УДК 517.9

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА ДЛЯ ЗАДАЧИ О СТАЦИОНАРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛА В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОСТИ С ТРЕЩИНОЙ

Е. А. Логинова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 01.06.2011 г.

Аннотация. Рассматривается задача, описывающая стационарное распределение температуры в неоднородном материале (FGM) с трещиной. Изучается двумерный случай. Неоднородность материала описывается функцией $G(x_2) = G_0 e^{k(\cos\alpha x_1 + \sin\alpha x_2)}$, что соответствует ситуации, когда вектор направления изменения неоднородности направлен под углом $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ к положительной полуоси абсцисс. Задача сведена к обобщенной задаче Коши, построены стационарные тепловые потенциалы и решение, изучены их свойства. Получены асимптотики теплового потока по расстоянию до концов трещины.

Ключевые слова: Задача трансмиссии, стационарные тепловые потенциалы, неоднородная плоскость с разрезом (трещиной) по отрезку, асимптотики теплового потока по расстоянию до концов трещины, постановка краевых условий.

Abstract. The problem considered describes the steady-state temperature distribution in heterogeneous material (FGM) with a crack. Two-dimensional case is studied. The heterogeneity of the material described by the function $G(x_2) = G_0 e^{k(\cos\alpha x_1 + \sin\alpha x_2)}$ that corresponds to the situation of the vector direction of change of inhomogeneity is located at an angle to the positive half of abscissa axis. The problem is reduced to the generalized Cauchy problem, stationary heat potentials and solutions are built, properties are investigated. Asymptotic forms of thermal currents are obtained for the distance to the ends of the crack.

Key words: The problem of transmission, fixed thermal potentials, the non-homogeneous plane with a crack on the segment, the asymptotic form of thermal current for the distance to the ends of the crack, setting the boundary conditions.

В работе рассматривается задача о стационарном распределении поля температуры с неоднородным коэффициентом внутренней теплопроводности в области, представляющей собой плоскость с разрезом по отрезку, моделирующую неоднородный материал с трещиной. Рассматриваемое уравнение стационарной теплопроводности имеет вид $\operatorname{div}(k(x_1, x_2)\operatorname{grad} u(x_1, x_2)) = 0$, где $k(x_1, x_2) = e^{kx_1\cos\alpha + kx_2\sin\alpha}$. Таким образом, неоднородность внутренней теплопроводности имеет экспоненциальный характер. После несложных преобразований рассматриваемое уравнение может быть записано в виде*

$$\frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + \\ +k\cos\alpha \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} + k\sin\alpha \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0. \tag{1}$$

Искомая функция $u(x_1, x_2)$ — это температура в точке материала с координатами (x_1, x_2). Областью, в которой рассматривается уравнение (1), является плоскость Ox_1x_2 с разрезом $l = \left\{x \mid x_2 = \pm 0;\ x_1 \in [-1;\ 1]\right\}$, описывающим трещину по отрезку $[-1; 1]$ оси абсцисс. Граничные условия заданы следующим образом

$$u(x_1, +0) - u(x_1, -0) = q_0(x_1);$$
$$\frac{\partial u(x_1, +0)}{\partial x_2} + k\sin\alpha u(x_1, +0) - \frac{\partial u(x_1, -0)}{\partial x_2} - \\ -k\sin\alpha u(x_1, -0) = q_1(x_1);\ x_1 \in [-1; 1]. \tag{2}$$

Первое из условий (2) описывает разность между температурами верхнего и нижнего берега трещины, а второе — разность между тепловыми потоками через эти берега. Таким образом, рассматриваемая задача в некотором смысле подобна задаче трансмиссии, несмотря на «вырожденный» характер границы.

© Логинова Е. А., 2012

Отметим, что в случае $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ задача была рассмотрена автором в работе [1]. Однако, в силу несколько иного задания граничных условий эта задача не является в полной мере частным случаем данного. Так при подстановке $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ решение принимает вид, представляющий собой линейную комбинацию компонентов решения, полученных в работе [1], то же относится и к асимптотическим представлениям производных решения. Случай $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ описывает ситуацию, когда направление изменения коэффициента внутренней теплопроводности было перпендикулярно отрезку трещины. В настоящей работе от этого ограничения удалось отказаться. Кроме того удалось посчитать частные производные решения $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ $(i = 1,2)$, что позволило построить асимптотики тепловых потоков через границу при $x_2 \to +0, \quad x_1 \in [-1,1]$. Конечно, изучена гладкость решения и выполнение краевых условий. Вид (2) краевых условий диктуется геометрией области и описывает скачок температуры и теплового потока при переходе через берега трещины.

