УДК 517.9

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

К. С. Кобычев

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 26.10.2011 г.

Аннотация. Вводится понятие медленно меняющихся на бесконечности функций, рассматриваются их свойства. Описывается структура ограниченных решений линейного дифференциального уравнения с постоянными операторными коэффициентами, свободный член которого убывает на бесконечности или является медленно меняющейся на бесконечности функцией.
Ключевые слова: линейное дифференциальное уравнение, представление решения, медленно меняющаяся на бесконечности функция, убывающие на бесконечности функции, полупростые собственные значения.

Abstract. The concept of slowly varying functions is introduced, their properties are descussed. The structure of bounded solutions of a liner differential equation with constant operator coefficients is described in case, when a free term converges to zero on infinity or is a slowly varying function.
Key words: linear differential equation, solution representation, slowly varying on infinity functions, decreasing on infinity functions, semisimple eigenvalue.

Введение. Пусть X — конечномерное нормированное пространство, $L(X)$ — алгебра линейных операторов, действующих в X. $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ — банахово пространство равномерно непрерывных ограниченных функций с нормой $\|x\|_\infty = \max_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|$, $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$. Замкнутое подпространство функций x из $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$, обладающих свойством $\lim_{|t|\to\infty} \|x(t)\| = 0$, обозначим $C_0 = C_0(\mathbb{R}, X)$. $L^\infty(\mathbb{R}, X)$ — банахово пространство измеримых по Бохнеру, существенно ограниченных функций, определенных на $\mathbb{R}$ со значениями в X.

Определение 1. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ называется медленно меняющейся на бесконечности, если для любого α, $S(\alpha)x - x \in C_0(\mathbb{R}, X)$, где $\big(S(\alpha)x\big)(t) = x(t+\alpha)$ — оператор сдвига функции x на α.

Пространство таких функций обозначим символом $C_{sl} = C_{sl}(\mathbb{R}, X)$. Имеет место включение $C_0 \subset C_{sl}$. Символом $L^1(\mathbb{R})$ обозначим банахову алгебру комплексных суммируемых на $\mathbb{R}$ функций с нормой $\|\varphi\| = \int_{\mathbb{R}} |\varphi(u)|\, du$, $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ и со сверткой в качестве умножения. Для преобразования Фурье функции $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ будем использовать обозначение $\hat{\varphi}$, $\hat{\varphi}(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(s) exp(-its) ds$, $t \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида:

$$\dot{x} = Ax + f, \tag{1}$$

где $f \in C_0(\mathbb{R}, X)$, $A \in L(X)$. В следующих теоремах под решением понимается непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая уравнению (1).

Теорема 1. *Пусть функция f принадлежит пространству $C_0(\mathbb{R}, X)$, $\sigma_0(A) = \{i\lambda_k, k = 1,..,m\}$ — совокупность полупростых* собственных значений оператора A, лежащих на мнимой оси. Если существует ограниченное решение уравнения (1), то оно представимо в виде*

$$x(t) = \sum_{k=1}^{m} y_k(t) exp(i\lambda_k t), t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где $y_k \in C_{sl}(\mathbb{R}, X)$.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 1. *Пусть $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$, непрерывно дифференцируема и $\dot{x} \in C_0(\mathbb{R}, X)$. Тогда $x \in C_{sl}(\mathbb{R}, X)$.*

Доказательство. По теореме Ньютона-Лейбница справедливо равенство:

* Собственное значение λ_0 оператора A называется полупростым [1, стр. 59], если отсутствуют присоединенные векторы, отвечающие собственному значению λ_0.

$x(t)-x(0)=\int_0^t \dot{x}(\tau)d\tau, \quad 0<t<\infty.$ Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, учитывая что $\lim_{|t|\to\infty}\|\dot{x}(t)\|=0$, получим

$$\|(S(\alpha)x)(t)-x(t)\|=\|x(t+\alpha)-x(t)\|=$$
$$=\left\|\int_t^{t+\alpha}\dot{x}(\tau)d\tau\right\|=\left\|\int_0^{\alpha}\dot{x}(t+s)ds\right\|\le$$
$$\le\int_0^{\alpha}\|\dot{x}(t+s)\|ds\to 0, \quad t\to\infty.$$

Следовательно, $x\in C_{sl}(\mathbb{R},X)$ (учитывается, что $x\in C_{b,u}(\mathbb{R},X)$). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть функция* $\varphi\in C_0(\mathbb{R},X)$, *а* $f\in L^1(\mathbb{R})$. *Тогда свертка* $(\varphi * f)(t)=\int_{\mathbb{R}} f(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau, \quad t\in\mathbb{R}$, *принадлежит* $C_0(\mathbb{R},X)$.

