УДК 517.977

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. Г. Задорожний, И. П. Якубенко

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 01.02.2012 г.

Аннотация. Получены необходимые условия в виде уравнений Фредгольма второго рода для первых двух моментных функций оптимального управления линейной системой со случайными коэффициентами.
Ключевые слова: линейная управляемая система, математическая модель управления, моментные функции оптимального управления, квадратичный критерий качества управления, случайные коэффициенты.

Abstract. Necessary conditions for the first two momentary functions of the linear optimal control system with stochastic parameters in the second form Fredholm equations were obtained.
Keywords: linear control system, mathematical models of the optimal control, the moment functions of optimal control, quadratic performance index, stochastic parameters.

1. Введение. Рассмотрим линейную управляемую систему, описываемую уравнением

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon(t)x + u(t)\,, \tag{1}$$

где $t \in R$, $u : R \to R$ управление, $\varepsilon(t)$ — случайный процесс.

Обычно при заданном начальном условии

$$x(t_0) = M(x_0) \tag{2}$$

требуется найти малое управление $u(t)$, которое обеспечивает близость к нулю $x(t)$ на заданном промежутке времени $[t_0, T]$. Поскольку $\varepsilon(t)$ является случайным процессом, то управление $u(t)$ также будет случайным процессом. Наибольший интерес представляют собой первые две моментные функции случайного процесса $u(t)$. Таким образом, естественной является следующая задача.

При заданном случайном процессе $\varepsilon(t)$ и математическом ожидании $M(x_0)$ требуется найти моментные функции $M(u(t))$ и $M(u(t)u(\tau))$, при которых функционал

$$\begin{aligned} I = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}[A_1(s)M^2(x(s)) + B_1(s)M^2(u(s))]ds + \\ +\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}[A_2(s_1,s_2)M^2(x(s_1)x(s_2)) + \\ +B_2(s_1,s_2)M^2(u(s_1)u(s_2))]ds_1 ds_2 + \\ +\frac{c_1}{2}M^2(x(T)) + \frac{c_2}{2}M^2(x^2(T)) \end{aligned} \tag{3}$$

принимает наименьшее значение.

Здесь $A_1(s) \ge 0, B_1(s) > 0$, заданные непрерывные функции, $A_2(s_1,s_2) \ge 0, B_2(s_1,s_2) > 0$, заданные симметричные по s_1, s_2 непрерывные функции, $c_1 \ge 0, c_2 \ge 0$ — заданные числа.

Линейным задачам с квадратичным критерием качества посвящено множество работ, однако, обычно вместо уравнения (1) рассматривается линейное стохастическое дифференциальное уравнение (см., например, [1]).

Мы считаем, что случайный процесс $\varepsilon(t)$ задан своим характеристическим функционалом

$$\varphi_\varepsilon(v) = M(\exp(i\int_{t_0}^{T}\varepsilon(s)v(s)ds))\,,$$

причем управление $u(t)$ выбирается случайным образом и не зависит от $\varepsilon(t)$.

2. НАХОЖДЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Пусть сначала $A_2 = B_2 = 0$, $c_2 = 0$. Тогда критерий качества I имеет вид

$$\begin{aligned} I_1 = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}[A_1(s)M^2(x(s)) + B_1(s)M^2(u(s))]ds + \\ +\frac{c_1}{2}M^2(x(T)) \end{aligned} \tag{4}$$

и не зависит от $M(u(t)u(\tau))$. Будем искать $M(u(t))$, которое доставляет минимум функционалу I_1.

Используя известную формулу решения задачи Коши для линейного неоднородного уравнения, выпишем решение задачи (1), (2) для реализации $\varepsilon(t)$

$$x(t) = x_0 \exp(\int_{t_0}^{t} \varepsilon(s)ds) + \int_{t_0}^{t} \exp(\int_{s}^{t} \varepsilon(\tau)d\tau)u(s)ds .$$

При условии, что x_0 не зависит от $\varepsilon(t)$ и $u(t)$, находим

$$M(x(t)) = M(x_0)M(\exp(\int_{t_0}^{t} \varepsilon(s)ds)) +$$
$$+\int_{t_0}^{t} M(\exp(\int_{s}^{t} \varepsilon(\tau)d\tau))M(u(s))ds.$$

Введем в рассмотрение функцию $\chi(s,t,\tau)$, определенную следующим образом: $\chi(s,t,\tau) = sign(\tau - s)$ если τ принадлежит отрезку с концами s и t и равно нулю в противном случае. Нетрудно проверить, что выражение для математического ожидания фазовой траектории можно записать с помощью характеристического функционала φ_ε

$$M(x(t)) = M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,t)) +$$
$$+\int_{t_0}^{t} \varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t))M(u(s))ds. \tag{5}$$

Подставим (5) в функционал I_1, получим

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} [A_1(s)[M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s)) +$$
$$+\int_{t_0}^{s} \varphi_\varepsilon(-i\chi(z,s))M(u(z))dz]^2 + B_1(s)M^2(u(s))]ds +$$
$$+\frac{c_1}{2}[M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,T)) +$$
$$+\int_{t_0}^{T} \varphi_\varepsilon(-i\chi(s,T))M(u(s))ds]^2.$$

Лемма 1. Вариационная производная [2] $\dfrac{\delta I_1}{\delta M(u(t))}$ функционала I_1 равна

$$\int_{t}^{T} A_1(s)[M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s)) +$$
$$+\int_{t_0}^{s} \varphi_\varepsilon(-i\chi(h,s))M(u(h))dh]\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s))ds + \tag{6}$$
$$+B_1(t)M(u(t)) + c_1M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,T))\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T)) +$$
$$+c_1\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T))\int_{t_0}^{T} \varphi_\varepsilon(-i\chi(z,T))M(u(z))dz.$$

