УДК 517.957

МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПАРАМЕТРАМИ

И. Н. Кутищев, Н. А. Письменный, Е. В. Рачинский

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 28.12.2011 г.

Аннотация: В данной работе рассматривается метод усреднения для нелинейной системы дифференциальных уравнений с двумя малыми положительными параметрами. Для таких систем найдена область изменения параметров, в которой справедлив аналог теоремы И. Г. Малкина.
Ключевые слова: Метод усреднения, нелинейная система дифференциальных уравнений с двумя параметрами, теорема Малкина.

Abstract: In the given paper the averaging method for nonlinear system of the differential equations with two small positive parameters is considered. For such system and the domain of parameters given I. G. Malkin's theorem is found.
Key words: Averaging method, nonlinear system of the differential equations with two parameters, Malkin's theorem.

ВВЕДЕНИЕ

К системам квазилинейных дифференциальных уравнений с малыми параметрами приводят многие практические задачи физики и техники. Точные решения таких систем удается получить лишь в очень редких случаях. Поэтому для исследования колебаний такого рода в системах приходится, начиная с работы А. Пуанкаре [17], использовать результаты качественного характера. Одним из наиболее известных здесь является метод усреднения, широко освещенный в классической литературе, см., например, [4, 5, 7, 10, 11]. Обширная библиография по данной тематике представлена в недавно вышедшей монографии В. Ш. Бурда [2]. В 1945 году Н. Н. Боголюбов [8] положил начало теории усреднения на бесконечном интервале. Дальнейшее развитие эта теория получила в совместной работе Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского [3], а так же работе И. Г Малкина [1], который, по-видимому, первым применил данную теорию для доказательства существования и единственности почти периодического решения дифференциального уравнения с малым параметром вида (1) в критическом случае. В последние годы для уравнений с гладкой правой частью были получены новые результаты с использованием метода усреднения, а также разработано достаточно большое количество модификаций этого метода, основанных на идеях Н. Н. Боголюбова и И. Г. Малкина. Случаи с недифференцируемыми правыми частями также рассматривались, см., например, работу В. Г. Задорожного [15], а так же [16]. Однако ответ на вопрос: существуют ли и какого вида будут почти периодические решения у квазилинейных систем (4) с двумя малыми положительными параметрами, насколько известно авторам, не рассматривался в литературе. В настоящей работе изучаются системы такого вида.

Остановимся на наиболее близких к настоящей работе результатах И. Г. Малкина более подробно. В своей монографии [1] И. Г. Малкин рассматривал колебания, описываемые системами дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x) + \mu f(t,x,\mu), \tag{1}$$

где функция $X : R^1 \times R^n \to R^n$ является T-периодической по первой переменной, $f : R^1 \times R^n \times [0,1] \to R^n$ почти-периодической по t равномерно по x, μ-малый положительный параметр. Предполагалось, что порождающая система (соответствующая случаю $\mu = 0$):

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x)$$

допускает семейство Т-периодических решений $x = \varphi(t,h)$, где h — некоторый многомерный параметр.

После линеаризации уравнения (1) на решении $\varphi(t,h)$, замены Флоке [4] (аналогичный результат можно получить, используя замены Боголюбова—Штокало [9]) и преобразования Боголюбова—Крылова [3] уравнение (1) сводится к системе, состоящей из двух уравнений:

$$\begin{cases} \dot{u} = \mu A u + \mu^2 B(t,u,v), \\ \dot{v} = Cv + \mu D(t,v,u), \end{cases} \tag{2}$$

где A и C — постоянные матрицы, функции B, D удовлетворяют условию Липшица по переменным u и v.

Для системы (2) доказывается существование и единственность почти периодических решений, а так же их сходимость к решению системы такого типа:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = \mu A v \\ \dfrac{du}{dt} = Cu, \end{cases}$$

В основе этого доказательства лежит классический принцип усреднения Боголюбова—Крылова для задачи о почти периодических решениях.

