

# АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ КУСОЧНО-ПОСТОЯННОГО СИНТЕЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ

А. Н. Квитко, Д. Б. Якушева

*Санкт-Петербургский государственный университет*

Поступила в редакцию 24.10.2011 г.

**Аннотация:** В работе получен алгоритм построения синтеза управления, гарантирующего перевод достаточно широкого класса нелинейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений из начального состояния в заданное конечное состояние. Получено достаточное условие выбора конечных состояний, при которых возможен указанный перевод с учетом ограничений на управление. Эффективность алгоритма иллюстрируется при решении конкретной практической задачи межорбитального перелета.

**Ключевые слова:** нелинейная стационарная система, граничные условия, стабилизация, синтезирующее управление, устойчивость.

**Abstract.** An algorithm of constructing synthesis of piecewise constant control guaranteeing that solutions of a wide class of nonlinear stationary systems of ordinary differential equations join the initial point and given endpoint in the phase space, was obtained in this work. The sufficient condition of selection of endpoints at which the above indicated transition taking into account controlling constraints is possible, was obtained. The effectiveness of the suggested algorithm is illustrated by solution of a specific practical interorbital flight problem.

**Key words:** nonlinear stationary system, boundary conditions, stabilization, synthesizing piecewise constant control, stability.

## ВВЕДЕНИЕ

Использование цифровой вычислительной техники в системах управления аэрокосмическими комплексами, роботами-манипуляторами, гироскопическими системами и другими подвижными объектами обуславливает формирование управляющих воздействий в дискретные моменты времени. Одним из важных и сложных аспектов математической теории управления являются вопросы, связанные с поиском методов синтеза кусочно-постоянных управляющих функций, при которых решения различных типов систем обыкновенных дифференциальных уравнений соединяют заданные точки в фазовом пространстве. Этим исследованиям посвящены работы [1—3, 5, 7—10]. Вместе с тем значительное число граничных задач в классе кусочно-постоянных управлений ввиду их сложности еще недостаточно изучено. Основное внимание в настоящей работе уделено разработке простых с точки зрения численной реализации алгоритмов нахождения решений указанных задач для широкого класса нелинейных управляемых систем, а также иллюстрации эффективности предложенных алгорит-

мов при решении конкретной практической задачи. Поставленная цель достигнута сведением исходной задачи к задаче непрерывной стабилизации линейной стационарной системы специального вида и последующим решением задачи Коши для вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Объектом исследования является управляемая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (1)$$

$$x = (x^1, \dots, x^n)^T, \quad x \in R^n,$$

$$u = (u^1, \dots, u^r)^T, \quad u \in R^r, \quad r \leq n, \quad t \in [0, \infty),$$

$$f \in C^3(R^n \times R^r; R^n), \quad f = (f^1, \dots, f^n)^T, \quad (2)$$

$$f(0, 0) = 0, \quad (3)$$

$$\text{rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n, \quad (4)$$

$$A = \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(0, 0) \right\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$B = \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial u^j}(0, 0) \right\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, r,$$

$$\|u\| < C, C > 0 \text{ — постоянная величина. (5)}$$

Пусть для системы (1) наряду с условиями (2)—(4) выполнено

$$\det A \neq 0. \quad (6)$$

Тогда из условий (2), (3) и (6) и теоремы о неявной функции следует существование  $\varepsilon_1 > 0$  такого, что  $\forall u$ :

$$\|u\| < \varepsilon_1 \quad (7)$$

уравнение

$$f(x, u) = 0 \quad (8)$$

определяет дифференцируемую неявную функцию

$$x = x(u), \quad (9)$$

определенную в области (7), удовлетворяющую уравнению (8) и условию

$$x(0) = 0. \quad (10)$$

Обозначим через  $\Gamma$   $r$ -мерную поверхность, заданную уравнением (9). Из условия (10) следует, что эта поверхность проходит через начало координат фазового пространства  $R^n$ .

**Определение.** Управление  $u(t)$  называется *кусочно-постоянным*, если

$$u(t) = u(kh), \quad \forall t \in [kh, (k+1)h), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где  $h > 0$  — постоянная величина.