Доказательство. Представим функционал I_1 в виде суммы двух функционалов $I_1 = I_1^* + I_1^{**}$, где

$$I_1^* = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} A_1(s)[M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s)) +$$
$$+\int_{t_0}^{s} \varphi_\varepsilon(-i\chi(z,s))M(u(z))dz]^2 ds,$$

$$I_1^{**} = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} B_1(s)M^2(u(s))ds +$$
$$+\frac{c_1}{2}[M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,T)) + \int_{t_0}^{T} \varphi_\varepsilon(-i\chi(s,T))M(u(s))ds]^2.$$

Найдем вариацию функционала I_1^*, т. е вычислим выражение

$$\delta I_1^* = \left.\frac{dI_1^*(M(u(s)) + \alpha\delta M(y(s)))}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}.$$

Рассмотрим приращение

$$I_1^*(M(u(s)) + \alpha\delta M(y(s))) =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} A_1(s)[M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s)) +$$
$$+\int_{t_0}^{s} \varphi_\varepsilon(-i\chi(z,s))(M(u(z)) + \alpha\delta M(u(z)))dz]^2 ds,$$

вычислим производную по α

$$\frac{dI_1^*(M(u(s)) + \alpha\delta M(y(s)))}{d\alpha} =$$
$$= \int_{t_0}^{T} A_1(s)[M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s)) +$$
$$+\int_{t_0}^{s} \varphi_\varepsilon(-i\chi(z,s))(M(u(z)) +$$
$$+\alpha\delta M(u(z)))dz]\int_{t_0}^{s} \varphi_\varepsilon(-i\chi(z,s))\delta M(u(z))dzds.$$

в точке $\alpha = 0$ имеем

$$\left.\frac{dI_1^*(M(u(s)) + \alpha\delta M(y(s)))}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} =$$
$$= \int_{t_0}^{T} A_1(s)[M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s)) +$$
$$+\int_{t_0}^{s} \varphi_\varepsilon(-i\chi(z,s))M(u(z))dz] \times$$
$$\times\int_{t_0}^{s} \varphi_\varepsilon(-i\chi(z,s))\delta M(u(z))dzds.$$

или

$$\left.\frac{dI_1^*(M(u(s))+\alpha\delta M(y(s)))}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}=$$

$$=\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s}A_1(s)[M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s))+$$

$$+\int_{t_0}^{s}\varphi_\varepsilon(-i\chi(h,s))M(u(h))dh]\varphi_\varepsilon(-i\chi(z,s))\times$$

$$\times\delta M(u(z))dzds.$$

Поменяем порядок интегрирования

$$\left.\frac{dI_1^*(M(u(s))+\alpha\delta M(y(s)))}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}=$$

$$=\int_{t_0}^{T}\int_{z}^{T}A_1(s)[M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s))+$$

$$+\int_{t_0}^{s}\varphi_\varepsilon(-i\chi(h,s))M(u(h))dh]\varphi_\varepsilon(-i\chi(z,s))\delta M(u(z))dsdz.$$

Вынесем $\delta M(u(z))$

$$\left.\frac{dI_1^*(M(u(s))+\alpha\delta M(u(s)))}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}=$$

$$=\int_{t_0}^{T}\int_{z}^{T}A_1(s)[M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s))+$$

$$+\int_{t_0}^{s}\varphi_\varepsilon(-i\chi(h,s))M(u(h))dh]\varphi_\varepsilon(-i\chi(z,s))ds\delta M(u(z))dz.$$

Таким образом, вариация функционала равна

$$\delta I_1^*=\int_{t_0}^{T}\int_{z}^{T}A_1(s)[M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s))+$$

$$+\int_{t_0}^{s}\varphi_\varepsilon(-i\chi(h,s))M(u(h))dh]\varphi_\varepsilon(-i\chi(z,s))ds\delta M(u(z))dz.$$

По определению вариационной производной [2], имеем

$$\frac{\delta I_1^*}{\delta M(u(t))}=\int_{t}^{T}A_1(s)[M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s))+$$

$$+\int_{t_0}^{s}\varphi_\varepsilon(-i\chi(h,s))M(u(h))dh]\phi_\varepsilon(-i\chi(t,s))ds.$$

Вариационная производная функционала I_1^{**} может быть легко вычислена на основе правил и формул, описанных в [2].

$$\frac{\delta I_1^{**}}{\delta M(u(t))}=B_1(t)M(u(t))+$$

$$+c_1M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,T))\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T))+$$

$$+c_1\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T))\int_{t_0}^{T}\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,T))M(u(s))ds$$

т. к $\dfrac{\delta I_1}{\delta M(u(t))}=\dfrac{\delta I_1^*}{\delta M(u(t))}+\dfrac{\delta I_1^{**}}{\delta M(u(t))}$, то

$$\frac{\delta I_1}{\delta M(u(t))}=\int_{t}^{T}A_1(s)[M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s))+$$

$$+\int_{t_0}^{s}\varphi_\varepsilon(-i\chi(h,s))M(u(h))dh]\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s))ds+$$

$$+B_1(t)M(u(t))+c_1M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,T))\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T))+$$

$$+c_1\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T))\int_{t_0}^{T}\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,T))M(u(s))ds$$

Изменив в последнем интеграле наименование переменной интегрирования, получим искомое выражение (6).