Естественным обобщением уравнения (1) является случай многомерного параметра μ. Двухпараметрический аналог уравнения (1) может быть представлен системой вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = X_1\left(x_1\right) + \mu_1 f_1\left(t, x_2\right) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = X_2\left(x_2\right) + \mu_2 f_2\left(t, x_1\right), \end{cases} \tag{3}$$

где порождающие уравнения $\frac{dx_1}{dt} = X_1\left(x_1\right)$, $\frac{dx_2}{dt} = X_2\left(x_2\right)$, так же допускает семейство периодических решений $x_1 = \varphi_1\left(t,h_1\right), x_2 = \varphi_2\left(t,h_2\right)$, вообще говоря разных периодов T_1 и T_2 по переменной t.

Проводя доказательство по схеме И. Г. Малкина, задача о существовании почти периодических решений у системы (3) сводится к задаче о существовании почти периодических решений у следующей квазилинейной системы:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \mu_1 A_1(t) x_1 + \mu_1{}^2 f_1\left(t, x_1, x_2\right) + \\ +\mu_1\mu_2 f_2\left(t, x_1, x_2\right) + \mu_2{}^2 f_3\left(t, x_1, x_2\right) + \mu_1 g_1(t), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \mu_2 A_2(t) x_2 + \mu_2{}^2 f_4\left(t, x_1, x_2\right) + \\ +\mu_1\mu_2 f_5\left(t, x_1, x_2\right) + \mu_2{}^2 f_6\left(t, x_1, x_2\right) + \mu_2 g_2(t), \end{cases} \tag{4}$$

где $A_1(t), A_2(t)$ являются T_1 и T_2 периодическими соответственно, $f_i (i = \overline{1,6})$ почти периодичны по t равномерно по x_1 и x_2.

Необходимо показать наличие почти периодических решений у системы (4) при всех достаточно малых μ_1 и μ_2. Конечно, если μ_1 и μ_2 связаны линейной зависимостью $\mu_1 = k\mu_2$, такой результат может быть получен из теоремы Малкина. Случай произвольного изменения параметров μ_1 и μ_2 насколько известно авторам, не рассматривался. Отметим, что прямой перенос доказательства Малкина невозможен. В настоящей работе выделена область на плоскости (μ_1, μ_2), ею оказался сектор, ограниченный двумя «параболами», в котором результат о существовании почти периодического решения оказывается верным.

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Рассмотрим систему (4), в которой $A_1(t)$ и $A_2(t)$ — являются периодическими матрицами порядка n периодов T_1 и T_2 соответственно; будем считать, что порядки матриц $A_1(t)$ и $A_2(t)$ равны (для облегчения дальнейших выкладок), хотя основной результат будет справедлив для отличных порядков матриц, $g_1(t)$ и $g_2(t)$ — почти периодические функции, μ_1 и μ_2 — малые параметры; функции $f_i\left(t, x_1, x_2\right)$, $i = \overline{1,6}$ — удовлетворяют условию Липшица по переменным x_1, x_2 с константами L_i соответственно, и почти периодичны по t равномерно относительно x_1, x_2. Так же предполагается, что матрицы $\Lambda_1 = \frac{1}{T_1}\ln\left[U_1\left(T_1\right)\right]$ и $\Lambda_2 = \frac{1}{T_2}\ln\left[U_2(T_2)\right]$, где U_1 и U_2 операторы сдвига по траекториям однородных систем $x_1 = A_1(t)x_1$ и $x_2 = A_2(t)x_2$ соответственно, не имеют собственных значений на мнимой оси.

Пусть область $\left(\Omega_1\right)$ описывается неравенствами $c_1\mu_1^{(2-\varepsilon)} < \mu_2 < c_2\mu_1^{(1/2+\varepsilon)}$, где $c_1, c_2 > 0$, $0 < \varepsilon < \frac{3}{4}$, — некоторые константы.

Теорема 1. *При достаточно малых параметрах μ_1 и μ_2 принадлежащих области (Ω_1), Система (4) имеет почти периодическое* *решение, и разность между решениями системы (4) и (5)*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu_1 A_1(t)x_1 + \mu_1 g_1(t), \\ \dot{x}_2 = \mu_2 A_2(t)x_2 + \mu_2 g_2(t), \end{cases} \quad (5)$$

при тех же значениях μ_1 и μ_2, стремится к нулю при μ_1, $\mu_2 \to 0$.

