УДК 514.83+514.74

ФАКТОРЫ БЕССЕЛЬ-ХАГЕНА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ПОДГРУПП ГРУППЫ ПУАНКАРЕ

Е. С. Ерина, М. А. Паринов

Ивановская государственная текстильная академия

Поступила в редакцию 30.11.2011 г.

Аннотация: Пусть (M, g) — риманово многообразие любой размерности и сигнатуры, G — его группа движений, G' — подгруппа G, $\tilde{C}$ и $\tilde{P}$ — соответственно пространства замкнутых внешних дифференциальных 2-форм и 1-форм на M, инвариантных относительно G'. Фактор Бессель-Хагена подгруппы G' есть фактор-пространство пространства $\tilde{C}$ по подпространству $d(\tilde{P})$ — образу $\tilde{P}$ при отображении, задаваемом внешним дифференциалом d. Найдены факторы Бессель-Хагена для некоторых 4-мерных подгрупп группы Пуанкаре.

Ключевые слова: группа Пуанкаре, нётерово пространство Максвелла, фактор Бессель-Хагена.

Abstract: Let (M, g) is a Rimanian manifold of arbitrary dimension and signature, G is the motion group, G' is a subgroup of G. Denote by $\tilde{C}$ the space of closed, external differential 2-forms on M that admit subgroup G'; by $\tilde{P}$ we denote the space of differential 1-forms on M that admit G'. Bessel—Hagen's factor of G' is a factor-space of $\tilde{C}$ over subspace $d(\tilde{P})$, where $d : \tilde{P} \mapsto \tilde{C}$ is a function, defined by external differential d. We find Bessel-Hagen's factors for some 4-dimensional subgroups.

Key words: Poincaré group, Noether's Maxwell space, Bessel-Hagen's factor.

ВВЕДЕНИЕ

Нахождение первых интегралов дифференциальных уравнений и их систем — одна из важнейших задач теории и практики дифференциальных уравнений. Большую роль здесь играет связь между симметриями систем и существованием интегралов. Конструктивные методы разработаны, например, в групповом анализе дифференциальных уравнений (см., напр., [1, 2, 3]).

Для уравнений, получаемых из вариационного принципа, первые интегралы выписываются с использованием теоремы Нётер [4]; их называют нётеровыми интегралами. Теорема Бессель-Хагена [5] является обобщением теоремы Нётер. Она создает предпосылки для нахождения новых интегралов в сравнении с теми, что дает теорема Нётер; их называют интегралами Нётер—Бессель-Хагена [6].

Для обобщенных уравнений Лоренца одним из авторов предложен алгоритм поиска интегралов Нётер — Бессель-Хагена (см., напр., [7, 8]). Применение этого алгоритма для классов пространств Максвелла [7, 9, 10] естественно привело к выделению нётеровых пространств Максвелла [11]; для последних интегралы уравнений Лоренца получаются непосредственным применением теоремы Нётер. Если в классе пространств Максвелла $C_{k,l}$, допускающих подгруппу $G_{k,l}$ группы Пуанкаре не все пространства являются нётеровыми, то содержательным становится понятие *фактора Бессель-Хагена* [12]. Он определяется как фактор-пространство $B_{k,l} = \tilde{C}_{k,l} \,/\, d(\tilde{P}_{k,l})$, где $\tilde{C}_{k,l}$ — пространство внешних дифференциальных 2-форм на многообразии M, задающих класс $C_{k,l}$, а $\tilde{P}_{k,l}$ — пространство дифференциальных 1-форм на M, задающих класс $P_{k,l}$ потенциалов, инвариантных относительно $G_{k,l}$ [13]; $d(\tilde{P}_{k,l})$ означает образ $\tilde{P}_{k,l}$ при отображении внешнего дифференцирования $d : \tilde{P}_{k,l} \to \tilde{C}_{k,l}$.