Доказательство. Так как подпространство бесконечно дифференцируемых финитных функций $C_0^\infty(\mathbb{R})$ плотно в $L^1(\mathbb{R})$, то существует последовательность $f_n\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, сходящаяся к функции f в $L^1(\mathbb{R})$. Тогда, в силу ограниченности функции φ, используя лемму 1 (d) [2, стр. 107], получим

$$\|f*\varphi-f_n*\varphi\|_\infty\le\|f-f_n\|_1\|\varphi\|_\infty\to 0, \quad n\to\infty. \quad (3)$$

Поскольку функция f_n имеет компактный носитель, то свертка $f_n*\varphi$ принадлежит $C_0(\mathbb{R},X)$. Следовательно, в силу замкнутости $C_0(\mathbb{R},X)$ в $C_{b,u}(\mathbb{R},X)$, из (3) получим, что $f*\varphi$ принадлежит подпространству $C_0(\mathbb{R},X)$ как предел последовательности функций из $C_0(\mathbb{R},X)$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть функция* $\varphi\in C_{sl}(\mathbb{R},X)$, *а* $f\in L^1(\mathbb{R})$. *Тогда их свертка* $(f*\varphi)(t)=\int_{\mathbb{R}} f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau, \quad t\in\mathbb{R}$, *принадлежит* $C_{sl}(\mathbb{R},X)$.

Доказательство. Пусть $\psi=f*\varphi$. Для произвольных $\alpha\in\mathbb{R}$ и $t\in\mathbb{R}$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} S(\alpha)\psi-\psi&=S(\alpha)(f*\varphi)-f*\varphi=\\ &=\int_{\mathbb{R}}f(\tau)\big(S(\alpha)\varphi(t-\tau)-\varphi(t-\tau)\big)d\tau=\\ &=\int_{\mathbb{R}}f(\tau)\big(S(-\tau)S(\alpha)\varphi(t)-S(-\tau)\varphi(t)\big)d\tau=\\ &=\int_{\mathbb{R}}f(\tau)S(-\tau)\big(S(\alpha)\varphi(t)-\varphi(t)\big)d\tau=\\ &=\big(f*\big(S(\alpha)\varphi-\varphi\big)\big)(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Так как функция $\varphi\in C_{sl}(\mathbb{R},X)$, то $\big(S(\alpha)\varphi-\varphi\big)\in C_0(\mathbb{R},X)$, следовательно, по лемме 2, функция $\big(S(\alpha)\psi-\psi\big)\in C_0(\mathbb{R},X), \ \forall\alpha\in\mathbb{R}$. Значит, ψ принадлежит пространству $C_{sl}(\mathbb{R},X)$. Лемма доказана.

Для доказательства последующих лемм нам потребуется [3].

Определение 2. *Спектром Берлинга вектора* $x\in L^\infty(\mathbb{R},X)$ *называется подмножество* $\Lambda(x)$ *из* $\mathbb{R}$ *следующего вида* $\Lambda(x)=\{\lambda\in\mathbb{R}: f*x\ne 0$ *для любой функции* $f\in L^1(\mathbb{R})$ с $\hat{f}(\lambda)\ne 0\}$.

Лемма 4. *Для того, чтобы функция* $\varphi\in C_{b,u}(\mathbb{R},X)$ *принадлежала подпространству* $C_{sl}(\mathbb{R},X)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $f*\varphi\in C_0(\mathbb{R},X)$, *для любой функции* $f\in L^1(\mathbb{R})$ *с* $\hat{f}(0)=0$.