Доказательство. Сначала произведем в уравнении (5) замену переменных вида: $x_1(t) = \Phi_1(t)y_1(t)$ и $x_2(t) = \Phi_2(t)y_2(t)$, где $\Phi_1\left(t + T_1\right) \equiv \Phi_1(t)$ и $\Phi_2\left(t + T_2\right) \equiv \Phi_2(t)$, где $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$ периодические функции, определяемые следующими соотношениями $\Phi_1(t) = U_1(t)e^{-\Lambda_1 t}$ и $\Phi_2(t) = U_2(t)e^{-\Lambda_2 t}$. После этого система (5) примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = \mu_1\Lambda_1 y_1 + \Phi_1^{-1}(t)\mu_1{}^2 f_1\left(t, x_1, x_2\right) + \\ +\Phi_1^{-1}(t)\mu_1\mu_2 f_2\left(t, x_1, x_2\right) + \Phi_1^{-1}(t)\mu_2^2 f_3\left(t, x_1, x_2\right) + \\ +\mu_1 g_1(t)\Phi_1^{-1}(t), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = \mu_2\Lambda_2 y_2 + \Phi_2^{-1}(t)\mu_1{}^2 f_4\left(t, x_1, x_2\right) + \\ +\Phi_2^{-1}(t)\mu_1\mu_2 f_5\left(t, x_1, x_2\right) + \Phi_2^{-1}(t)\mu_2^2 f_6\left(t, x_1, x_2\right) + \\ +\mu_2 g_1(t)\Phi_2^{-1}(t), \end{cases} \quad (6)$$

здесь $x_i = \Phi_i(t)y_i(t)$, где $i = 1,2$. Будем искать почти периодическое решение системы (6) методом последовательных приближений, определяемых формулой:

$$\begin{cases} \dot{y}_1^{(p)} = \mu_1\Lambda_1 y_1^{(p)} + \Phi_1^{-1}(t)\mu_1^2 f_1\left(t, y_1^{(p-1)}, y_2^{(p-1)}\right) + \\ +\Phi_1^{-1}(t)\mu_1\mu_2 f_2\left(t, y_1^{(p-1)}, y_2^{(p-1)}\right) + \\ +\Phi_1^{-1}(t)\mu_2^2 f_3\left(t, y_1^{(p-1)}, y_2^{(p-1)}\right) + \Phi_1^{-1}(t)\mu_1 g_1(t), \\ \dot{y}_2^{(p)} = \mu_2\Lambda_2 y_2^{(p)} + \Phi_2^{-1}(t)\mu_1^2 f_4(t, y_1^{(p-1)}, y_2^{(p-1)}) + \\ +\Phi_2^{-1}(t)\mu_1\mu_2 f_5(t, y_1^{(p-1)}, y_2^{(p-1)}) + \\ +\Phi_2^{-1}(t)\mu_2^2 f_6(t, y_1^{(p-1)}, y_2^{(p-1)}) + \Phi_1^{-1}(t)\mu_2 g_2(t). \end{cases} \quad (7)$$

В качестве начального приближения $\left(y_1^1, y_2^1\right)$ возьмем почти периодическое решение следующей системы:

$$\begin{cases} \dot{y}_1^1 = \mu_1\Lambda_1 y_1^{(1)} + \Phi_1^{-1}(t)\mu_1 g_1(t), \\ \dot{y}_2^1 = \mu_2\Lambda_2 y_2^{(1)} + \Phi_2^{-1}(t)\mu_2 g_1(t), \end{cases} \quad (8)$$

которое существует.

Доказательство сходимости последовательных приближений будем осуществлять в четыре этапа:

1) Покажем, что все приближения лежат в некоторой ограниченной окрестности начального приближения.

2) Последовательные приближения равномерно сходятся к некоторым почти периодическим функциям $y_1^*(t)$ и $y_2^*(t)$.

3) Функции $y_1^*(t)$ и $y_2^*(t)$ действительно удовлетворяют системе (6) .

4) Полученное решение $\left(y_1^*(t)y_2^*(t)\right)$, будет единственным.

Прежде чем переходить к доказательству выпишем одну оценку для почти периодического решения неоднородного дифференциального уравнения, которая будет основной в ходе нашего доказательства.