**Задача 1.** Найти кусочно-постоянное управление  $u(t) = u(kh)$ ,  $t \in [kh, (k+1)h)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ,  $h > 0$ , и функцию  $x(t)$ , удовлетворяющие системе (1) и условиям

$$x(0) = 0, \quad x(t) \rightarrow x_1 \text{ при } t \rightarrow \infty, \quad x_1 \in \Gamma. \quad (11)$$

## 1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

**Теорема 1.1.** Пусть для правой части системы (1) выполнены условия (2)—(4), (6). Тогда существуют  $\varepsilon > 0$ ,  $h_0 > 0$  такие, что  $\forall x_1 \in \Gamma: \|x_1\| < \varepsilon$  и  $\forall h: 0 < h < h_0$  существует решение поставленной задачи 1, которое может быть получено после решения задачи стабилизации линейной стационарной системы и последующим решением задачи Коши для вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (порядки указанных систем совпадают с порядком исходной системы).

**Доказательство.** На основании условия (11) на правом конце траектории существует  $u_1 \in R^r$ , принадлежащее области (7) такое, что

$$x_1 = x(u_1). \quad (12)$$

При этом пара  $x_1, u_1$  удовлетворяет уравнению (8). Сделаем в системе (1) замену

$$x(t) = a(t) + x_1, \quad a = (a^1, \dots, a^n)^T, \quad (13)$$

$$u(t) = b(t) + u_1, \quad b = (b^1, \dots, b^r)^T. \quad (14)$$

Тогда согласно (2), (8), (11) в новых переменных  $a(t), b(t)$  система (1) и ограничения (5) примут вид

$$\dot{a} = Pa + Qb + \bar{\varphi}(a, b) + \bar{\varphi}_1(a, b), \quad (15)$$

где

$$P = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, u_1) \right\}, \quad Q = \left\{ \frac{\partial f}{\partial u}(x_1, u_1) \right\},$$

$$\bar{\varphi} = (\bar{\varphi}^1, \dots, \bar{\varphi}^n)^T,$$

$$\bar{\varphi}^i(a, b) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial u^k}(\tilde{a}, \tilde{b}) a^j b^k +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 f^i}{\partial u^j \partial u^k}(\tilde{a}, \tilde{b}) b^j b^k,$$

$$\bar{\varphi}_1 = (\bar{\varphi}_1^1, \dots, \bar{\varphi}_1^n)^T,$$

$$\bar{\varphi}_1^i(a, b) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial x^k}(\tilde{a}, \tilde{b}) a^j a^k,$$

$$\tilde{a} = x_1 + \theta_i(a - x_1), \quad \tilde{b} = u_1 + \theta_i(b - u_1),$$

$$\theta_i \in (0, 1).$$

$$\|b(t) + u_1\| < C. \quad (17)$$

Будем искать кусочно-постоянную функцию  $b(kh)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ,  $h > 0$  и соответствующую функцию  $a(t)$  так, чтобы они удовлетворяли системе (15), ограничениям (17) и условиям

$$a(0) = -x_1, \quad a(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Указанную пару  $a(t), b(kh)$  будем называть решением задачи (15), (18).

**Замечание 1.1.** Имея решение задачи (15), (18), с помощью формул (13), (14) легко получить решение исходной задачи 1.

Условия (2), (4), (10) гарантируют существование  $\varepsilon_2: 0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$  такого, что для всех  $u_1$ :

$$\|u_1\| < \varepsilon_2 \quad (19)$$

и  $x_1$ , удовлетворяющих условию (12), имеет место равенство

$$\text{rank}\{Q, PQ, P^2Q, \dots, P^{n-1}Q\} = n. \quad (20)$$

Ниже будем предполагать, что в (13), (14)  $x_1, u_1$  выбраны так, что они удовлетворяют условиям (9), (19), (20).