Доказательство. Пусть $\varphi\in C_{sl}(\mathbb{R},X)$, тогда для любого α, $S(\alpha)\varphi-\varphi\in C_0(\mathbb{R},X)$ и для любой функции $g\in L^1(\mathbb{R})$ из леммы 2 следует, что $\big(S(\alpha)\varphi-\varphi\big)*g\in C_0(\mathbb{R},X)$. По свойству свертки получим

$$\big(S(\alpha)\varphi-\varphi\big)*g=\varphi*\big(S(\alpha)g-g\big)\in C_0(\mathbb{R},X). \quad (5)$$

Множество линейных комбинаций функций вида $S(\alpha)g-g, \ \alpha\in\mathbb{R}, \ g\in L^1(\mathbb{R})$ образует идеал I в алгебре $L^1(\mathbb{R})$. В следствии 3.2.8 статьи Баскакова [4, стр. 47] установлено, что замыкание $\bar{I}$ идеала I совпадает с максимальным идеалом $M=\{f\in L^1(\mathbb{R}):\hat{f}(0)=0\}$, который является примарным идеалом (примарные идеалы в алгебре $L^1(\mathbb{R})$ совпадают с максимальными [5, стр. 237—238]). При этом непосредственно из определения 2 следует, что аннулятор $\bar{I}^\perp=\{x\in L^\infty(\mathbb{R}): f*x=0,$ для любого $f\in L^1(\mathbb{R})\}$ состоит из постоянных функций, т.е. является одномерным подпространством в $L^\infty(\mathbb{R})$. Именно в терминах $\bar{I}^\perp$ было сформулировано следствие 3.2.8 из [4]. Таким образом, для любой функции $f\in M$ получим, что $\varphi*f\in C_0(\mathbb{R},X)$. Необходимость доказана.

Пусть $f\in L^1(\mathbb{R})$ такова, что $\hat{f}(0)=0$ и для $\varphi\in C_{b,u}(\mathbb{R},X)$ выполнено $\varphi*f=0$. Покажем, что для любого $\alpha\in\mathbb{R}$ функция $\psi=S(\alpha)\varphi-\varphi$, $\psi\in C_{b,u}(\mathbb{R},X)$ принадлежит $C_0(\mathbb{R},X)$. Для всякой функции $g\in L^1(\mathbb{R})$ справедливо

$$\begin{aligned} \psi*g&=\big(S(\alpha)\varphi-\varphi\big)*g=\\ &=\varphi*\big(S(\alpha)g-g\big)\in C_0(\mathbb{R},X). \end{aligned} \quad (6)$$

Далее рассмотрим фактор-пространство $C_{b,u}(\mathbb{R},X)/C_0(\mathbb{R},X)$, являющееся банаховым $L^1(\mathbb{R})$ — модулем [6, стр. 54]. Тогда равенство (6) эквивалентно равенству

$$\tilde{\psi}*g=\tilde{0}, \quad g\in L^1(\mathbb{R}), \quad (7)$$

где $\tilde{0}$ — нулевой элемент фактор-пространства, $\tilde{\psi}=\psi+C_0(\mathbb{R},X)$. Спектр Берлинга элемента

$\tilde{\psi}$ представляет собой множество $\Lambda(\tilde{\psi}) = \left\{\lambda \in \mathbb{R} :\right.$ для любой функции $\left. f \in L^1(\mathbb{R}), \hat{f}(0) = 0, \tilde{\psi} * f = \tilde{0}\right\}$. Поскольку (7) справедливо для любой функции из $L^1(\mathbb{R})$, то оно выполнено и для функции, преобразование Фурье которой не обращается в ноль ни в одной точке из $\mathbb{R}$. Тогда $\Lambda(\tilde{\psi}) = \emptyset$, откуда из теоремы [6, стр. 58] следует, что $\tilde{\psi} = \tilde{0}$, т.е. $S(\alpha)\varphi - \varphi = \psi \in C_0(\mathbb{R}, X)$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Если $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ и непрерывно дифференцируема, причем $\dot{x} \in C_{sl}(\mathbb{R}, X)$, то $x \in C_{sl}(\mathbb{R}, X)$.*