Рассмотрим уравнение (9), в котором матрица B не имеет собственных значений с нулевыми вещественными частями , μ — малый положительный параметр, $h(t)$ — почти периодическая функция:

$$\dot{z} = \mu Bz + h(t) \quad (9)$$

$z(t)$ решение системы (9), тогда справедлива следующая оценка: $\left\|z(t)\right\| \le \frac{1}{\mu}\left\|h(t)\right\|c$, где c положительная константа не зависящая от функции $h(t)$.

Переходим к доказательству:

1) Пусть H — положительная константа. Рассмотрим область (Υ) определяемую неравенствами $\left\|y_1 - y_1^{(1)}\right\| \le H$ и $\left\|y_2 - y_2^{(1)}\right\| \le H$.

Покажем, что при достаточно малых μ_1 и μ_2 из области $\left(\Omega_1\right)$ все последовательные приближения лежат в области (Υ). Предположим, что функции $y_1^{(p-1)}(t)$ и $y_2^{(p-1)}(t)$ лежат в области, покажем, что тоже самое справедливо и для p-ых приближений. Очевидно, что разность $y_1^{(p)} - y_1^{(1)}$ удовлетворяет уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{d\left(y_1^{(p)} - y_1^{(1)}\right)}{dt} &= \mu_1\Lambda_1\left(y_1^{(p)} - y_1^{(1)}\right) + \\ &+\Phi_1^{-1}(t)\mu_1{}^2 f_1\left(t, x_1^{(p-1)}, x_2^{(p-1)}\right) + \\ &+\Phi_1^{-1}(t)\mu_1\mu_2 f_2\left(t, x_1^{(p-1)}, x_2^{(p-1)}\right) + \\ &+\Phi_1^{-1}(t)\mu_2^2 f_3\left(t, x_1^{(p-1)}, x_2^{(p-1)}\right), \end{aligned} \quad (10)$$

тогда справедлива оценка:

$$\begin{aligned} \left\|y_1^{(p)} - y_1^{(1)}\right\| &\le \frac{a_1}{\mu_1}\left\|\mu_1 y_1^{(p-1)} + \Phi_1^{-1}(t)\mu_1{}^2 f_1\left(t, x_1^{(p)}, x_2^{(p)}\right) + \right. \\ &+\Phi_1^{-1}(t)\mu_1\mu_2 f_2\left(t, x_1^{(p)}, x_2^{(p)}\right) + \\ &\left. + \Phi_1^{-1}(t)\mu_2^2 f_3\left(t, x_1^{(p)}, x_2^{(p)}\right)\right\| \le \\ &\le a_1 c_1\left(\mu_1 c_{f_1} + \mu_2 c_{f_2} + \frac{\mu_2^2}{\mu_1}c_{f_3}\right). \end{aligned} \quad (11)$$

Для разности $\left\|y_2^{(p)} - y_2^{(1)}\right\|$ аналогично получаем оценку : $\left\|y_2^{(p)} - y_2^{(1)}\right\| \le a_2 c_2\left(\frac{\mu_1^2}{\mu_2}c_{f_4} + \mu_1 c_{f_5} + \mu_2 c_{f_6}\right)$.

Постоянная a_1 не зависит от правой части уравнения (10), $c_{f_i} = \sup_\xi \left\| f_i\left(s, y_1, y_2\right)\right\|$, где $\xi = \left(s, y_1, y_2\right) : \left\| y_1 - y_1^{(1)}(s)\right\| \le H,\ \left\| y_2 - y_2^1(s)\right\| \le H, s \in R^1$ в области (Υ), а $c_1 = \left\|\Phi_1^{-1}(t)\right\|,\ c_2 = \left\|\Phi_2^{-1}(t)\right\|$.

Можно выбрать μ_1^0 и μ_2^0, что при $\mu_1 < \mu_1^0$ и $\mu_2 < \mu_2^0$, $y_1^{(p)}$ и $y_2^{(p)}$ будут лежать в области (Υ).