Теорема 1. Математическое ожидание оптимального управления задачи (1), (2), (4) является решением уравнения Фредгольма второго рода

$$B_1(t)^{-1}\int_{t}^{T}A_1(s)M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s))\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s))ds+$$

$$+M(u(t))+c_1B_1(t)^{-1}M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,T))\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T))+$$

$$+\int_{t_0}^{T}B_1(t)^{-1}[\begin{cases}\int_{h}^{T}A_1(s)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s))\varphi_\varepsilon(-i\chi(h,s))ds & ,h\ge t\\ \int_{t}^{T}A_1(s)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s))\varphi_\varepsilon(-i\chi(h,s))ds & ,h<t\end{cases}+$$

$$+c_1\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T))\varphi_\varepsilon(-i\chi(h,T))]M(u(h))dh=0. \tag{7}$$

Доказательство. По условию задачи, $M(u(t))$ следует выбрать так, чтобы оно доставляло минимум функционалу (4). Известно, что в точке минимума вариационная производная функционала обращается в нуль. Используя выражение для вариационной производной (6), запишем необходимое условие минимума

$$\int_{t}^{T}A_1(s)[M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s))+$$

$$+\int_{t_0}^{s}\varphi_\varepsilon(-i\chi(h,s))M(u(h))dh]\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s))ds+$$

$$+B_1(t)M(u(t))+c_1M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,T))\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T))+$$

$$+c_1\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T))\int_{t_0}^{T}\varphi_\varepsilon(-i\chi(z,T))M(u(z))dz=0.$$

Раскроем скобки в первом слагаемом

$$\int_{t}^{T}A_1(s)M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s))\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s))ds+$$

$$+\int_{t}^{T}A_1(s)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s))\int_{t_0}^{s}\varphi_\varepsilon(-i\chi(h,s))M(u(h))dhds+$$

$$+B_1(t)M(u(t))+c_1M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,T))\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T))+$$
$$+c_1\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T))\int_{t_0}^{T}\varphi_\varepsilon(-i\chi(z,T))M(u(z))dz=0.$$

Преобразуем второе слагаемое

$$\int_t^T A_1(s)M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s))\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s))ds+$$
$$+\int_t^T\int_{t_0}^{s} A_1(s)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s))\varphi_\varepsilon(-i\chi(h,s))M(u(h))dhds+$$
$$+B_1(t)M(u(t))+c_1M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,T))\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T))+$$
$$+c_1\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T))\int_{t_0}^{T}\varphi_\varepsilon(-i\chi(z,T))M(u(z))dz=0$$

и поменяем порядок интегрирования

$$\int_t^T A_1(s)M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s))\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s))ds+$$
$$+\int_{t_0}^{T}\begin{cases}\int_h^T A_1(s)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s))\varphi_\varepsilon(-i\chi(h,s))ds & ,h\ge t\\ \int_t^T A_1(s)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s))\varphi_\varepsilon(-i\chi(h,s))ds & ,h<t\end{cases}M(u(h))dh+$$
$$+B_1(t)M(u(t))+c_1M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,T))\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T))+$$
$$+c_1\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T))\int_{t_0}^{T}\varphi_\varepsilon(-i\chi(z,T))M(u(z))dz=0.$$

Это уравнение преобразуется к виду

$$\int_t^T A_1(s)M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s))\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s))ds+$$
$$+B_1(t)M(u(t))+c_1M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,T))\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T))+$$
$$+\int_{t_0}^{T}[\begin{cases}\int_h^T A_1(s)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s))\varphi_\varepsilon(-i\chi(h,s))ds & ,h\ge t\\ \int_t^T A_1(s)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s))\varphi_\varepsilon(-i\chi(h,s))ds & ,h<t\end{cases}+$$
$$+c_1\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T))\varphi_\varepsilon(-i\chi(h,T))]M(u(h))dh=0.$$

Разделив левую и правую часть уравнения на $B_1(t)$, получим (7) интегральное уравнение Фредгольма второго рода [3].

Теорема доказана.

Таким образом, для нахождения $M(u(t))$ нужно решить детерминированное уравнение Фредгольма (7), это можно сделать численно, воспользовавшись, например, квадратурным методом решения [4].

3. НАХОЖДЕНИЕ ВТОРОЙ МОМЕНТНОЙ ФУНКЦИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Предположим теперь, что $A_1=B_1=0$, $c_1=0$. Тогда критерий качества I примет вид

$$I_2=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}[A_2(s_1,s_2)M^2(x(s_1)x(s_2))+$$
$$+B_2(s_1,s_2)M^2(u(s_1)u(s_2))]ds_1ds_2+\frac{c_2}{2}M^2(x^2(T)). \quad (8)$$

Требуется найти $M(u(t)u(\tau))$, которое доставляет минимум функционалу I_2.

Согласно [2, стр. 222] вторая моментная функция решения задачи (1), (2) имеет вид

$$M(x(t)x(s))=M(x_0^2)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s)-i\chi(t_0,t))+$$
$$+M(x_0)[\int_{t_0}^{t}\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,t)-i\chi(t_0,s))M(u(\tau))d\tau+$$
$$+\int_{t_0}^{s}\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,s)-i\chi(t_0,t))M(u(\tau))d\tau]+$$
$$+\int_{t_0}^{t}d\xi\int_{t_0}^{s}\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,s)-i\chi(\xi,t))M(u(\tau)u(\xi))d\tau.$$