Рассмотрим линейное приближение системы (15)

$$\dot{a} = Pa + Qb. \quad (21)$$

Используя (20) и известный алгоритм [4, с. 17—30], найдем функцию

$$b(t) = C_1 a(t), \quad (22)$$

где  $C_1$  — постоянная матрица размерности  $[r \times n]$ , обеспечивающую экспоненциальную устойчивость системе (21). Рассмотрим систему

$$\dot{a} = Pa + Qb + \bar{\varphi}(a, b). \quad (23)$$

Система (23), замкнутая кусочно-постоянным управлением

$$b = C_1 a(kh), \quad t \in [kh, (k+1)h], \quad k = 0, 1, \dots, \quad (24)$$

примет вид

$$\dot{a} = Pa + QC_1 a(kh) + \bar{\varphi}(a, C_1 a(kh)). \quad (25)$$

Введем в рассмотрение функцию  $z(t)$

$$z(t) = a(t) - a(kh) = a(t) - a_k, \quad a_k = a(kh), \quad (26)$$

$$t \in [kh, (k+1)h], \quad k = 0, 1, \dots$$

Решение системы (25) на промежутке  $[kh, (k+1)h]$  имеет вид

$$a(t) = e^{P(t-kh)} a_k + e^{Pt} \int_{kh}^t e^{-P\tau} (QC_1 a_k + \bar{\varphi}(a, C_1 a_k)) d\tau, \quad (27)$$

$$t \in [kh, (k+1)h], \quad k = 0, 1, \dots$$

Сделаем в (27) замену независимой переменной  $t$  на  $\theta$  по формуле  $t - kh = \theta$ . Тогда при  $\theta \in [0, h]$  получим

$$a(\theta + kh) = e^{P\theta} a_k + e^{P(\theta+kh)} \int_0^\theta e^{-P(\tau+kh)} (QC_1 a_k + \bar{\varphi}(a, C_1 a_k)) d\tau, \quad (28)$$

$$\theta \in [0, h].$$

Равенство (28) можно записать в виде

$$a(\theta + kh) = a_k + Pe^{P\xi} \theta a_k + e^{P(\theta+kh)} \int_0^\theta e^{-P(\tau+kh)} (QC_1 a_k + \bar{\varphi}(a, C_1 a_k)) d\tau, \quad (29)$$

$$\theta \in [0, h], \quad \xi \in [0, \theta].$$

Подставив (29) в (26), получим

$$z(\theta + kh) = a(\theta + kh) - a(kh) = Pe^{P\xi} \theta a_k + e^{P(\theta+kh)} \int_0^\theta e^{-P(\tau+kh)} \times (QC_1 a_k + \bar{\varphi}(a, C_1 a_k)) d\tau, \quad (30)$$

$$\theta \in [0, h], \quad \xi \in [0, \theta].$$

Из (30) следует

$$\|z(\theta + kh)\| \leq \|P\| \|e^{P\xi}\| \|a_k\| h + \|e^{P\theta}\| \int_0^h \|e^{-P\tau}\| \|QC_1 a_k + \bar{\varphi}(a, C_1 a_k)\| d\tau, \quad (31)$$

$$\theta \in [0, h], \quad \xi \in [0, h].$$

На основании (2), (16) в области

$$\|a\| < C_2 \quad (32)$$

справедлива оценка

$$\|\bar{\varphi}(a, C_1 a_k)\| \leq K \|a_k\|. \quad (33)$$

В (32)  $C_2 > 0$  — некоторая фиксированная константа.

Константа  $K$  определяется областью (32). Используя (33), неравенство (31) можно записать в форме

$$\|z(t)\| \leq K_1 h \|a_k\| + K_2 h \|a_k\|. \quad (34)$$

В (34) константы  $K_1, K_2$  не зависят от промежутка  $[kh, (k+1)h]$ . С другой стороны согласно (26)

$$\|a_k\| \leq \|a(t)\| + \|z(t)\|, \quad t \in [kh, (k+1)h], \quad (35)$$

$$k = 0, 1, \dots$$

Неравенства (34), (35) дают оценку

$$\|z(t)\| \leq \frac{(K_1 + K_2)h}{1 - (K_1 + K_2)h} \|a(t)\|, \quad (36)$$

$$t \in [kh, (k+1)h], \quad k = 0, 1, \dots$$

Система (21), замкнутая стабилизирующим управлением (22), имеет вид

$$\dot{a} = (P + QC_1) a. \quad (37)$$

В силу экспоненциальной устойчивости системы (37) существует положительно определенная квадратичная форма  $V(a)$  [11, с. 100] такая, что

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(37)} = -\|a\|^2. \quad (38)$$

Производная  $V(a)$  в силу системы (25) имеет вид

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(25)} = -\|a\|^2 - (\text{grad } V, QC_1 z) + (\text{grad } V, \bar{\varphi}(a, C_1 a(kh)) - \bar{\varphi}(a, C_1 a)) + (\text{grad } V, \bar{\varphi}(a, C_1 a)). \quad (39)$$