2) Оценим разности последовательных приближений. Из пункта 1) следует, что можно записать оценки : $\left\| y_i^{(p)} - y_i^{(p-1)}\right\| \le b_p, i = \overline{1,2},\ p \in N$

$$\begin{gathered}\frac{d\left(y_1^{(p+1)} - y_p^{(p)}\right)}{dt} = \mu_1\Lambda_1\left(y_1^{(p+1)} - y_1^{(p)}\right) + \\ +\Phi_1^{-1}(t)\mu_1^{\ 2}\left(f_1(t, x_1^{(p)}, x_2^{(p)}) - f_1(t, x_1^{(p-1)}, x_2^{(p-1)})\right) + \\ +\Phi_1^{-1}(t)\mu_1\mu_2 f_2\left((t, x_1^{(p)}, x_2^{(p)}) - f_2(t, x_1^{(p-1)}, x_2^{(p-1)})\right) + \\ +\Phi_1^{-1}(t)\mu_2^2\left(f_3(t, x_1^{(p)}, x_2^{(p)}) - f_3(t, x_1^{(p-1)}, x_2^{(p-1)})\right),\end{gathered} \tag{12}$$

откуда получаем оценки:

$$\left\| y_1^{(p+1)} - y_1^{(p)}\right\| \le 2a_1c_1b_p\left(\mu_1 L_{f_1} + \mu_2 L_{f_2} + \tfrac{\mu_2^2}{\mu_1} L_{f_3}\right)$$

$$\left\| y_2^{(p+1)} - y_2^{(p)}\right\| \le 2a_2c_2b_p\left(\tfrac{\mu_1^2}{\mu_2} L_{f_4} + \mu_1 L_{f_5} + \mu_2 L_{f_6}\right),$$

где L_{f_i} — константы Липшица функций $f_i\left(t, x_1, x_2\right),\ i = \overline{1,6}$.

Полученные неравенства показывают, что при достаточно малых μ_1 и μ_2 из области $\left(\Omega_2\right)$ можно положить $b_{p+1} = \Theta b_p$, где Θ — некоторая независящая от p положительная постоянная меньше единицы. Из этого вытекает, что последовательности $y_1^{(p)}, y_2^{(p)}$ равномерно сходятся к некоторым почти периодическим функциям y_1^*, y_2^* соответственно.

3) Теперь покажем, что функции $y_1^*(t),\ y_2^*(t)$ в действительности удовлетворяют системе (7). Для этого рассмотрим систему:

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt} = \mu_1\Lambda_1\overline{y}_1 + \mu_1^2\Phi_1^{-1}(t) f_1\left(t, x_1^*, x_2^*\right) + \\ +\mu_1\mu_2\Phi_1^{-1}(t) f_2\left(t, x_1^*, x_2^*\right) + \\ +\mu_2^2\Phi_1^{-1}(t) f_3\left(t, x_1^*, x_2^*\right) + \mu_1 g_1(t), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = \mu_2\Lambda_2\overline{y}_2 + \mu_1^2\Phi_1^{-1}(t) f_4\left(t, x_1^*, x_2^*\right) + \\ +\mu_1\mu_2\Phi_1^{-1}(t) f_5\left(t, x_1^*, x_2^*\right) + \\ +\mu_2^2\Phi_1^{-1}(t) f_6\left(t, x_1^*, x_2^*\right) + \mu_2 g_2(t),\end{cases} \tag{13}$$

здесь $x_i^{(*)} = \Phi_i(t) y_i^{(*)}(t)$, где $i = 1,2$.

Для достижения поставленной цели нам достаточно показать, что $y_1^*(t) = \overline{y}_1(t)$, $y_2^*(t) = \overline{y}_2(t)$. Очевидно, что разность $\overline{y}_1 - y_1^{(p)}$ удовлетворяет уравнению:

$$\begin{gathered}\frac{d\left(y_1^{(p)} - \overline{y}_1\right)}{dt} = \mu_1\Lambda_1\left(\overline{y}_1 - x_1^{(p)}\right) + \\ +\Phi_1^{-1}(t)\mu_1^{\ 2}\left(f_1(t, x_1^*, x_2^*) - f_1\left(t, x_1^{(p-1)}, x_2^{(p-1)}\right)\right) + \\ +\Phi_1^{-1}(t)\mu_1\mu_2\left(f_2\left(t, x_1^*, x_2^*\right) - f_2\left(t, x_1^{(p-1)}, x_2^{(p-1)}\right)\right) + \\ +\Phi_1^{-1}(t)\mu_2^2\left(f_3\left(t, x_1^*, x_2^*\right) - f_3\left(t, x_1^{(p-1)}, x_2^{(p-1)}\right)\right),\end{gathered} \tag{14}$$