Подставив это выражение в функционал I_2, получим

$$I_2=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}[A_2(s_1,s_2)(M(x_0^2)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s_1)-i\chi(t_0,s_2))+$$
$$+M(x_0)[\int_{t_0}^{s_1}\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,s_1)-i\chi(t_0,s_2))M(u(\tau))d\tau+$$
$$+\int_{t_0}^{s_2}\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,s_2)-i\chi(t_0,s_1))M(u(\tau))d\tau]+$$
$$+\int_{t_0}^{s_1}d\xi\int_{t_0}^{s_2}\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,s)-i\chi(\xi,t))M(u(\tau)u(\xi))d\tau)^2+ \quad (9)$$
$$+B_2(s_1,s_2)M^2(u(s_1)u(s_2))]ds_1ds_2+$$
$$+\frac{c_2}{2}[M(x_0^2)\varphi_\varepsilon(-2i\chi(t_0,T))+$$
$$+2M(x_0)\int_{t_0}^{T}\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,T)-i\chi(t_0,T))M(u(\tau))d\tau+$$
$$+\int_{t_0}^{T}d\xi\int_{t_0}^{T}\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,T)-i\chi(\xi,T))M(u(\tau)u(\xi))d\tau]^2.$$

Для удобства перепишем (9) в более компактном виде, введя обозначения. Пусть

$$f(s_1,s_2)=M(x_0^2)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s_1)-i\chi(t_0,s_2))+$$
$$+M(x_0)[\int_{t_0}^{s_1}\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,s_1)-i\chi(t_0,s_2))M(u(\tau))d\tau+$$
$$+\int_{t_0}^{s_2}\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,s_2)-i\chi(t_0,s_1))M(u(\tau))d\tau],$$

$$g(\xi,s_2,\tau,s_1)=\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,s)-i\chi(\xi,t)),$$

$$V = M(x_0^2)\varphi_\varepsilon(-2i\chi(t_0,T)) +$$
$$+2M(x_0)\int_{t_0}^{T}\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,T)-i\chi(t_0,T))M(u(\tau))d\tau,$$
$$p(\xi,\tau)=\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,T)-i\chi(\xi,T)).$$
$$I_2=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}A_2(s_1,s_2)[f(s_1,s_2)+$$
$$+\int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2}g(\xi,s_2,\tau,s_1)M(u(\tau)u(\xi))d\xi d\tau]^2+$$
$$+B_2(s_1,s_2)M^2(u(s_1)u(s_2))ds_1ds_2+$$
$$+\frac{c_2}{2}[V+\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}p(\xi,\tau)M(u(\tau)u(\xi))d\xi d\tau]^2$$

или с заменой выражения $M(u(\tau)u(\xi))$ на $y(\tau,\xi)$

$$I_2=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}A_2(s_1,s_2)[f(s_1,s_2)+$$
$$+\int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2}g(\xi,s_2,\tau,s_1)y(\tau,\xi)d\xi d\tau]^2+ \qquad (10)$$
$$+B_2(s_1,s_2)y^2(\tau,\xi)ds_1ds_2$$
$$+\frac{c_2}{2}[V+\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}p(\xi,\tau)y(\tau,\xi)d\xi d\tau]^2.$$

Лемма 2. Вариационная производная $\dfrac{\delta I_2}{\delta y}$ функционала (10) равна

$$\int_{\xi}^{T}\int_{\tau}^{T}A_2(s_1,s_2)[f(s_1,s_2)+$$
$$+\int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2}g(\mu,s_2,\eta,s_1)y(\eta,\mu)d\mu d\eta]g(\xi,s_2,\tau,s_1)ds_1ds_2+$$
$$+B_2(\xi,\tau)y(\xi,\tau)+c_2[V+\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}p(\mu,\eta)y(\mu,\eta)d\mu d\eta]p(\xi,\tau).$$

Доказательство. Найдем вариацию функционала

$$\delta I_2=\left.\frac{dI_2(y(s_1,s_2)+\alpha\delta y(s_1,s_2))}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}.$$

Рассмотрим сначала первое слагаемое в интеграле и вычислим выражение

$$I_2^*(y(s_1,s_2)+\alpha\delta y(s_1,s_2))=$$
$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}A_2(s_1,s_2)[f(s_1,s_2)+\int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2}g(\xi,s_2,\tau,s_1)(y(\tau,\xi)+$$
$$+\alpha\delta y(\tau,\xi))d\xi d\tau]^2ds_1ds_2,$$

тогда

$$\frac{dI_2^*(y(s_1,s_2)+\alpha\delta y(s_1,s_2))}{d\alpha}=$$
$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}2A_2(s_1,s_2)[f(s_1,s_2)+\int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2}g(\mu,s_2,\eta,s_1)(y(\tau,\xi)+$$
$$+\alpha\delta y(\tau,\xi))d\mu d\eta]\int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2}g(\xi,s_2,\tau,s_1)\delta y(\tau,\xi)d\xi d\tau ds_1ds_2.$$

или

$$\left.\frac{dI_2^*(y(s_1,s_2)+\alpha\delta y(s_1,s_2))}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}=$$
$$=\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}A_2(s_1,s_2)[f(s_1,s_2)+\int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2}g(\mu,s_2,\eta,s_1)y(\eta,\mu)d\mu d\eta]\times$$
$$\times\int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2}g(\xi,s_2,\tau,s_1)\delta y(\tau,\xi)d\xi d\tau ds_1ds_2.$$

Внесем первый и второй множители под интеграл третьего множителя

$$\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2}A_2(s_1,s_2)[f(s_1,s_2)+$$
$$+\int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2}g(\mu,s_2,\eta,s_1)y(\eta,\mu)d\mu d\eta]g(\xi,s_2,\tau,s_1)\delta y(\tau,\xi)d\xi d\tau ds_1ds_2.$$