Доказательство. Пусть $y = \dot{x}$, $y \in C_{sl}(\mathbb{R}, X)$. Рассмотрим банахово пространство $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ и сильно непрерывную группу операторов $S(h)$, $h \in \mathbb{R}$ сдвигов функций. Ее инфинитезимальным оператором является оператор дифференцирования функций из $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ [7, стр. 670]. Следовательно, $\lim_{h\to 0} \dfrac{\big(S(h) - I\big)x}{h} = \dot{x}$, где предел берется в $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$. Тогда для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}(0) = 0$, используя свойство непрерывности свертки, получим $\lim_{h\to 0}\left(f * \dfrac{\big(S(h) - I\big)x}{h}\right) = f * \dot{x} \in C_0(\mathbb{R}, X)$. Поскольку $f * \dfrac{\big(S(h) - I\big)x}{h} = \dfrac{S(h) - I}{h}(f * x)$, то существует $\lim_{h\to 0} \dfrac{S(h) - I}{h}(f * x) = f * \dot{x} \in C_0(\mathbb{R}, X)$. Следовательно $f * x$ непрерывно дифференцируема (принадлежит области определения оператора дифференцирования) и $f * x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$. Тогда из леммы 1 следует, что свертка $f * x$ принадлежит $C_{sl}(\mathbb{R}, X)$. Далее из леммы 4 получим, что для любой функции $g \in L^1(\mathbb{R})$, для которой выполнено $\hat{g}(0) = 0$, свертка $g * f * x$ принадлежит $C_0(\mathbb{R}, X)$. Таким образом, можно рассмотреть подпространство $M_0 = \left\{\varphi * f : \varphi \in L^1(\mathbb{R}), \hat{\varphi}(0) = 0, f \in L^1(\mathbb{R}), \hat{f}(0) = 0\right\}$, являющееся собственным идеалом банаховой алгебры $L^1(\mathbb{R})$, содержащееся в максимальном идеале этой алгебры $M = \left\{\varphi \in L^1(\mathbb{R}) : \hat{\varphi}(0) = 0\right\}$. Покажем, что замыкание $\overline{M}_0$ совпадает с M. Предположим противное. Тогда существует ненулевой линейный функционал $\xi : M \to C$ на M, равный нулю на $\overline{M}_0$ и как любой линейный функционал в L^1 он имеет вид:

$$\xi x = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)a(\tau)d\tau, \quad x \in M, \quad a \in L^\infty(\mathbb{R}).$$

Поскольку подпространство M_0 инвариантно относительно сдвига, то для функции $\varphi \in M_0$ и для любого $t \in \mathbb{R}$, $\xi\big(S(t)\varphi\big) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t - \tau)a(\tau)d\tau = (\varphi * a)(t) = 0$. Рассмотрим спектр Берлинга $\Lambda(a)$ функции a. Так как для каждого $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ найдется функция $f \in L^1(\mathbb{R}) \setminus M_0$ с $\hat{f}(\lambda) = 0$ такая, что $f * a \neq 0$, то $\Lambda(a) \subset \{0\}$. Если $\lambda = 0$, то любая функция $f \in M \setminus M_0$ обладает свойствами: $\hat{f}(0) = 0$, $f * a \neq 0$. Таким образом, $\lambda = 0$ также не принадлежит $\Lambda(a)$. Следовательно, $\Lambda(a) = \emptyset$. Тогда из теоремы [6, стр. 58] следует, что $a = 0$, чего не может быть, поскольку функционал ξ ненулевой. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\sigma(A) = \sigma_-(A) \cup \sigma_0(A) \cup \sigma_+(A)$, где $\sigma_0(A) = \left\{i\lambda_k, k = 1,..,m\right\}$, а $\sigma_-(A)$ и $\sigma_+(A)$ — части спектра, лежащие соответственно в левой и правой полуплоскостях. Соответствующие частям спектра проекторы обозначим P_-, P_0 и $P_+ \in L(X)$. Эти проекторы порождают разложение пространства X в прямую сумму подпространств, $X = X_- \oplus X_0 \oplus X_+$, инвариантных относительно A. Применив проектор P_0 к обеим частям тождества (1), получим