Равенство нулю фактора Бессель-Хагена для данной подгруппы $G_{k,l}$ означает, что для каждого пространства Максвелла класса $C_{k,l}$ интегралы уравнений Лоренца получаются непосредственным применением теоремы Нётер. Отличие от нуля фактора $B_{k,l}$ означает наличие в классе $C_{k,l}$ пространств Максвелла, не являющихся нётеровыми, и чем выше размерность фактора, тем таких пространств больше.

В настоящей работе найдены новые, в сравнении с [12], факторы Бессель-Хагена для некоторых подгрупп группы Пуанкаре.

ТЕОРЕМЫ НЁТЕР И БЕССЕЛЬ-ХАГЕНА

Одним из конструктивных методов получения первых интегралов систем дифференциальных уравнений являются теоремы Э. Нётер о связи симметрий функционалов и сохраняющихся величин соответствующих уравнений Эйлера—Лагранжа. Приведем одну из таких теорем, следуя изложению Н. Х. Ибрагимова [2].

Говорят, что система дифференциальных уравнений

$$\Phi_k\left(s, x^1,\ldots,x^n, \dot{x}^1,\ldots,\dot{x}^n\right) = 0 \quad \left(k = 1,\ldots,N\right)$$

допускает *первый интеграл* (закон сохранения), если существует функция $H\left(s, x^1,\ldots,x^n, \dot{x}^1,\ldots,\dot{x}^n\right)$, постоянная на решениях $x^i = x^i(s): \quad dH / ds = 0$.

Обозначим $x = \left(x^1,\ldots,x^n\right)$ и $\dot{x} = \left(\dot{x}^1,\ldots,\dot{x}^n\right)$. Пусть задан функционал

$$F[x] = \int\limits_l L\left(s, x, \dot{x}\right) ds \qquad (1)$$

на множестве кривых $l : x = x(s)$. И пусть на $M \times \mathbb{R}$ действует r-мерная группа диффеоморфизмов G_r :

$$\begin{gathered}\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x, s; a), \\ \tilde{s} = \tilde{s}\left(x, s; a\right)\left(a = \left(a^1, \ldots, a^r\right), i = 1, \ldots, n\right).\end{gathered} \qquad (2)$$

Функционал (1) называется *инвариантным относительно группы* G_r, если для всех функций $x = x(s)$ выполняется равенство

$$\int\limits_l L\left(s, x, \dot{x}\right) ds = \int\limits_{\tilde{l}} L\left(\tilde{s}, \tilde{x}, \dot{\tilde{x}}\right) ds \qquad (3)$$

независимо от выбора линии интегрирования ($\tilde{l}$ — образ кривой l при отображении (2)).

Теорема Э. Нётер. *Пусть функционал (1) инвариантен относительно группы* G_r *(2) с базисными инфинитезимальными операторами 1-мерных подгрупп*

$$X_\mu = \xi_\mu(s, x)\frac{\partial}{\partial s} + \eta^i_\mu(s, x)\frac{\partial}{\partial x^i} \quad (\mu = 1,\ldots,r). \quad (4)$$

Тогда уравнения Эйлера—Лагранжа этого функционала

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \qquad (5)$$

имеют r *независимых законов сохранения, причем сохраняющиеся величины имеют вид*

$$H_\mu = \left(\eta^i_\mu - \dot{x}^i \xi_\mu\right)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} + L\xi_\mu \quad (\mu = 1,\ldots,r). \quad (6)$$

Интегралы вида (6) называют нётеровыми интегралами.