Поменяв порядок интегрирования, получим

$$\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s_2}\int_{\tau}^{T}A_2(s_1,s_2)[f(s_1,s_2)+$$
$$+\int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2}g(\mu,s_2,\eta,s_1)y(\eta,\mu)d\mu d\eta]g(\xi,s_2,\tau,s_1)\delta y(\tau,\xi)ds_1d\xi d\tau ds_2.$$

Еще раз изменим порядок интегрирования

$$\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}\int_{\xi}^{T}\int_{\tau}^{T}A_2(s_1,s_2)[f(s_1,s_2)+$$
$$+\int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2}g(\mu,s_2,\eta,s_1)y(\eta,\mu)d\mu d\eta]g(\xi,s_2,\tau,s_1)\delta y(\tau,\xi)ds_1ds_2d\xi d\tau.$$

Вынесем $\delta y(\tau,\xi)$

$$\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}\int_{\xi}^{T}\int_{\tau}^{T}A_2(s_1,s_2)[f(s_1,s_2)+$$
$$+\int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2}g(\mu,s_2,\eta,s_1)y(\eta,\mu)d\mu d\eta]g(\xi,s_2,\tau,s_1)ds_1ds_2\delta y(\tau,\xi)d\xi d\tau.$$

Теперь, по определению вариационной производной, имеем

$$\frac{\delta I_2^*}{\delta y(\tau,\xi)}=\int_{\xi}^{T}\int_{\tau}^{T}A_2(s_1,s_2)[f(s_1,s_2)+$$
$$+\int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2}g(\mu,s_2,\eta,s_1)y(\eta,\mu)d\mu d\eta]g(\xi,s_2,\tau,s_1)ds_1ds_2.$$

Найдем вариационные производные других слагаемых функционала

$$I_2^{**} = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} B_2(s_1,s_2)y^2(\tau,\xi)ds_1 ds_2 +$$
$$+\frac{c_2}{2}[V + \int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} p(\xi,\tau)y(\tau,\xi)d\xi d\tau]^2.$$

Найдем вариацию функционала

$$\delta I_2^{**} = \left.\frac{dI_2^{**}(y(s_1,s_2)+\alpha\delta y(s_1,s_2))}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}.$$

Сначала вычислим следующее выражение

$$dI_2^{**}(y(s_1,s_2)+\alpha\delta y(s_1,s_2)) =$$
$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} B_2(s_1,s_2)(y(s_1,s_2)+\alpha\delta y(s_1,s_2))^2 ds_1 ds_2 +$$
$$+\frac{c_2}{2}[V + \int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} p(\xi,\tau)(y(s_1,s_2)+\alpha\delta y(s_1,s_2))d\xi d\tau]^2,$$

$$\frac{dI_2^{**}(y(s_1,s_2)+\alpha\delta y(s_1,s_2))}{d\alpha} =$$
$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} 2B_2(s_1,s_2)(y(s_1,s_2)+\alpha\delta y(s_1,s_2))\delta y(s_1,s_2)ds_1 ds_2 +$$
$$+2\frac{c_2}{2}[V + \int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} p(\xi,\tau)(y(\xi,\tau)+\alpha\delta y(\xi,\tau))d\xi d\tau]\times$$
$$\times\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} p(\xi,\tau)\delta y(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

В точке параметр $\alpha = 0$

$$\left.\frac{dI_2^{**}(y(s_1,s_2)+\alpha\delta y(s_1,s_2))}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} =$$
$$\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} B_2(s_1,s_2)y(s_1,s_2)\delta y(s_1,s_2)ds_1 ds_2 +$$
$$c_2[V + \int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} p(\xi,\tau)y(\xi,\tau)d\xi d\tau]\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} p(\xi,\tau)\delta y(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

или

$$\left.\frac{dI_2^{**}(y(s_1,s_2)+\alpha\delta y(s_1,s_2))}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} =$$
$$\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} B_2(s_1,s_2)y(s_1,s_2)\delta y(s_1,s_2)ds_1 ds_2 +$$
$$+\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} c_2[V + \int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} p(\mu,\eta)y(\mu,\eta)d\mu d\eta]p(\xi,\tau)\delta y(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Внесем все выражения под один интеграл

$$\left.\frac{dI_2^{**}(y(s_1,s_2)+\alpha\delta y(s_1,s_2))}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} =$$
$$\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} (B_2(\xi,\tau)y(\xi,\tau) +$$
$$+c_2[V + \int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} p(\mu,\eta)y(\mu,\eta)d\mu d\eta]p(\xi,\tau))\delta y(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Откуда, согласно определению вариационной производной, имеем

$$\frac{\delta I_2^{**}}{\delta y(\xi,\tau)} = B_2(\xi,\tau)y(\xi,\tau) +$$
$$+c_2[V + \int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} p(\mu,\eta)y(\mu,\eta)d\mu d\eta]p(\xi,\tau).$$

Взяв сумму вариационных производных частей I_2^{*} и I_2^{**}, получим значение вариационной производной исходного функционала I_2-выражение (10).

Лемма доказана.