Задача (1)—(2) будет сведена нами к обобщенной задаче Коши в пространстве $\mathbb{R}^2$, для чего нами в [1] введена специализированная дельта-функция, описывающая границу области. Из общей теории ясно, что вид функциональных коэффициентов при введенной дельта-функции и ее производной по переменной x_2 определяет характер краевых условий, которые следует ставить в данной задаче. Задание краевых условий должно полностью определять данные коэффициенты (так называемые «скачки»), при этом, естественно, количество условий должно быть минимально возможным. Примененный подход позволил доказать корректность поставленной таким образом задачи, изучить ее разрешимость, выделить класс единственности решения, показать, в каком смысле и при каких ограничениях выполнены краевые условия.

Подробная историческая справка об исследовании температурных полей в окрестностях трещин приведена в работе [1]. Отметим здесь лишь некоторые из предшествовавших работ. Erdogan [2] изучал сингулярный характер поля напряжений на конце трещины в связных неоднородных полуплоскостях, имеющих модуль сдвига с непрерывной производной. Hu [3] исследовал сингулярный характер напряжения и электрического поля смещения на конце трещины в двух связных функционально — градиентных пьезоэлектрических полупространствах. Zhou [4] изучал поведение трещины на границе двух полуплоскостей ортотропных функционально-градиентных материалов. Он также исследовал поведение трещины между двумя полуплоскостями функционально-градиентных материалов под случайным воздействием растяжения Новая идея в изучении слабой непрерывности на границе bi-FGM была привнесена Li. Li и Lee рассматривали задачу о трещине, ортогональной границе в структуре двух bi-FGM, механические свойства которых представляются экспоненциальной и линейной функциями соответственно. Также они рассмотрели задачу об анти-плоском воздействии разрушения на слабо непрерывную границу в симметричной функционально-градиентной комбинированной полосе.

Рассмотренная нами в работе задача основана на модели, изложенной в работе Li и Lee [5]. При этом мы считаем, что математически верно обосновали иную постановку краевых условий. Следует отметить, что указанные ранее работы посвящены антиплоскому сдвигу, а изучаемая задача — теплопроводности, однако, в математической формулировке задача теплопроводности и задача антиплоского сдвига совпадают.

Перейдем к изложению основных результатов работы.

С помощью замены переменных $u = e^{-\frac{k}{2}(x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha)} v(x_1, x_2)$ уравнение (1) сводится к следующему

$$\Delta v(x_1, x_2) - \frac{k^2}{4} v = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus l. \tag{3}$$

Обозначим $K_n(x)$ — функция Макдональда n-го порядка (см. [6]), где $n = 0,1,2$.

Утверждение1. Фундаментальным решением оператора $\Delta - (\dfrac{k}{2})^2$ в $\mathbb{R}^2$ является функция $E_2\ (|\,x\,|) = -\dfrac{1}{2\pi} K_0(\dfrac{k}{2}|x|)$, где K_0 — функция Макдональда (см. [7]).

Введем в рассмотрение (см. [1]) специализированную дельта-функцию $\delta_{[-1,1]} \in D'(\mathbb{R}^2)$, так что для функции $\nu(x_1 x_2)$, которая непрерывна при всех $x \in \mathbb{R}^2 \setminus l$, а на отрезке $x \in l$ может иметь разрыв первого рода, причем $\lim\limits_{x_2 \to +0} \nu(x_1, x_2) = \nu_+(x_1)$, $x_1 \in [-1;\, 1]$; $\lim\limits_{x_2 \to -0} \nu(x_1, x_2) = \nu_-(x_1)$, $x_1 \in [-1;\, 1]$ и функция $\nu_+(x_1) - \nu_-(x_1)$ непрерывна на отрезке $[-1;\, 1]$ и любой основной функции справедливо равенство