В области (32) справедливы оценки

$$\|\text{grad } V\| \leq K_3 \|a\|, \quad (40)$$

$$\|\bar{\varphi}(a, C_1 a(kh)) - \bar{\varphi}(a, C_1 a)\| \leq K_4 \|a(kh) - a(t)\|. \quad (41)$$

Используя (39)—(41), получим оценку

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(25)} \leq -\|a\|^2 + K_5 \|a\| \|z\| + K_6 \|a\| \|z\| + K_7 \|a\|^3. \quad (42)$$

В (42)  $K_i, i = \overline{5, 7}$  — константы, зависящие от области (32).

Из (36), (42) следует

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(25)} \leq -\|a\|^2 + \left( \frac{K_5(K_1 + K_2)h}{1 - (K_1 + K_2)h} + \frac{K_6(K_1 + K_2)h}{1 - (K_1 + K_2)h} \right) \|a\|^2 + K_7 \|a\|^3. \quad (43)$$

Выберем константы  $C_3$ :  $0 < C_3 < C_2$  и  $h_0 > 0$  так, чтобы было выполнено

$$\frac{K_5(K_1 + K_2)h_0}{1 - (K_1 + K_2)h_0} + \frac{K_6(K_1 + K_2)h_0}{1 - (K_1 + K_2)h_0} + K_7 C_3 < 1. \quad (44)$$

Тогда  $\forall h: 0 < h \leq h_0$  оценка (43) в области

$$\|a\| < C_3 \quad (45)$$

примет вид

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(25)} \leq -\gamma \|a\|^2, \quad \gamma > 0. \quad (46)$$

Производная функции  $V(a)$  в силу системы (15) имеет вид

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(15)} = \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(25)} + (\text{grad } V, \bar{\varphi}_1(a)). \quad (47)$$

Оценивая правую часть (47) в области (45), с учетом (46) получим

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(15)} \leq -\gamma \|a\|^2 + K_8 \|a\|^3. \quad (48)$$

Выберем константу  $C_4$ :  $0 < C_4 < C_3$  так, чтобы

$$K_8 C_4 < \gamma. \quad (49)$$

Тогда в области

$$\|a\| < C_4 \quad (50)$$

справедливо неравенство

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(15)} \leq -\gamma_1 \|a\|^2, \quad \gamma_1 > 0. \quad (51)$$

С другой стороны функция  $V(a)$  является квадратичной формой, которая находится после решения уравнения Ляпунова, и для нее справедлива оценка

$$\alpha_1 \|a\|^2 \leq V(a) \leq \alpha_2 \|a\|^2, \quad \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0. \quad (52)$$

Константы  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  определяются матрицей квадратичной формы  $V(a)$ . Из (51) и (52) следует

$$\frac{d \ln V}{dt} \leq -\frac{\gamma_1}{\alpha_2}. \quad (53)$$

Интегрируя (53) на промежутке  $[0, t]$ , получим

$$V(a(t)) \leq V(a_0) e^{-\frac{\gamma_1}{\alpha_2} t}, \quad a_0 = a(0) = -x_1. \quad (54)$$

Окончательно условия (52) и (54) дают оценку

$$\|a(t, 0, -x_1)\| \leq \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \|x_1\| e^{-\frac{\gamma_1}{2\alpha_2} t}, \quad t \in [0, +\infty). \quad (55)$$

Из формулы (24) и неравенства (55) имеем

$$\|b(t)\| \leq \|C_1\| \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \|x_1\|, \quad t \in [0, +\infty). \quad (56)$$

Используя (10), (12), можно найти  $\delta > 0$ :  $0 < \delta < \varepsilon_1$  такое, что  $\forall u_1$ :

$$\|u_1\| < \delta \quad (57)$$

будет выполнено

$$\|x_1(u_1)\| < \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \frac{1}{\|C_1\|} C_4, \quad (58)$$

$$\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \|C_1\| \|x_1(u_1)\| + \|u_1\| < C. \quad (59)$$

Положим в правой части неравенства (57)  $\delta$ :  $0 < \delta < C$ ,  $0 < \delta < \varepsilon_2$ . В результате оценка (59) примет вид

$$\|x_1(u_1)\| < \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \frac{C - \delta}{\|C_1\|}. \quad (60)$$