Замечание 1. Если G_r — группа точечных преобразований (диффеоморфизмов многообразия M) $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x; a)$, то $\xi_\mu = 0$ и $\eta^i_\mu = \eta^i_\mu(x)$, а формула (6) приобретает вид

$$H_\mu = \eta^i_\mu \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \; (\mu = 1,\ldots,r). \qquad (7)$$

Теорема Бессель-Хагена является обобщением теоремы Э. Нётер в следующем направлении. Уравнения Эйлера — Лагранжа инвариантны относительно калибровочных преобразований в функционале (1); это означает, что вариационная задача для функционала

$$F[x] = \int\limits_l \left[L(s, x, \dot{x}) + \frac{d}{ds} f(s, x)\right] ds \qquad (8)$$

приводит к уравнениям (5) независимо от калибровочной функции $f(s, x)$*. Инвариантность функционала (8) относительно групп диффеоморфизмов многообразия $M \times \mathbb{R}$, согласно теореме Нётер, может приводить к другим интегралам уравнений Эйлера—Лагранжа (отличным от (6)), которые называют интегралами Нётер — Бессель-Хагена.

3. ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛОРЕНЦА

Пусть M — гладкое n-мерное многообразие, $\{x^i\}$ — локальные координаты в M, $g = ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ — (псевдо)риманова метрика на M. Пусть далее $A = A_i dx^i$ — дифференциальная 1-форма на M (потенциальная структура), где $A_i = A_i(x)$ — ковекторное поле. Рассмотрим вариационную задачу для функционала

$$J[x] = \int\limits_l (\alpha ds + \beta A) \; (\alpha, \beta = \text{const} \in R), \quad (9)$$

где интегрирование происходит по кривым $l : x^i = x^i(s)$ с фиксированнными концами, а s — натуральный параметр. Уравнения Эйлера — Лагранжа для функционала (9) имеют следующий вид

$$\alpha\left(\ddot{x}^m + \Gamma^m_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j\right) = \beta g^{km} F_{kj}\dot{x}^j, \qquad (10)$$

где $F_{kj} = \partial_k A_j - \partial_j A_k$, $\Gamma^m_{ij} = \frac{1}{2} g^{km}\left(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}\right)$, а точкой обозначено дифференцирование по s. Их естественно назвать *обобщенными уравнениями Лоренца***.

* В функционале (8) к лагранжиану добавляется *полная* производная по s.

** Отметим, что действие для заряженной час-

Опишем *алгоритм получения первых интегралов* для обобщенных уравнений Лоренца [7].

Лагранжиан, соответствующий функционалу (9), имеет вид

$$L=\alpha\sqrt{g_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j}+\beta A_i(x)\dot{x}^i. \qquad (11)$$

Если этот функционал инвариантен относительно группы диффеоморфизмов G_1: $\tilde{x}^i=\tilde{x}^i(x;a)$ $(a\in\mathbb{R})$, соответствующей инфинитезимальному оператору $X=\xi^i(x)\partial_i$, то уравнения (10) допускают согласно (7) сохраняющуюся величину

$$H=\xi^i(x)\left[\alpha g_{ij}(x)\dot{x}^j+\beta A_i(x)\right]. \qquad (12)$$

Пусть G_g — группа движений (множество диффеоморфизмов многообразия M, сохраняющих риманову метрику g), а G_A — потенциальная группа (множество диффеоморфизмов, сохраняющих потенциальную структуру A). Соответствующие алгебры Ли векторных полей на M обозначим через $\mathcal{L}_g$ и $\mathcal{L}_A$. Введем в рассмотрение обобщенную симплектическую структуру

$$F=dA=\sum_{i<j}F_{ij}dx^i\wedge dx^j=\frac{1}{2}F_{ij}dx^i\wedge dx^j, \qquad (13)$$

где

$$F_{ij}=\partial_iA_j-\partial_jA_i. \qquad (14)$$

Группу симплектических диффеоморфизмов обозначим через G_F, а соответствующую алгебру Ли векторных полей — через $\mathcal{L}_F$. При условии (14) $G_A\subset G_F$ и $\mathcal{L}_A\subset\mathcal{L}_F$ (см., напр., [14]).