$$(\nu\delta_{[-1,1]}, \varphi(x_1, x_2) =$$

$$= \int_{-1}^{1} (\nu_+(x_1) - \nu_-(x_1))\delta(x_2)\varphi(x_1, x_2)dx_1.$$

Утверждение 1 будет использовано для построения решения задачи (1)—(2). Для этого задача (1)—(2) будет сведена к обобщённой задаче Коши

$$\Delta u(x_1, x_2) + k\cos\alpha \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} + k\sin\alpha \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = $$
$$= q_0(x_1) * \delta_{[-1,1]} + q_1(x_1) * \frac{\partial \delta_{[-1,1]}}{\partial x_2}. \qquad (4)$$

С помощью фундаментального решения оператора $\Delta v(x_1, x_2) - \dfrac{k^2}{4} v$ конструируется фундаментальное решение оператора $\Delta u(x_1, x_2) + k\cos\alpha \dfrac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} + k\sin\alpha \dfrac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}$, что позволяет построить обобщенное решение задачи (4) в виде свертки фундаментального решения со слагаемыми правой части. В результате имеем следующее

Утверждение 2. Решение обобщенной задачи Коши (4) можно выписать в виде $u(x_1, x_2) = u_1(x_1, x_2) + u_0(x_1, x_2)$, где, следуя классической терминологии, будем говорить, что

$u_1(x_1, x_2) = E(x_1, x_2) * q_1(x_1)\delta_{[-1,1]}$ — поверхностный стационарный тепловой потенциал простого слоя;

$u_0(x_1, x_2) = E(x_1, x_2) * \dfrac{\partial q_0(x_1)\delta_{[-1,1]}}{\partial x_2}$ — поверхностный стационарный тепловой потенциал двойного слоя;

$E(x_1, x_2)$ — фундаментальное решение уравнения $L(E) = \delta(x_1, x_2)$.

В следующих двух утверждениях сформулированы свойства стационарных тепловых потенциалов.

Утверждение 3. Пусть $q_1(\sigma_1) \in C^2[-1,1]$. Тогда поверхностный стационарный тепловой потенциал простого слоя представим в виде

$$u_1(x_1, x_2) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} e^{-\frac{k}{2}((x_1-\sigma_1)\cos\alpha + x_2\sin\alpha)} \times$$
$$\times K_0\Big(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1-\sigma_1)^2 + x_2^2}\Big) q_1(\sigma_1)d\sigma_1$$

и при $x_1 \in (-1;1)$ выполнены условия

$$u_1(x_1, +0) - u_1(x_1, -0) = 0;$$
$$\frac{\partial u_1(x_1, +0)}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1(x_1, -0)}{\partial x_2} - k\sin\alpha u_1(x_1, -0) +$$
$$+ k\sin\alpha u_1(x_1, +0) = q_1(x_1);$$

Если же дополнительно потребовать, что $q_1(\pm 1) = 0$, то условия выполняются в точках $x_1 = \pm 1$ по непрерывности.

Кроме того $u_1(x_1, x_2) \in C^\infty\Big(\big((-\infty, -1) \cup (1, +\infty)\big) \times \big((-\infty, -0) \cup (+0, +\infty)\big)\Big)$.

Утверждение 4. Пусть $q_0(\sigma_1) \in C^2[-1,1]$. Тогда поверхностный стационарный тепловой потенциал двойного слоя представим в виде

$$u_0(x_1, x_2) = \frac{k}{4\pi}\int_{-1}^{1} e^{-\frac{k}{2}((x_1-\sigma_1)\cos\alpha + x_2\sin\alpha)} \times$$
$$\times K_1\Big(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1-\sigma_1)^2 + x_2^2}\Big) \frac{x_2 q_0(\sigma_1)}{\sqrt{x_2^2 + (x_1-\sigma_1)^2}} d\sigma_1 +$$
$$+ \frac{k\sin\alpha}{4\pi}\int_{-1}^{1} e^{-\frac{k}{2}((x_1-\sigma_1)\cos\alpha + x_2\sin\alpha)} \times$$
$$\times K_0\Big(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1-\sigma_1)^2 + x_2^2}\Big) q_0(\sigma_1)d\sigma_1.$$