Теорема 2. Вторая моментная функция оптимального управления задачи (1), (2), (8) является решением уравнения Фредгольма второго рода

$$M(u(\tau)u(\xi)) + B_2^{-1}(\xi,\tau)c_2\int_{\xi}^{T}\int_{\tau}^{T} A_2(s_1,s_2)[M(x_0^{\,2})\varphi_\varepsilon(-i\chi_{t_0,s_1} - i\chi_{t_0,s_2}) +$$
$$+Mx_0\{\int_{t_0}^{s_2}\varphi_\varepsilon(-i\chi_{t_0,s_1} - i\chi_{z,s_2})Mu(z)dz +$$
$$+\int_{t_0}^{s_1}\varphi_\varepsilon(-i\chi_{t_0,s_2} - i\chi_{h,s_1})Mu(h)dh\}]\varphi_\varepsilon(-i\chi_{\xi,s_2} - i\chi_{\tau,s_1})ds_1 ds_2 +$$
$$+B_2^{-1}(\xi,\tau)\varphi_\varepsilon(-i\chi_{\xi,T} - i\chi_{\tau,T})\frac{1}{2}c_2(M(x_0^{\,2})\varphi_\varepsilon(-2i\chi_{t_0,T}) +$$
$$+Mx_0\{2\int_{t_0}^{t_1}\varphi_\varepsilon(-i\chi_{t_0,T} - i\chi_{z,T})Mu(z)dz\}) +$$
$$+\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} B_2^{-1}(\xi,\tau)\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\mu}^{T}\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\eta}^{T}\varphi_\varepsilon(-i\chi_{\mu,s_2} - i\chi_{\eta,s_1})\varphi_\varepsilon\times \\ \times(-i\chi_{\xi,s_2} - i\chi_{\tau,s_1})ds_1, \eta \ge \tau \\ \displaystyle\int_{\tau}^{T}\varphi_\varepsilon(-i\chi_{\mu,s_2} - i\chi_{\eta,s_1})\varphi_\varepsilon\times \\ \times(-i\chi_{\xi,s_2} - i\chi_{\tau,s_1})ds_1, \eta < \tau \end{array}\right. ds_2, \mu \ge \xi \\ \displaystyle\int_{\xi}^{T}\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\eta}^{T}\varphi_\varepsilon(-i\chi_{\mu,s_2} - i\chi_{\eta,s_1})\varphi_\varepsilon\times \\ \times(-i\chi_{\xi,s_2} - i\chi_{\tau,s_1})ds_1, \eta \ge \tau \\ \displaystyle\int_{\tau}^{t_1}\varphi_\varepsilon(-i\chi_{\mu,s_2} - i\chi_{\eta,s_1})\varphi_\varepsilon\times \\ \times(-i\chi_{\xi,s_2} - i\chi_{\tau,s_1})ds_1, \eta < \tau \end{array}\right. ds_2, \mu < \xi \end{array}\right. +$$
$$+c_2\varphi_\varepsilon(-i\chi_{\xi,T} - i\chi_{\tau,T})\varphi_\varepsilon(-i\chi_{\mu,T} - i\chi_{\eta,T})M(u(\mu)u(\eta))d\mu d\eta = 0. \quad (11)$$

Доказательство. Исходя из необходимого условия минимума функционала, вторая моментная функция управления $M(u(t)u(\tau))$ может быть найдена из условия равенства нулю вариационной производной.

Используя *Лемму 2,* запишем это условие.

$$\int_\xi^T\int_\tau^T A_2(s_1,s_2)[f(s_1,s_2)+$$

$$+\int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2} g(\mu,s_2,\eta,s_1)y(\eta,\mu)d\mu d\eta]g(\xi,s_2,\tau,s_1)ds_1ds_2+$$

$$+B_2(\xi,\tau)y(\xi,\tau)+$$

$$+c_2[V+\int_{t_0}^T\int_{t_0}^T p(\mu,\eta)y(\mu,\eta)d\mu d\eta]p(\xi,\tau)=0$$

или

$$\int_\xi^T\int_\tau^T A_2(s_1,s_2)f(s_1,s_2)g(\xi,s_2,\tau,s_1)ds_1ds_2+$$

$$+\int_\xi^T\int_\tau^T\int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2} g(\mu,s_2,\eta,s_1)y(\eta,\mu)d\mu d\eta]g(\xi,s_2,\tau,s_1)ds_1ds_2+$$

$$+B_2(\xi,\tau)y(\xi,\tau)+p(\xi,\tau)c_2V+$$

$$+p(\xi,\tau)c_2\int_{t_0}^T\int_{t_0}^T p(\mu,\eta)y(\mu,\eta)d\mu d\eta=0.$$

Поменяем местами слагаемые

$$\int_\xi^T\int_\tau^T\int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2} g(\mu,s_2,\eta,s_1)y(\eta,\mu)d\mu d\eta g(\xi,s_2,\tau,s_1)ds_1ds_2+$$

$$+\int_\xi^T\int_\tau^T A_2(s_1,s_2)f(s_1,s_2)g(\xi,s_2,\tau,s_1)ds_1ds_2+$$

$$+B_2(\xi,\tau)y(\xi,\tau)+p(\xi,\tau)c_2V+$$

$$+p(\xi,\tau)c_2\int_{t_0}^T\int_{t_0}^T p(\mu,\eta)y(\mu,\eta)d\mu d\eta=0.$$

Рассмотрим первое слагаемое

$$\int_\xi^T\int_\tau^T\int_{t_0}^{s_1}\int_{t_0}^{s_2} g(\mu,s_2,\eta,s_1)g(\xi,s_2,\tau,s_1)y(\eta,\mu)d\mu d\eta ds_1ds_2,$$

поменяем порядок интегрирования

$$\int_\xi^T\int_{t_0}^T\int_{t_0}^{s_2}\begin{cases}\int_\eta^T g(\mu,s_2,\eta,s_1)g(\xi,s_2,\tau,s_1)y(\eta,\mu)ds_1, \eta\ge\tau\\ \int_\tau^T g(\mu,s_2,\eta,s_1)g(\xi,s_2,\tau,s_1)y(\eta,\mu)ds_1, \eta<\tau\end{cases} d\mu d\eta ds_2,$$