здесь $x_i^{p-1}(t) = \Phi_i(t) y_i^{p-1}(t)$, где $i = 1,2$. Для решения $\overline{y}_1 - y_1^{(p)}$ справедлива оценка:

$$\begin{gathered}\left\|\overline{y}_1 - y_1^{(p)}\right\| \le a_1c_1(\mu_1 L_{f_1}\left(\left\| x_1^* - x^{(p-1)}\right\| + \left\| x_2^* - \right.\right. \\ \left.\left. -x_2^{(p-1)}\right\|\right) + \mu_2 L_{f_2}\left(\left\| x_1^* - x^{(p-1)}\right\| + \left\| x_2^* - x_2^{(p-1)}\right\|\right) + \\ + \frac{\mu_2^2}{\mu_1} L_{f_5}\left(\left\| x_1^* - x^{(p-1)}\right\| + \left\| x_2^* - x_2^{(p-1)}\right\|\right) \le \\ \le 2a_1c_1B_{p-1}\left(\mu_1 L_{f_1} + \mu_2 L_{f_2}\ \frac{\mu_2^2}{\mu_1} L_{f_3}\right),\end{gathered} \tag{15}$$

где B_{p-1} верхние пределы функций: $\left\| x_1^* - x_1^{(p-1)}\right\|$, $\left\| x_2^* - x_2^{(p-1)}\right\|$. Для разности $\overline{y}_2 - y_2^{(p)}$ аналогично получим оценку:

$$\left\|\overline{y}_2 - y_2^{(p)}\right\| \le 2a_2c_2B_{p-1}\left(\tfrac{\mu_1^2}{\mu_2} L_{f_4} + \mu_1 L_{f_2} + \mu_2 L_{f_6}\right).$$

Так как $\lim_{p\to\infty} B_p = 0$ (это следует непосредственно из пункта 2), то из установленных неравенств получим $\overline{y}_i = \lim_{p\to\infty} y_i^{(p)} = y_i^*$, где $i = \overline{1,2}$, что и требовалось доказать.

4) Осталось доказать единственность найденных решений. Предположим, что кроме решений $y_1^*,\ y_2^*$ существуют $\overline{y}_1^*,\ \overline{y}_2^*$ решения системы (7), так как при малых μ_1 и μ_2 из области $\left(\Omega_1\right)$ сколь угодно мало отличающихся от начальных приближений $y_1^{(1)}$ и $y_2^{(1)}$. По нашему предположению, мы можем утверждать, что существуют такие положительные μ_1^0 и μ_2^0, что при $\mu_1 < \mu_1^0$ и $\mu_2 < \mu_2^0$ будем иметь $\left\| y_1^* - \overline{y}_1^*\right\| \le \varepsilon,\ \left\| y_2^* - \overline{y}_2^*\right\| \le q\varepsilon$, где $0 < \varepsilon < 1$.

Разность $y_1^* - \overline{y}_1^*$, очевидно, удовлетворяет уравнению:

$$\begin{gathered}\frac{d\left(y_1^{*1} - \overline{y}_1^*\right)}{dt} = \mu_1\Lambda_1\left(y_1^* - \overline{y}_1^*\right) + \\ +\Phi_1^{-1}(t)\mu_1^{\ 2}\left(f_1\left(t, x_1^*, x_2^*\right) - f_1\left(t, \overline{x}_1^*, \overline{x}_2^*\right)\right) + \\ +\Phi_1^{-1}(t)\mu_1\mu_2\left(f_2\left(t, x_1^*, x_2^*\right) - f_2\left(t, \overline{x}_1^*, \overline{x}_2^*\right)\right) + \\ +\Phi_1^{-1}(t)\mu_2^2\left(f_3\left(t, x_1^*, x_2^*\right) - f_3\left(t, \overline{x}_1^*, \overline{x}_2^*\right)\right).\end{gathered} \tag{16}$$

Таким образом $\left\| y_1^* - y_1^{*1}\right\| \le 2a_1c_1\varepsilon\left(\mu_1 L_{f_1} + \right.$ $\left. + \mu_2 L_{f_2} + \tfrac{\mu_2^2}{\mu_1} L_{f_3}\right)$, поэтому можно выбрать μ_1^0 и