и при $x_1 \in (-1,1)$ выполнены условия $u_0(x_1, +0) - u_0(x_1, -0) = q_0(x_1)$;

$$\frac{\partial u_0(x_1, +0)}{\partial x_2} - \frac{\partial u_0(x_1, -0)}{\partial x_2} +$$
$$+ k\sin\alpha u_0(x_1, -0) - k\sin\alpha u_0(x_1, -0) = 0.$$

Если же дополнительно потребовать, что $q_0(\pm 1) = 0$, то условие $\dfrac{\partial u_0(x_1, +0)}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_0(x_1, -0)}{\partial x_2} + k\sin\alpha u_0(x_1, +0) - k\sin\alpha u_0(x_1, -0) = 0$ выполняется в точках $x_1 = \pm 1$ в смысле главного значения. При более строгом требовании $q_0'(\pm 1) = 0$ условия выполняются в точках $x_1 = \pm 1$ по непрерывности.

Кроме того $u_0(x_1, x_2) \in C^\infty\Big(\big((-\infty, -1) \cup (1, +\infty)\big) \times \big((-\infty, -0) \cup (+0, +\infty)\big)\Big)$.

Доказательства утверждений 3 и 4 вытекают из явных представлений поверхностных стационарных тепловых потенциалов, известных свойств функций Макдональда, в частности их явных интегральных представлений и асимптотических разложений (см. [6])

$$K_0(x) = \ln\frac{2}{x} + O(1),\ K_1(x) = \frac{1}{x} + O(x) \qquad (5)$$

в окрестности их единственной точки сингулярности $x = 0$. Доказательства основаны на оценках интегральных представлений потенциалов.

Следующее утверждение позволяет на основе утверждений 3 и 4 сформулировать свойства гладкости решения исходной задачи (1)—(2).

Утверждение 5. В условиях утверждений 3 и 4 решение исходной задачи единственно в $L_2(\mathbb{R}^2)$ и имеет вид

$$\begin{aligned} u = &-\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} e^{-\frac{k}{2}((x_1-\sigma_1)\cos\alpha + x_2\sin\alpha)} \times \\ &\times K_0\left(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1-\sigma_1)^2 + x_2^2}\right) q_1(\sigma_1)d\sigma_1 + \\ &+\frac{k}{4\pi}\int_{-1}^{1} e^{-\frac{k}{2}((x_1-\sigma_1)\cos\alpha + x_2\sin\alpha)} K_1\left(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1-\sigma_1)^2 + x_2^2}\right) \times \\ &\times \frac{x_2 q_0(\sigma_1)}{\sqrt{x_2^2 + (x_1-\sigma_1)^2}} d\sigma_1 + \\ &+\frac{k\sin\alpha}{4\pi}\int_{-1}^{1} e^{-\frac{k}{2}((x_1-\sigma_1)\cos\alpha + x_2\sin\alpha)} \times \\ &\times K_0\left(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1-\sigma_1)^2 + x_2^2}\right) q_0(\sigma_1)d\sigma_1, \end{aligned} \qquad (6)$$

причем функция u бесконечно дифференцируема по x_2 и x_1 при всех $x_2 \neq 0$, $x_1 \notin [-1,1]$.

Утверждение 6. Пусть выполнены условия $q_0(\pm 1) = 0;\ q_1(\pm 1) = 0;\ q_0'(\pm 1) = 0;\ q_1'(\pm 1) = 0;$ тогда решение задачи (1)—(2) $u(x_1, x_2)$, описывающее стационарное распределение температуры в плоскости с трещиной и тепловой поток $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ есть непрерывные ограниченные функции аргументов $x_1, x_2 \notin l$. Если выполнено условие $q_0(\pm 1) = 0;\ q_1(\pm 1) = 0$, то решение задачи (1)—(2) u, $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, а также тепловой поток $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, есть непрерывные ограниченные функции аргументов x_1, x_2 вплоть до берегов разреза l, а тепловой поток $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ имеет асимптотическое представление

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_2} = &\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\ln((1-x_1)^2 + x_2^2)q_0'(1) - \right. \\ &\left. -\frac{1}{2}\ln((-1-x_1)^2 + x_2^2)q_0'(-1)\right] + R(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Здесь функция $R(x_1, x_2)$ ограничена при $x_2 \to +0$, $x_1 \in [-1,1]$.