снова поменяем порядок интегрирования

$$\int_{t_0}^T\int_{t_0}^T\begin{cases}\int_\mu^T\begin{cases}\int_\eta^T g(\mu,s_2,\eta,s_1)g(\xi,s_2,\tau,s_1)y(\eta,\mu)ds_1, \eta\ge\tau\\ \int_\tau^T g(\mu,s_2,\eta,s_1)g(\xi,s_2,\tau,s_1)y(\eta,\mu)ds_1, \eta<\tau\end{cases} ds_2, \mu\ge\xi\\ \int_\xi^T\begin{cases}\int_\eta^T g(\mu,s_2,\eta,s_1)g(\xi,s_2,\tau,s_1)y(\eta,\mu)ds_1, \eta\ge\tau\\ \int_\tau^T g(\mu,s_2,\eta,s_1)g(\xi,s_2,\tau,s_1)y(\eta,\mu)ds_1, \eta<\tau\end{cases} ds_2, \mu<\xi\end{cases} d\mu d\eta,$$

вернемся к исходному уравнению

$$\int_{t_0}^T\int_{t_0}^T\begin{cases}\int_\mu^T\begin{cases}\int_\eta^T g(\mu,s_2,\eta,s_1)g(\xi,s_2,\tau,s_1)y(\eta,\mu)ds_1, \eta\ge\tau\\ \int_\tau^T g(\mu,s_2,\eta,s_1)g(\xi,s_2,\tau,s_1)y(\eta,\mu)ds_1, \eta<\tau\end{cases} ds_2, \mu\ge\xi\\ \int_\xi^T\begin{cases}\int_\eta^T g(\mu,s_2,\eta,s_1)g(\xi,s_2,\tau,s_1)y(\eta,\mu)ds_1, \eta\ge\tau\\ \int_\tau^T g(\mu,s_2,\eta,s_1)g(\xi,s_2,\tau,s_1)y(\eta,\mu)ds_1, \eta<\tau\end{cases} ds_2, \mu<\xi\end{cases} d\mu d\eta+$$

$$\int_\xi^T\int_\tau^T A_2(s_1,s_2)f(s_1,s_2)g(\xi,s_2,\tau,s_1)ds_1ds_2+B_2(\xi,\tau)y(\xi,\tau)+$$

$$+p(\xi,\tau)c_2V+p(\xi,\tau)c_2\int_{t_0}^T\int_{t_0}^T p(\mu,\eta)y(\mu,\eta)d\mu d\eta=0,$$

внесем под один интеграл

$$\int_\xi^T\int_\tau^T A_2(s_1,s_2)f(s_1,s_2)g(\xi,s_2,\tau,s_1)ds_1ds_2+$$

$$+B_2(\xi,\tau)y(\xi,\tau)+p(\xi,\tau)c_2V+$$

$$+\int_{t_0}^T\int_{t_0}^T\begin{cases}\int_\mu^T\begin{cases}\int_\eta^T g(\mu,s_2,\eta,s_1)g(\xi,s_2,\tau,s_1)y(\eta,\mu)ds_1, \eta\ge\tau\\ \int_\tau^T g(\mu,s_2,\eta,s_1)g(\xi,s_2,\tau,s_1)y(\eta,\mu)ds_1, \eta<\tau\end{cases} ds_2, \mu\ge\xi\\ \int_\xi^T\begin{cases}\int_\eta^T g(\mu,s_2,\eta,s_1)g(\xi,s_2,\tau,s_1)y(\eta,\mu)ds_1, \eta\ge\tau\\ \int_\tau^T g(\mu,s_2,\eta,s_1)g(\xi,s_2,\tau,s_1)y(\eta,\mu)ds_1, \eta<\tau\end{cases} ds_2, \mu<\xi\end{cases}+$$

$$+c_2p(\xi,\tau)p(\mu,\eta)y(\mu,\eta)d\mu d\eta=0.$$

Разделим и левую, и правую часть уравнения на $B_2(\xi,\tau)$

$$y(\xi,\tau)+B_2^{-1}(\xi,\tau)\int_\xi^T\int_\tau^T A_2(s_1,s_2)f(s_1,s_2)g(\xi,s_2,\tau,s_1)ds_1ds_2+$$

$$+B_2^{-1}(\xi,\tau)p(\xi,\tau)c_2V+$$

$$+\int_{t_0}^T\int_{t_0}^T B_2^{-1}(\xi,\tau)\begin{cases}\int_\mu^T\begin{cases}\int_\eta^T g(\mu,s_2,\eta,s_1)g(\xi,s_2,\tau,s_1)y(\eta,\mu)ds_1, \eta\ge\tau\\ \int_\tau^T g(\mu,s_2,\eta,s_1)g(\xi,s_2,\tau,s_1)y(\eta,\mu)ds_1, \eta<\tau\end{cases} ds_2, \mu\ge\xi\\ \int_\xi^T\begin{cases}\int_\eta^T g(\mu,s_2,\eta,s_1)g(\xi,s_2,\tau,s_1)y(\eta,\mu)ds_1, \eta\ge\tau\\ \int_\tau^T g(\mu,s_2,\eta,s_1)g(\xi,s_2,\tau,s_1)y(\eta,\mu)ds_1, \eta<\tau\end{cases} ds_2, \mu<\xi\end{cases}+$$

$$+c_2p(\xi,\tau)p(\mu,\eta)y(\mu,\eta)d\mu d\eta=0.$$

Возвратившись к исходным функциям, получим искомое интегральное уравнение Фредгольма второго рода (11) для нахождения второй моментной функции управления. Теорема доказана.