Пусть

$$\varepsilon = \min \left\{ \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \frac{C - \delta}{\|C_1\|}, \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \frac{1}{\|C_1\|} C_4 \right\}.$$

Тогда из оценок (55), (56), (58), (59), (60) следует, что решение системы (15) с начальными условиями (18), принадлежащими области  $\|x_1\| < \varepsilon$ , замкнутой управлением (24), не покидает области (50). Соответствующая пара функций  $x(t)$ ,  $u(t)$ , найденная по формулам (13), (14), суть решение исходной Задачи 1. Теорема доказана.

**Замечание 1.2.** Условие (6) может быть заменено любым менее обременительным условием, гарантирующим разрешимость векторного уравнения (8) относительно управления  $u$ .

**Задача 2.** Найти кусочно-постоянное управление  $u(t) = u(kh)$ ,  $t \in [kh, (k+1)h)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ,  $h > 0$ , и функцию  $x(t)$ , удовлетворяющие системе (1) и условиям

$$x(0) = 0, \quad \|x(t') - x_1\| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (61)$$

где  $t'$  — заранее неизвестный момент времени.

**Замечание 1.3.** Очевидно, что решение задачи 1, заданное на промежутке  $[0, t']$  дает решение задачи 2, где  $t'$  удовлетворяет неравенству

$$t' > -\frac{2\alpha_2}{\gamma_1} \ln \left( \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \cdot \frac{\varepsilon}{\|x_1\|} \right). \quad (62)$$

Неравенство (62) следует из оценки (55).

## 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МЕЖОРБИТАЛЬНОГО ПЕРЕЛЕТА

В качестве иллюстрации предложенного метода рассмотрим задачу перевода материальной точки, движущейся по круговой орбите с постоянной скоростью в центральном поле тяготения, в заданную точку, лежащую в плоскости этой орбиты. В качестве управляющего воздействия выбрана реактивная сила. Согласно [6, с. 28—30] система уравнений в отклонениях относительно указанного движения по круговой орбите имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = v_1(x^1, x^4) + u^1, \\ \dot{x}^3 = x^4, \\ \dot{x}^4 = v_2(x^1, x^2, x^4) + v_3(x^1)u^2, \end{cases} \quad (63)$$

где  $x^1 = r - r_0$ ,  $x^2 = \dot{r}$ ,  $x^3 = \psi - \alpha_0 t$ ,  $x^4 = \dot{\psi} - \alpha_0$ ,  $u^1 = a_r \dot{m} / m$ ,  $u^2 = a_\psi \dot{m} / m$ ,  $r_0$  — радиус круговой орбиты,  $\dot{r}$  — радиальная скорость,  $\psi$  — полярный угол,  $\dot{\psi}$  — скорость изменения полярного угла,  $a_r$ ,  $a_\psi$  — проекции вектора относительной скорости отделяющейся частицы на направление радиуса и на ортогональ к направлению соответственно,  $m$ ,  $\dot{m}$  — соответственно масса и скорость изменения массы,  $\alpha_0$  — угловая скорость движения по заданной круговой орбите,

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{v}{(x^1 + r_0)^2} + (x^1 + r_0)(x^4 + \alpha_0)^2, \\ v_2 &= -2\frac{x^2(x^4 + \alpha_0)}{x^1 + r_0}, \\ v_3 &= \frac{1}{x^1 + r_0}, \end{aligned} \quad (64)$$

$v = v^0 M$ ,  $v^0$  — постоянная всемирного тяготения,  $M$  — масса планеты. Предполагаем, что  $u^1$  и  $u^2$  являются кусочно-постоянными управляющими функциями. Граничные условия (11), (12) имеют вид

$$x = (x^1, x^2, x^3, x^4)^T, \quad u = (u^1, u^2)^T, \quad (65)$$

$$x(0) = 0, \quad x(t) \rightarrow x_1, \quad t \rightarrow \infty, \quad (66)$$

$$x_1 = (x_1^1, x_1^2, x_1^3, x_1^4)^T, \quad u_1 = (u_1^1, u_1^2)^T, \quad (67)$$

$$x_1^2 = 0, \quad x_1^4 = 0,$$

$$u_1^1 = -v_1(x_1^1, 0), \quad u_1^2 = -\frac{v_2(x_1^1, 0, 0)}{v_3(x_1^1)} = 0. \quad (68)$$