Утверждение 7. Пусть не выполнены условия согласования, т.е. $q_0(\pm 1) \neq 0;\ q_1(\pm 1) \neq 0;\ q_0'(\pm 1) \neq 0;\ q_1'(\pm 1) \neq 0;$ тогда решение задачи (1)—(2) u, есть непрерывная ограниченная функция аргументов $x_1, x_2 \notin l$, тепловой поток $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ имеет асимптотическое представление

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_2} = &-\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1-x_1}{(1-x_1)^2 + x_2^2} q_0(1) + \right. \\ &\left. +\frac{1+x_1}{(1+x_1)^2 + x_2^2} q_0(-1)\right] + \\ &+\frac{k\cos\alpha}{8\pi}[\ln((1-x_1)^2 + x_2^2)q_0(1) - \ln((1+x_1)^2 + \\ &+x_2^2)q_0(-1)] + \frac{1}{4\pi}[\ln((1-x_1)^2 + x_2^2)q_0'(1) - \\ &-\ln((-1-x_1)^2 + x_2^2)q_0'(-1)] + R(x_1, x_2); \end{aligned}$$

а тепловой поток $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ имеет асимптотическое представление

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_1} = &-\frac{1}{4\pi}[\ln((1-x_1)^2 + x_2^2)q_1(1) - \\ &-\ln((1+x_1)^2 + x_2^2)q_1(-1)] + \frac{k\sin\alpha}{8\pi}[\ln((1-x_1)^2 + \\ &+x_2^2)q_0(1) - \ln((1+x_1)^2 + x_2^2)q_0(-1)] - \\ &-\frac{1}{2\pi}\left[\frac{x_2}{(1-x_1)^2 + x_2^2} q_0(1) - \right. \\ &\left. -\frac{x_2}{(1+x_1)^2 + x_2^2} q_0(-1)\right] + R_1(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Здесь функции $R(x_1, x_2)$, $R_1(x_1, x_2)$ ограничены при $x_2 \to +0$, $x_1 \in [-1;\ 1]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Глушко А. В.* Асимптотические свойства решения задачи о стационарном распределении тепла в неоднородной плоскости с трещиной / А. В. Глушко, Е. А. Логинова // Вестник ВГУ серия математика физика. — 2010. — № 2. — С. 47—50.

2. *Erdogan F.* The crack problem for bonded nonhomogeneous materials under antiplane shear loading / F. Erdogan. — J. Appl. Mech. 52, 1985. —P. 823—828.

3. *Hu K.Q.* Anti-plane shear crack in a functionally gradient piezoelectric material / K. Q. Hu, Z. Zhong, B. Jin. — Acta Mech. Solida Sin. 15(2), 2002. — 140, — 148 p.

4. *Zhou Z.G.* Investigation of the Behavior of an Interface Crack between Two Half-Planes of Orthotropic Functionally Graded Materials by Using a New Method / Z.G. Zhou, B. Wang, L. J. Yang. — JSME Int. J. Ser. C, Mech. Syst. Mach. Elem. Manuf. 47(3), 2004. — P. 467—478.

5. *Li Y.-D.* An anti-plane crack perpendicular to the weak/micro-discontinuous interface in a bi-FGM structure with exponential and linear non-homogeneities / Y.-D. Li, K. Y. Lee. — Int. J. Fract. 146, 2007. — P. 203—211.

6. *Ватсон Г. Н.* Теория Бесселевых функций / Г. Н. Ватсон. — М.: Издательство иностранной литературы, 1949. — 875 с.

7. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики / В. С.Владимиров. — 4-е изд. перераб. и доп. — М.: Наука, 1981. — 512 с.

Логинова Е. А. — аспирант кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета, Воронежский государственный университет

E-mail: vangog2007@list.ru

Тел.: +7(4732) 208618

Ekaterina L. A. — graduate student of partial differential equations and theory of probabilities, mathematical Faculty of Voronezh State University

E-mail: vangog2007@list.ru

Tel.: +7 (4732) 208618