Если пересечение групп G_g и G_A нетривиально, то функционал (9) инвариантен относительно $G_g\cap G_A$ и, согласно теореме Э. Нётер, система обобщенных уравнений Лоренца (10) допускает сохраняющиеся величины вида (12). Отметим, что группа $G_g\cap G_A$ вместе с G_g конечномерна.

При калибровочном преобразовании

$$A\mapsto A'=A+df\quad\left(A'_i=A_i+\partial_if\right) \qquad (15)$$

(f — скалярная функция на M) система уравнений (10) не меняется, но измененный функционал (9)

$$J'[x]=\int_l\left(\alpha ds+\beta A'\right)$$

будет инвариантен относительно группы $G_g\cap G_{A'}$, что может привести к появлению новых сохраняющихся величин (тех, существование которых следует из теоремы Бессель-Хагена).

Определим для функционала (9) группу $G_J=G_g\cap G_F$. Все первые интегралы уравнения (10), получаемые с помощью теоремы Бессель-Хагена, связаны с этой группой. Обозначим $\mathcal{L}_J=\mathcal{L}_g\cap\mathcal{L}_F$. Алгоритм получения первых интегралов обобщенных уравнений Лоренца состоит в выполнении следующих шагов.

1) Нахождение базиса алгебры $\mathcal{L}_J$. Для этого достаточно решить систему уравнений

$$L_\xi g_{ij}\equiv\xi^k\partial_kg_{ij}+g_{kj}\partial_i\xi^k+g_{ik}\partial_j\xi^k=0 \qquad (16)$$

и

$$L_\xi F_{ij}\equiv\xi^k\partial_kF_{ij}+F_{kj}\partial_i\xi^k+F_{ik}\partial_j\xi^k=0. \qquad (17)$$

2) Нахождение для каждого базисного вектора $\xi_\mu\in\mathcal{L}_J$ симметричного ковекторного поля $A_i^{(\mu)}$, т. е. такого, что

$$L_{\xi_\mu}A_i^{(\mu)}\equiv\xi_\mu^k\partial_kA_i^{(\mu)}+A_k^{(\mu)}\partial_i\xi_\mu^k=0. \qquad (18)$$

Для этого достаточно найти функцию $f^{(\mu)}$, задающую калибровочное преобразование

$$A_i^{(\mu)}=A_i+\partial_if^{(\mu)} \qquad (19)$$

от фиксированного ковекторного поля A_i.

3) Выписывание первых интегралов по формуле (12):

$$H_\mu=\xi_\mu^i\left(\alpha g_{ij}\dot{x}^j+\beta A_i^{(\mu)}\right). \qquad (20)$$

4. КЛАССЫ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ МАКСВЕЛЛА И ПОТЕНЦИАЛОВ

Напомним некоторые понятия и обозначения.

Пространство Максвелла есть тройка (M,g,F), где M — гладкое 4-мерное многообразие, $g=g_{ij}dx^idx^j$ — псевдоевклидова метрика лоренцевой сигнатуры $(---+)$, $F=\frac{1}{2}F_{ij}dx^i\wedge dx^j$ — обобщенная симплектическая структура (замкнутая дифференциальная 2-форма) на M.

тицы в электромагнитном поле при наличии тяготения (или в отсутствие последнего)

$$S[x]=\int\left(-mcds-\frac{e}{c}A_idx^i\right)$$

есть частный случай функционала (9), вариационная задача для которого приводит к системе уравнений Лоренца

$$mc\left(\ddot{x}^i+\Gamma^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k\right)=\frac{e}{c}g^{ik}F_{kj}\dot{x}^j,$$

описывающей движение пробной заряженной частицы в электромагнитном поле F_{ij} и гравитационном поле g_{ij}.

4-потенциал электромагнитного поля — тройка (M,g,A), где $A = A_i dx^i$ — дифференциальная 1-форма на M $\big(A_i = A_i(x)\big)$. Пара (M,A) есть *потенциальная структура* на M.