Матрицы  $P$ ,  $Q$ , стоящие в правой части системы (21), а также матрица  $S$ , входящая в матрицу, стоящую в левой части равенства (20), запишутся так

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \beta_0 \end{pmatrix},$$

$$a_{21} = \frac{\partial v_1}{\partial x^1}(x_1^1, 0), \quad a_{24} = \frac{\partial v_1}{\partial x^4}(x_1^1, 0),$$

$$a_{42} = \frac{\partial v_2}{\partial x^2}(x_1^1, 0, 0), \quad \beta_0 = v_3(x_1^1),$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_{21} + a_{24}a_{42} & 0 \\ 0 & 0 & a_{42} & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & \beta_0 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $S = (q_1, Pq_1, P^2q_1, q_2)$  при условии обозначений  $Q = (q_1, q_2)$ . Очевидно,  $\det S \neq 0$  для всех  $x_1^1, x_1^3$ . Отсюда следует стабилизируемость системы (21) независимо от выбора  $x_1^1, x_1^3$ . Далее по известному алгоритму [4, с. 17—30] строим управление, стабилизирующее систему (21). На следующем этапе решаем задачу Коши для системы (15), (24) с начальными данными, удовлетворяющими условию  $a(0) = -x_1$ . В результате с помощью формул (13), (14) получаем пару функций

$$x(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t), x^4(t))^T,$$

$$u(kh) = (u^1(kh), u^2(kh))^T,$$

удовлетворяющих системе (63) и условиям (66).

## 3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В процессе численного моделирования после замены функций  $x(t)$ ,  $u(t)$  на  $a(t)$ ,  $b(t)$  в соответствии с формулами (13), (14), интегрировалась вспомогательная система

$$\begin{cases} \dot{a}^1 = a^2, \\ \dot{a}^2 = v_1(a^1 + x_1^1, a^4) + b^1 + u_1^1, \\ \dot{a}^3 = a^4, \\ \dot{a}^4 = v_2(a^1 + x_1^1, a^2, a^4) + v_3(a^1 + x_1^1)b^2, \\ u_1^1 = \frac{v}{(x_1^1 + r_0)^2} - (x_1^1 + r_0)\alpha_0^2, \end{cases} \quad (69)$$

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{v}{r_0^3}} \text{ рад/сек}, \quad x_1^1 = 100 \text{ м}, \quad r_0 = 7 \cdot 10^6 \text{ м}, \quad (70)$$

$$x_1^3 = -\frac{\alpha_0}{10^6} \text{ рад}, \quad \varepsilon = 0.001$$

на промежутке  $[0, 15]$  с начальными данными  $a^1(0) = -x_1^1$ ,  $a^2(0) = 0$ ,  $a^3(0) = -x_1^3$ ,  $a^4(0) = 0$ , (71) замкнутая управлениями

$$\begin{aligned} b^1 &= (-m - 11)a^1(kh) - 6a^2(kh) - \frac{6}{a_{42}}a^3(kh), \\ b^2 &= \frac{a_{42}}{v_3}a^1(kh) - \frac{1}{v_3}a^4(kh), \end{aligned} \quad (72)$$

где  $m = a_{21} + a_{24}a_{42}$ ,  $h = 0.1$ ,  $k = 0, 1, \dots$ .

Поясним, каким образом были получены управляющие функции  $b^1$ ,  $b^2$ . После замены  $a = Sy$  в новых переменных  $y$  система (69) примет вид

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{a_{21}v_3}{a_{42}} \\ 1 & 0 & a_{21} + a_{24}a_{42} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{v_3}{a_{42}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} b, \quad (73)$$

$$y = (y^1, \dots, y^4)^T.$$

Разбиваем полученную систему (73) на две независимые подсистемы

$$\dot{\bar{y}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_{21} + a_{24}a_{42} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{y} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} b, \quad (74)$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= (\bar{y}^1, \dots, \bar{y}^3)^T \\ y^4 &= b^2. \end{aligned} \quad (75)$$