$$\dot{x}_0 = A_0 x_0 + f_0, \tag{8}$$

где $A_0 = A \mid X_0$, и для любого $t \in \mathbb{R}$ $x_0(t) = P_0\big(x(t)\big)$, $x_0 : \mathbb{R} \to X$, $f_0(t) = P_0\big(f(t)\big)$. Рассмотрим сначала случай простого нулевого собственного значения, $\sigma_0(A) = 0$. В этом случае оператор $A_0 = P_0 A = 0$ и уравнение (8) примет вид

$$\dot{x}_0 = f_0.$$

Из леммы 1, учитывая что $f \in C_0(\mathbb{R}, X)$, получим, что $x_0 \in C_{sl}(\mathbb{R}, X)$.

Рассмотрим теперь случай, когда спектр оператора A_0 состоит из полупростых собственных значений. В этом случае справедливо представление

$$A_0 = \sum_{k=1}^{m} i\lambda_k P_k,$$

где $P_k \in L(X)$ — проектор на соответствующее инвариантное подпространство оператора A_0. Применив P_k к обеим частям тождества (8), получим

$$\dot{x}_k(t) = i\lambda_k x_k(t) + f_k(t), \tag{9}$$

где $x_k(t) = P_k\big(x_0(t)\big)$, $f_k(t) = P_k\big(f_0(t)\big)$, $t \in \mathbb{R}$. В полученном уравнении сделаем замену переменных $x_k(t) = y_k(t)exp(i\lambda_k t)$ и уравнение (9) запишется следующим образом

$$\dot{y}_k(t) = f_k^0(t), \qquad (10)$$

где $f_k^0(t) = f_k(t)exp(-i\lambda_k t)$, $t \in \mathbb{R}$. Поскольку $f_k \in C_0(\mathbb{R}, X)$, то и $f_k^0 \in C_0(\mathbb{R}, X)$. Из дифференцируемости y_k на $\mathbb{R}$, по теореме о конечных приращениях для любого отрезка $[t, t+h]$ найдется точка $\xi \in [t, t+h]$ такая, что будет выполнено равенство: $y_k(t+h) - y_k(t) = \dot{y}_k(\xi)h$, откуда следует равномерная непрерывность функции y_k. Так как $\|y_k\|_\infty = \|x_k\|_\infty$, то y — ограничена. Значит, функция $y_k \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$. Тогда по лемме 1 функция y_k, а значит и x_k, принадлежит пространству $C_{sl}(\mathbb{R}, X)$. Решение x_0 уравнения (8) будет выражаться через компоненты x_k по формуле:

$$x_0(t) = \sum_{k=1}^{m} x_k(t) = \sum_{k=1}^{m} y_k(t)exp(i\lambda_k t), t \in \mathbb{R}. \qquad (11)$$

Далее рассмотрим уравнение (1) в подпространстве $X_1 = X_+ \oplus X_-$. Таким образом, рассматривается оператор $A_1 = A \mid X_1$ и для любого $t \in \mathbb{R}$ обозначим $x_1(t) = (P_+ + P_-)(x(t))$, $f_1(t) = (P_+ + P_-)(f(t))$. Его ограниченное решение может быть записано с помощью функции Грина [8, стр. 118]

$$x_1(t) = (G * f)(t) = \int_{\mathbb{R}} G(t-\tau) f_1(\tau) d\tau, \qquad (12)$$

где

$$G(t) = \begin{cases} e^{A_1 t} P_-, & t \ge 0, \\ -e^{A_1 t} P_+, & t < 0, \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Покажем, что x_1 принадлежит $C_0(\mathbb{R}, X)$. Так как

$$\|(G * f_1)(t)\| \le \int_R \|G(t-\tau)\| \|f_1(\tau)\| d\tau$$

и для функции Грина справедлива оценка $\|G(t)\| \le N \exp(-\nu \mid t \mid)$ $(\nu > 0,\ N > 0,\ t \in \mathbb{R})$ [8, стр. 119], то функция $\psi(s) = \|G(s)\|$, $s \in \mathbb{R}$ принадлежит пространству $L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$. Функция $\varphi(s) = \|f_1(s)\|$, $s \in \mathbb{R}$ принадлежит подпространству $C_0(\mathbb{R})$. Таким образом по лемме 2, свертка $\psi * \varphi$ принадлежит $C_0(\mathbb{R})$, т.е. $\|x_1(t)\| \le |(\psi * \varphi)(t)| \to 0$, $t \to \infty$.

