\frac{\partial h}{\partial s_1}.$$

Перепишем систему (21) с учетом полученного решения (22):

$$\begin{cases} s_2\dfrac{\partial h}{\partial s_2}+h=0 \\ \left(s_1^2+1\right)\dfrac{\partial h}{\partial s_1}+s_1s_2\dfrac{\partial h}{\partial s_2}+\dfrac{h}{s_1}=0 \end{cases} \qquad (23)$$

Решение первого уравнения системы (23) имеет вид $h=\frac{\varphi(s_1)}{s_2}=\frac{\varphi(p)}{s_2}$, где введены новая независимая переменная $s_1=p$ и новая функция $\varphi(p)$ от одной переменной. Тогда, подставляя полученную формулу для h в последнее уравнение системы (23), имеем обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\left(p^2+1\right)\frac{d\varphi}{dp}+\frac{1-p^2}{p}\varphi=0$$

Общим решением этого ОДУ является следующая функция:

$$\varphi=\frac{C\left(p^2+1\right)}{p},$$

где C — произвольная вещественная константа.

Возвращаясь к первоначальным координатам с учетом всех замен, которые мы вводили, получим следующее уравнение искомой поверхности:

$$v = \frac{1}{y_1}\left(-x_1 u + \frac{C\left(x_1^2 + y_1^2\right)}{x_1 x_2 + y_1 y_2}\right).$$

Заметим, что при $C = 0$ оно является алгебраическим уравнением 2-го порядка и задает прямое произведение конуса из пространства $\mathbb{C}^2_{z_1,w}$ на комплексную плоскость $\mathbb{C}_{z_2}$.

При всех $C \neq 0$ получается одна и та же (с точностью до растяжений координат и симметрий) алгебраическая поверхность 4-го порядка

$$Re\left(z_1\overline{w}\right) Re(z_1\overline{z_2}) = \left|z_1\right|^2.$$

Это новый пример аффинно-однородной поверхности в $\mathbb{C}^3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лобода А. В.* Об одном семействе аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства / А. В. Лобода, А. С. Ходарев // Известия ВУЗов. Сер. Математика. — 2003. — № 10. — С. 38—50.

2. *Демин А. М.* Пример 2-параметрического семейства аффинно-однородных гиперповерхностей / А. М. Демин, А. В. Лобода // Матем. заметки, 84:5 (2008). — С. 791—794.

3. *Данилов М. С.* Об аффинной однородности индефинитных вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$ / М. С. Данилов, А. В. Лобода // Матем. заметки. — 2010. — Т. 88. — № 6. — С. 866—883.

4. *Нгуен Т. Т. З.* Аффинные инварианты 3-го порядка однородных вещественных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^3$ / Т. Т. З. Нгуен // Воронежская зимняя матем. школа (ВЗМШ-2012). — Воронеж, 2012. Тезисы докл. — С. 156—158.

5. *Нгуен Т. Т. З.* Аффинно- однородные поверхности трубчатого типа в / Т. Т. З. Нгуен // Воронежская зимняя матем. школа (ВЗМШ-2011). — Воронеж, 2011. Тезисы докл. — С. 236—237.

6. *Лобода А.В.* Классификация аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$ / А. В. Лобода // Междунар. конф. “Метрическая геометрия поверхностей и многогранников”, посв. 100-летию Ефимова. — М., 2010. Сборник тезисов. — С. 41—42.

7. *Дьяконов В. П.* Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании / В. П. Дьяконов. — М.: Солон-Пресс, 2006. — 720 с.

8. *Eastwood M.* On affine normal forms and a classification of homogeneous surfaces in affine three-space / M. Eastwood, V. V. Ezhov // Geom. Dedicata. — 1999. — V. 77. — P. 11—69.

Нгуен Тхи Тхюи Зыонг — аспирант кафедры высшей математики, Воронежский государственный архитектурно-строительный университет

E-mail: thuyduongpy@yahoo.com
Тел.: (473) 271-53-62

Nguyen Thi Thuy Duong — apost-graduate student, chaire of higher mathematics, Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering

E-mail: thuyduongpy@yahoo.com
Tel.: (473) 271-53-62