Для подсистемы (74), положив  $\bar{y}^3 = \psi$ , получим

$$\begin{cases} \dot{\bar{y}}^1 = \psi^{(2)} - (a_{21} + a_{24}a_{42})\psi, \\ \dot{\bar{y}}^2 = \psi^{(1)}, \\ \dot{\bar{y}}^3 = \psi. \end{cases} \quad (76)$$

Из первого уравнения системы (74) имеем  $\dot{\bar{y}}^1 = b^1$ . Тогда из первого равенства (76) получим

$$\psi^{(3)} - (a_{21} + a_{24}a_{42})\psi^{(1)} = b^1. \quad (77)$$

Далее решаем задачу стабилизации уравнения (77) посредством функции  $b^1$ . Если  $b^1$  выбрать в виде

$$b^1 = -6\psi^{(2)} + (-(a_{21} + a_{24}a_{42}) - 11)\psi^{(1)} - 6\psi, \quad (78)$$

то характеристический полином полученного уравнения будет иметь вид

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0 \quad (79)$$

с корнями  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -2$ ,  $\lambda_3 = -3$ . Отсюда следует экспоненциальная устойчивость уравнения (77), замкнутого управлением (78). Переходя к исходным фазовым координатам системы (69), окончательно получим

$$\begin{aligned} b^1 &= \delta T^{-1}S_1^{-1}a = \\ &= (-(a_{21} + a_{24}a_{42}) - 11)a^1 - 6a^2 - \frac{6}{a_{42}}a^3, \end{aligned} \quad (80)$$

где  $\delta = (-6, -(a_{21} + a_{24}a_{42}) - 11, -6)$ ,  $T^{-1}$  — матрица, обратная к матрице системы равенств (76),  $S_1^{-1}$  — матрица, обратная к матрице, состоящей из первых трех строк матрицы  $S$ . Аналогично получим

$$b^2 = \frac{a_{42}}{v_3}a^1 - \frac{1}{v_3}a^4. \quad (81)$$

Из постоянства матриц перехода  $T$  и  $S$  следует экспоненциальная устойчивость исходной системы при полученных управлениях (80), (81). В теореме было доказано, что при достаточно малых  $h$  кусочно-постоянные управляющие функции (72), полученные из формул (80), (81), обеспечивают экспоненциальную устойчивость системе (69).

На рисунках 1 и 2 представлены графики изменения искомых управляющих функций  $b^1$ ,  $b^2$  и соответствующих им функций фазовых координат  $a^1(t)$ ,  $a^2(t)$ . Для удобства восприятия на графиках компоненты  $a^i, i = 1, 2$  и  $b^i, i = 1, 2$  обозначены соответственно через  $x_i$  и  $u_i$ .

Анализ результатов численного моделирования, выполненный на основе численного эксперимента, позволяет сделать следующие выводы:

1) наибольшие энергетические затраты приходятся на радиальную составляющую  $b^1$  управляющего воздействия  $b$  (под "энергетическими затратами" здесь понимается макси-

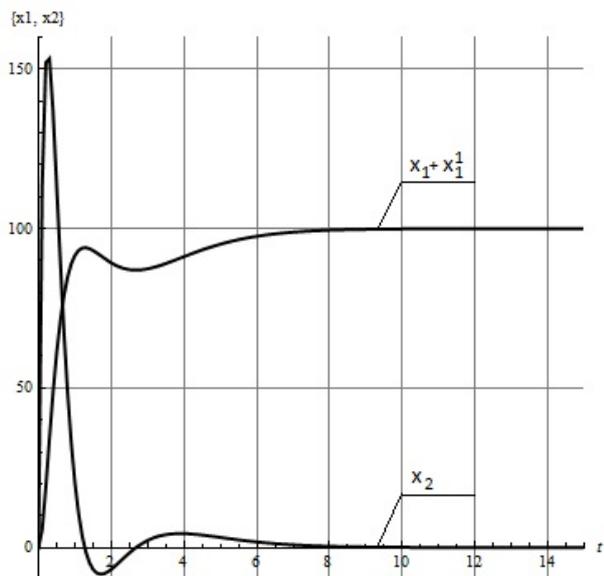


Рис. 1. Графики изменения фазовых координат  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$