Решение исходной системы (8) представляет собой сумму

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0(t) + x_1(t) = \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} y_k(t) e^{i\lambda_k t} + \left(y_m(t) + x_1(t) e^{-i\lambda_m t}\right) e^{i\lambda_m t}, \end{aligned} \qquad (13)$$

где $t \in \mathbb{R}$ и, в силу вложения $C_0 \subset C_{sl}$, функция $y_m(t) + x_1(t)e^{-i\lambda_m t}$ принадлежит пространству $C_{sl}(\mathbb{R}, X)$. Таким образом, получаем утверждение теоремы в случае полупростых собственных значений оператора A. Теорема доказана.

Замечание 1. *Из (13) также следует, что представление решения (2) не является единственным. Если*

$$x(t) = \sum_{k=1}^{m} \tilde{y}_k(t) e^{i\lambda_k t}, t \in \mathbb{R},$$

то $y_k - \tilde{y}_k \in C_0(\mathbb{R}, X)$.

Теорема 2. *Пусть функция* f *принадлежит пространству* $C_{sl}(\mathbb{R}, X)$, $\sigma_0(A) = \{i\lambda_k, k = 1,..,m\}$ *— совокупность полупростых собственных значений оператора* A, *лежащих на мнимой оси. Если существует ограниченное решение* x *уравнения (1), то оно имеет вид*

$$x(t) = \sum_{k=1}^{m} y_k(t) exp(i\lambda_k t) + \varphi(t), t \in \mathbb{R}, \qquad (14)$$

где $y_k \in C_{sl}(\mathbb{R}, X)$, $\varphi \in C_{sl}(\mathbb{R}, X)$.

Доказательство. Для оператора A_0, отвечающего части спектра, лежащей на мнимой оси, доказательство аналогично теореме 1, только вместо леммы 1 используется лемма 5. Далее, рассматривая уравнение (1) в подпространстве $X_1 = X_+ \oplus X_-$, запишем его ограниченное решение через свертку функции Грина (G) с $f_1 \in C_{sl}(\mathbb{R}, X)$: $x_1(t) = (G * f_1)(t) = \int_{\mathbb{R}} G(t-\tau) f_1(\tau) d\tau$. Покажем, что x_1 принадлежит $C_{sl}(\mathbb{R}, X)$. Для любого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\|S(\alpha)(G * f_1)(t) - (G * f_1)(t)\| = \\ &= \left\| \int_R G(\tau) \left(S(\alpha) f_1(t-\tau) - f_1(t-\tau)\right) d\tau \right\| \le \\ &\le \int_R \|G(\tau)\| \|S(\alpha) f_1(t-\tau) - f_1(t-\tau)\| d\tau, \ t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Так как функция Грина допускает оценку $\|G(t)\| \le N \exp(-\nu \mid t \mid)$ $(\nu > 0,\ N > 0,\ t \in \mathbb{R})$ [8, стр. 119], то функция $\psi(s) = \|G(s)\|$, $s \in \mathbb{R}$ принадлежит пространству $L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$. Поскольку f_1 из $C_{sl}(\mathbb{R}, X)$, то функция $\varphi(s) = \|S(\alpha) f_1(s) - f_1(s)\|$, $s \in \mathbb{R}$ принадлежит подпространству $C_0(\mathbb{R})$. Таким образом по лемме 3, свертка $\psi * \varphi$ принадлежит $C_0(\mathbb{R})$, откуда следует, что $x_1 = G * f_1$ принадлежит $C_{sl}(\mathbb{R}, X)$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть функция* f *принадлежит* $C_{sl}(\mathbb{R}, X)$ *и часть спектра оператора* A, *лежащая на мнимой оси, состоит из* m *собственных значений* $\sigma_0(A) = \{i\lambda_k, k = 1,..,m\}$.