4. ПРИМЕР РАСЧЕТОВ ПЕРВЫХ МОМЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим линейную управляемую систему, описываемую уравнением (1), где $\varepsilon(t)$ — нормальный случайный процесс, заданный характеристическим функционалом

$$\varphi_\varepsilon(v) = \exp(-0.2i\int_0^1 v(s)ds - 0.5\int_0^1\int_0^1 0.3v(s_1)v(s_2)ds_1ds_2$$

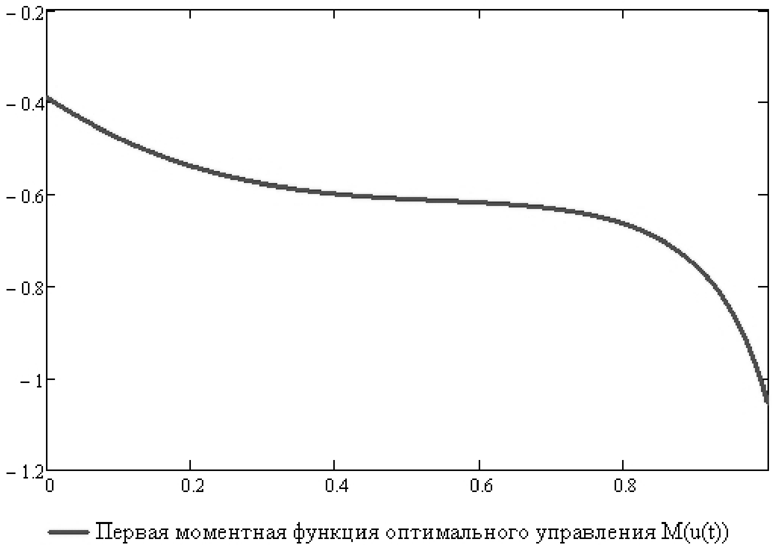
с математическим ожиданием $\mu = -0.2$, дисперсией $\delta = 0.3$, начальным условием $x(0) = 1$ и критерием качества

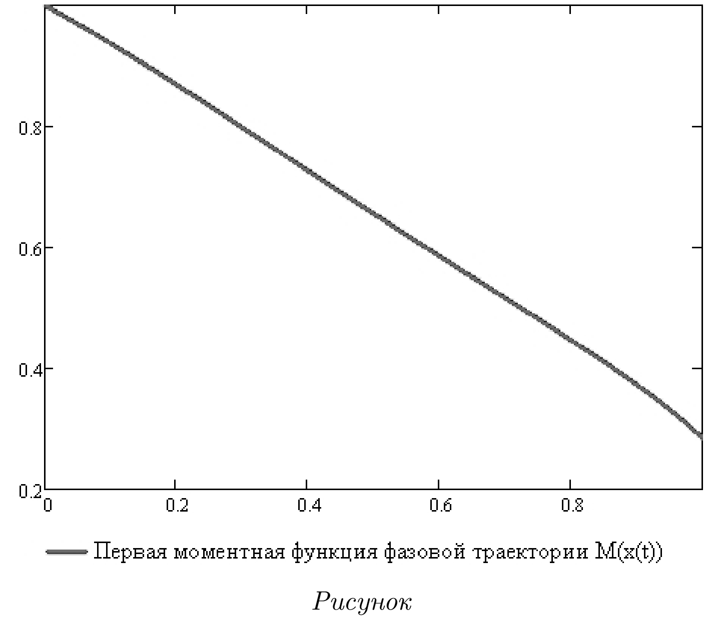
$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 [(5\sin s - \frac{2-s}{1+s^2})M^2(x(s)) +$$
$$+(1+\cos s - s^3)M^2(u(s))]ds + M^2(x(T)).$$

Расчёты проведены в математическом пакете Mathcad. Проверка результатов произведена средствами платформы Java. Для решения, получившихся в ходе аналитических выкладок интегральных уравнений Фредгольма, использован квадратурный метод поиска решения, описанный в [4].

Ниже на рисунке, соответственно, первая моментная функция управления и фазовой траектории.

Значение целевого функционала равно 0.39.





Рисунок

ЛИТЕРАТУРА

1. *Афанасьев В. Н.* Математическая теория конструирования систем управления/ В. Н. Афанасьев, В. Б. Колмановский, В. Р. Носов. – М.: Высшая школа, 1998. — 574 с.

2. *Задорожний В. Г.* Методы вариационного анализа / В. Г. Задорожний. — М. — Ижевск: РХД, 2006. — 316 с.

3. *Колмогоров А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа/ А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М.: Наука, 1968. — 496 с.

4. *Поршнев С. В.* Численные методы на базе Mathcad / С. В. Поршнев, И. В Беленкова. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005. — 464 с.

Задорожний В. Г. — доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой нелинейных колебаний, Воронежский государственный университет
Тел. (473) 2208-649
E-mail: zador@amm.vsu.ru

Якубенко И. П. — аспирант кафедры нелинейных колебаний, Воронежский государственный университет
Тел.+7 (904) 2123722
E-mail: ilya.yakubenko@mail.ru

Zadorozhniy V. G. — professor, chair of nonlinear oscillations of Voronezh State University
Tel. (473) 2208-649
E-mail: zador@amm.vsu.ru

Yakubenko I. P. — post-graduate student of chair nonlinear oscillations Voronezh State University
Tel.+7 (904) 2123722
E-mail: ilya.yakubenko@mail.ru