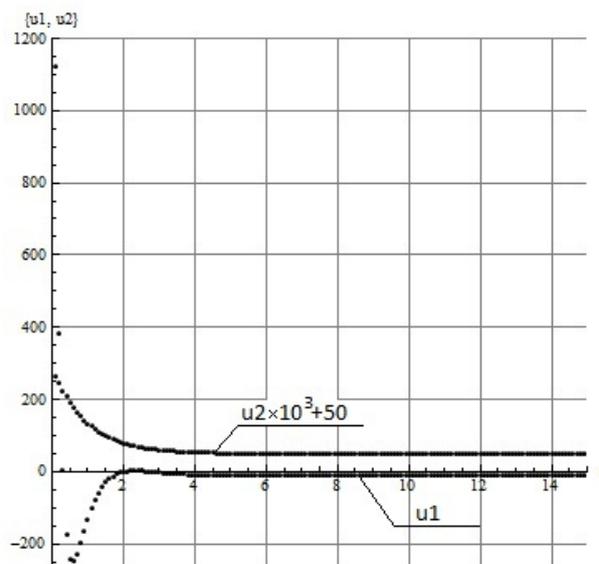


Рис. 2. Графики изменения управлений  $u_1(kh)$ ,  $u_2(kh)$

мальная величина модуля управляющего воздействия на промежутке интегрирования);

2) критическое значение шага дискретности при условиях (70)  $h = 0.3$  (при  $h > 0.3$  полученный закон управления не дает решения поставленной задачи); при шаге  $h = 0.1$  критическое значение для  $x_1^1 = 130$  (полученный в работе алгоритм применительно к данному примеру дает искомое решение при фиксированном шаге  $h$  при  $x_1^1 \leq 130$ );

3) задача межорбитального перелета легко решается с помощью персональных ЭВМ средних возможностей.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты численного моделирования показывают, что предложенный алгоритм может быть использован для решения различных практических задач.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Allon Amit, Segev Reuven. Driving a linear constant system by a piecewise constant control // Int. Contr. — 1988. — Vol. 47. — № 3. — P. 815—825.
2. Антончик В. С. Методы стабилизации программных движений. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1998. — 208 с.
3. Fury M., Nistri P., Pera M. P., Zezza P. L. Linear controllability by piecewise constant control

with assigned switching times // J. Optimize Theory and Apl. — 1985. — Vol. 45. — № 2. — P. 219—229.

4. Смирнов Е. Я. Некоторые задачи математической теории управления. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. — 200 с.

5. Квитко А. Н. Об одном методе решения граничной задачи для нелинейной управляемой системы в классе дискретных управлений // Дифференциальные уравнения. — 2008. — Т. 44. — № 11. — С. 1499—1509.

6. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968. — 475 с.

7. Кухта К. Я. О решении нелинейной, нестационарной непрерывно-дискретной граничной задачи в теории управления // Автоматика и телемеханика. — 1991. — № 6. — С. 78—83.

8. Лапин С. В. Кусочно-постоянная стабилизация систем, линейных относительно управления // Автоматика и телемеханика. — 1992. — № 6. — С. 37—45.

9. Nguen Than Bang. Numerical solution of the d-control problem for nonlinear systems // Autom. and telemech. — 1983. — Vol. 28. — № 3. — P. 131—143.

10. Zezza P. On reachable set for linear systems with piecewise constant controls // Bol. Unione mat. Ital. — 1986. — Vol. 5. — № 1. — P. 127—137.

11. Зубов В. И. Лекции по теории управления. — М.: Наука, 1975. — 495 с.

*Алгоритм построения кусочно-постоянного синтезирующего управления при решении граничной...*

*Квитко А. Н. — профессор кафедры информационных систем, Санкт-Петербургский государственный университет*

*E-mail: alkvit46@mail.ru*

*Тел.: 8-911-170-44-81*

*Якушева Д. Б. — аспирант кафедры информационных систем, Санкт-Петербургский государственный университет*

*E-mail: dariayakusheva@gmail.com*

*Тел.: 8-921-328-92-62*

*Kvitko A. N. — professor of department of information systems, Saint-Petersburg state university*

*E-mail: alkvit46@mail.ru*

*Tel.: 8-911-170-44-81*

*Yakusheva D. B. — post-graduate student of department of information systems, Saint-Petersburg state university*

*E-mail: dariayakusheva@gmail.com*

*Tel.: 8-921-328-92-62*