Если существует ограниченное решение x уравнения (1), то оно имеет вид

$$x(t)=\sum_{k=1}^{m} y_k(t)exp(i\lambda_k t)+\varphi(t), t\in\mathbb{R}, \qquad (15)$$

где $y_k\in C_{sl}(\mathbb{R},X)$, $\varphi\in C_{sl}(\mathbb{R},X)$.

Доказательство. Спектр оператора A можно представить в виде обьединения $\sigma(A)=\sigma_-(A)\cup\sigma_0(A)\cup\sigma_+(A)$. Пусть X_0 — подпространство, соответствующее части спектра $\sigma_0(A)$, $A_0=A\,|\,X_0$ — сужение оператора A на X_0. В свою очередь, подпространство X_0 разлагается в прямую сумму подпространств $X_0=X_{0,1}\oplus X_{0,2}\oplus...\oplus X_{0,m}$, причем $X_{0,k}$, $k=\overline{1,m}$ — инвариантные подпространства относительно оператора A_k, $\sigma(A)=i\lambda_k$, $k=\overline{1,m}$ где $A_k=A_0\,|\,X_{0,k}$. Через P_k, $1\le k\le m$, обозначим проекторы со свойством: $ImP_k=X_{0,k}$, $P_1+...+P_m=I_0$, где I_0 — тождественный оператор в X_0. Каждый из операторов A_k представим в виде: $A_k=i\lambda_k I_k+Q_k$, где I_k — тождественный оператор в $X_{0,k}$, а Q_k — нильпотентный оператор. Через P_0 обозначим проектор, отвечающий части спектра $\sigma_0(A)$, т.е. $ImP_0=X_0$ (см. доказательство теоремы 1).

Пусть уравнение (1) имеет ограниченное решение $x=x_0+\tilde{x}\in C_{b,u}(\mathbb{R},X)$, $x_0=P_0x$. Тогда равенство (1) в подпространстве X_0 примет вид:

$$\dot{x}_0=A_0x_0+f_0, \qquad (16)$$

где $f_0=P_0f$. В свою очередь, x_0 представимо в виде суммы $x_0=\sum_{k=1}^{m}x_k$, где $x_k=P_kx_0$, $1\le k\le m$. Применяя проекторы P_k, $k=\overline{1,m}$ поочередно к обеим частям тождества (16) и учитывая, что $P_kA=AP_k=i\lambda_kI_k+Q_k$, получим:

$$\begin{gathered}\dot{x}_1=i\lambda_1x_1+Q_1x_1+f_1,\\ ...\\ \dot{x}_m=i\lambda_mx_m+Q_mx_m+f_m,\end{gathered} \qquad (17)$$

где $f_k=P_kf_0$, $f_k\in C_0(\mathbb{R},X)$, $k=\overline{1,m}$. Сделаем замену переменных $x_k(t)=\exp(i\lambda_kt)y_k(t)$, $t\in\mathbb{R}$, $k=\overline{1,m}$. Тогда, система (17) примет вид:

$$\begin{gathered}\dot{y}_1=Q_1y_1+e^{-i\lambda_1t}f_1,\\ ...\\ \dot{y}_m=Q_mx_m+e^{-i\lambda_mt}f_m.\end{gathered} \qquad (18)$$

Рассмотрим первое уравнение из (18) и применим к обеим его частям оператор Q_1^{l-1}, где l — индекс нильпотентности оператора Q_1 :

$$Q_1^{l-1}\dot{y}_1(t)=e^{-i\lambda_1t}Q_1^{l-1}f_1(t), \quad t\in\mathbb{R}.$$

Обозначив $z_1=Q_1^{l-1}y_1$ и $g_1(t)=\exp(-i\lambda_1t)Q_1^{l-1}f_1(t)$, $t\in\mathbb{R}$, $g_1\in C_0(\mathbb{R},X)$, получим равенство

$$\dot{z}_1=g_1,$$

из которого по лемме 5 следует, что z_1 принадлежит пространству $C_{sl}(\mathbb{R},X)$. Значит, y_1 также принадлежит $C_{sl}(\mathbb{R},X)$.