μ_2^0, так, что при $\mu_1 < \mu_1^0$ и $\mu_2 < \mu_2^0$ будет выполняться неравенство:

$$2a_1c_1\left(\mu_1 L_{f_1} + \mu_2 L_{f_2} + \tfrac{\mu_2^2}{\mu_1} L_{f_3}\right) < \varepsilon.$$

Откуда находим оценку: $\left\|y_1^* - y_1^*\right\| < \varepsilon^2$. Повторяя выше приведенную выкладку, получим следующие неравенство $\left\|y_1^* - \overline{y}_1^*\right\| < \varepsilon^k$; при $k \to \infty$, получим, что $y_1^* = \overline{y}_1^*$. То есть найденное решение единственно.

Аналогично показывается, что $y_2^* = \overline{y}_2^*$.

Итак, сформулированная теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. — С. 424—435.

2. *Burd V.* Method of averaging for differential equations on an infinite interval., Chapman and Hall / CRC, Florida, 2007. — C. 95—125.

3. *Bogoliubov N. N., Mitropolskiy Yu. A.* Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations // Gordon and Breach, New York, 1961. — C. 25—55.

4. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М., 1967. — С. 183—204.

5. *Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С.* Нелинейные почти периодические колебания. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1970. — 352 с.

6. *Перов А. И.* Периодические, почти периодические и ограниченные решения дифференциальных уравнений // ДАН СССР 132, № 3 (1960).

7. *Бурд В. Ш., Забрейко П. П., Колесов Ю. С., Красносельский М. А.* Принцип усреднения и бифуркация почти периодических решений // ДАН СССР 187, № 6 (1969), С. 1219—1221.

8. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. — Киев: Издательство АН УССР, 1945.

9. *Штокало И. З.* Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентам. — Киев: Изд-во АН УССР, 1960.

10. *Corduneanu C.* Almost Periodic Functions. AMS Chelsea Publishing, 1989.

11. *Massera J. L., Schaffer J. J.* Linear Differential Equations and function Spaces. — New York: Acad, Press, 1966.

12. *Ухалов А. Ю.* Почти периодические решения систем дифференциальных уравнений с быстрым и медленным временем в невырожденном случае // Математические заметки, 63, № 3. 1998. — С. 396—400.

13. *Burd V. Sh.* Resonant almost periodic oscillations in systems with slow varying parameters // International Journal Non-Linear Mechanics, 32, No. 6. — P .1143—1152, 1997.

14. *Жиков В. В.* Проблема почти периодичности для дифференциальных операторных уравнений. Математика, №. 8. 1969. — С. 94—188.

15. *Задорожный В. Г.* К вопросу об условиях применимости метода усреднения. — Воронеж, 1977, Дифференциальные уравнения, Т. 17. — С. 1512—1532.

16. *Гудович А. Н., Каменский М. И., Хроликова Е. В.* Принцип усреднения в задаче о почти периодических решениях обыкновенных дифференциальных уравнений в условиях отсутствия гладкости правой части. — Воронеж: Вестник ВГУ, 2010. — С. 51—60.

17. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. — М.-Л.: ОГИЗ, 1947.

Кутищев И. Н. — аспирант кафедры функционального анализа и операторных уравнений, Воронежский государственный университет
E-mail: iliakou@rambler.ru
Тел.: (473) 220-87-71

Письменный Н. А. — аспирант кафедры функционального анализа и операторных уравнений, Воронежский государственный университет
E-mail: nikitos_p@bk.ru
Тел.: (473) 220-87-71

Рачинский Е. В. — младший научный сотрудник института математики, Воронежский государственный университет
E-mail: RachinskyEV@mail.ru
Тел.: (4732)208771

Kytischev I. N. — Postgraduate student, the Functional Analysis and Operator Equations Department, Voronezh State University.
E-mail:iliakou@rambler.ru
Tel.: (4732)208771

Pismenny N. A. — Postgraduate student, the Functional Analysis and Operator Equations Department, Voronezh State University.
E-mail:nikitos_p@bk.ru
Tel.: (4732)208771

Rachinskiy E. V. — junior research assistant of Research Institute of Mathematics, Voronezh State University.
E-mail: RachinskyEV@mail.ru
Tel.: (4732)208771