Проведя аналогичные рассуждения для остальных уравнений из (18), получим, что $y_k\in C_{sl}(\mathbb{R},X)$, $k=\overline{1,m}$. Следовательно, можно записать представление для решения x_0 уравнения (16):

$$\begin{gathered}x_0(t)=\sum_{k=1}^{m}x_k(t)=\sum_{k=1}^{m}e^{i\lambda_kt}y_k(t),\\ t\in\mathbb{R},\quad y_k\in C_{sl}(\mathbb{R},X).\end{gathered} \qquad (19)$$

Далее, поскольку $x-x_0=\tilde{x}\in C_{sl}(\mathbb{R},X)$, что следует из доказательства теоремы 2 для части решения в подпространстве $X_1=X_-\oplus X_+$, то представление ограниченного решения в виде (15) получено. Теорема доказана.

Приведем достаточное условие существования ограниченных решений уравнения (1).

Теорема 4. *Пусть функция f из (1) принадлежит подпространству $C_0(\mathbb{R},X)\cap L_1(\mathbb{R},X)$ и пусть $\sigma_0(A)=\{i\lambda_k, k=1,..,m\}$ состоит из полупростых собственных значений оператора A, лежащих на мнимой оси, тогда уравнение (1) имеет хотя бы одно ограниченное решение.*

Доказательство. (используемые проекторы имеют указанные в теореме 1 свойства) Рассмотрим функцию вида $x=x_0+x_1$, где x_1 определяется формулой (12), а x_0 имеет вид

$$\begin{gathered}x_0(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{A_0(t-s)}f_0(s)ds,\\ t\in\mathbb{R},\ A_0=A\,|\,X_0,\ f_0=P_0f.\end{gathered}$$

Функция x_0 непрерывно дифференцируема и непосредственной подстановкой получаем, что x_0 удовлетворяет уравнению

$$\dot{x}_0=A_0x_0+f_0.$$

Поскольку совокупность собственных значений оператора A_0 имеет вид $\sigma_0(A)=\{i\lambda_k, k=1...m\}$, то

$$e^{A_0t}=\sum_{k=1}^{m}e^{i\lambda_kt}P_k, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Из этого представления следует ограниченность функции $exp(A_0t)$, то есть $\|exp(A_0t)\|\le\sum_{k=1}^{m}\|P_k\|$. Тогда $\|x_0(t)\|\le\sum_{k=1}^{m}\|P_k\|\|f\|_1$, $t\in\mathbb{R}$. Далее, из доказательства теоремы 1 функция $x_1 = G * f_1$ принадлежит $C_0(\mathbb{R}, X)$ и является решением уравнения

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + f_1, \quad A_1 = A \mid X_1, \quad f_1 = P_1 f.$$

Таким образом функция $x = x_0 + x_1$ является ограниченным решением уравнения (1). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. — М.: Мир, 1972. — 740 с.

2. *Данфорд Н.* Линейные операторы. Спектральная теория / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. — М.: Мир, 1966. — 1063 с.

3. *Калужина Н.С., Марюшенков С.В.* Теорема Берлинга для непрерывных ограниченных функций и функций Степанова с дискретным спектром / Вестник ВГУ, серия: физика, математика. — 2008. — № 2.

4. *Баскаков А. Г.* Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов / Функциональный анализ, СМФН, Т. 9, — М. МАИ, 2004. — С. 3—151.

5. *Гельфанд И. М.* Коммутативные нормированные кольца / И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов. — М.: Государственное издательство физико-математической литературы., 1960. — 315 с.

6. *Баскаков А. Г.* Гармонический анализ линейных операторов / А. Г. Баскаков. — Воронеж: Изд-во ВГУ, 1987. — 165 с.

7. *Данфорд Н.* Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. — М.: Издательство иностранной литературы., 1962. — 873 с.

8. *Далецкий Ю.Л.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. — М.: Наука., 1970. — 536 с.

Кобычев К. С. — аспирант факультета ПММ, Воронежский государственный университет

E-mail: KirillKobychev@gmail.com

Тел.: 8-903-851-56-33

Kobychev K. S. — postgraduate study AMM faculty, Voronezh State University.

E-mail: KirillKobychev@gmail.com

Tel: 8-903-851-56-33