Группа Пуанкаре G_g — группа симметрий псевдоевклидовой структуры (M,g), т. е. множество диффеоморфизмов многообразия M, сохраняющих метрический тензор g_{ij}; $\mathcal{L}_g$ — соответствующая алгебра Ли векторных полей на M: $\xi \in \mathcal{L}_g \Leftrightarrow L_\xi g_{ij} = 0$ (L_ξ — производная Ли). Стандартный базис в $\mathcal{L}_g$:

$$e_1 = (1,0,0,0),\, e_2 = (0,1,0,0),$$
$$e_3 = (0,0,1,0),\, e_4 = (0,0,0,1),$$
$$e_{12} = \left(-x^2, x^1, 0, 0\right),\;\; e_{13} = \left(x^3, 0, -x^1, 0\right),$$
$$e_{23} = \left(0, -x^3, x^2, 0\right),$$
$$e_{14} = \left(x^4, 0, 0, x^1\right),\quad e_{24} = \left(0, x^4, 0, x^2\right),$$
$$e_{34} = \left(0, 0, x^4, x^3\right).$$

Группа симплектических диффеоморфизмов G_F — группа симметрий структуры (M,F); $\mathcal{L}_F$ — соответствующая алгебра Ли векторных полей на M: $\xi \in \mathcal{L}_F \Leftrightarrow L_\xi F_{ij} = 0$.

Потенциальная группа G_A — группа симметрий потенциальной структуры (M,A); $\mathcal{L}_A$ — соответствующая алгебра Ли векторных полей на M: $\xi \in \mathcal{L}_A \Leftrightarrow L_\xi A_i = 0$.

$G_S = G_g \cap G_F$ — *группа симметрий пространства Максвелла* (M,g,F); $\mathcal{L}_S = \mathcal{L}_g \cap \mathcal{L}_F$ — соответствующая алгебра Ли.

$G_P = G_g \cap G_A$ — *группа симметрий потенциала* (M,g,A); $\mathcal{L}_P = \mathcal{L}_g \cap \mathcal{L}_A$ — соответствующая алгебра Ли.

G_S и G_P — подгруппы группы Пуанкаре.

В соответствии с классификацией подгрупп группы Пуанкаре с точностью до сопряженности (см. [15]) получены *классы пространств Максвелла* $C_{k,l}$, допускающих подгруппы $G_{k,l}$ [7, 9, 10], а также *классы потенциалов* $P_{k,l}$, допускающих те же подгруппы $G_{k,l}$ [7, 9, 10]. Каждой группе $G_{k,l}$ — подгруппе группы Пуанкаре из списка И. В. Белько (алгебре $\mathcal{L}_{k,l} = L\{\xi_1,\ldots,\xi_k\}$), соответствует *класс* $C_{k,l}$ *пространств Максвелла*, допускающих эту группу:

$$C_{k,l} = \left\{(M,g,F) : L_{\xi_\alpha} F_{ij} = 0, \alpha = 1,\ldots,k\right\}. \quad (21)$$

Каждой группе $G_{k,l}$ соответствует *класс потенциалов* $P_{k,l}$, допускающих эту группу:

$$P_{k,l} = \left\{(M,g,A) : L_{\xi_\alpha} A_i = 0, \alpha = 1,\ldots,k\right\}. \quad (22)$$

Остальные классы симметричных пространств Максвелла и симметричных потенциалов на пространстве Минковского получаются из (21) и (22) с помощью перехода к сопряженным подгруппам; при этом тензоры F_{ij} и A_i заменяются на следующие

$$F_{i'j'} = F_{ij} A^i_{i'} A^j_{j'},\; {}_{i'} = A_i A^i_{i'}, \quad (23)$$

где матрица $A^i_{i'}$ задает преобразование Лоренца (элемент группы G_g).

Замечание 2. Если группа G_P симметрий потенциала (M,g,A) совпадает с группой симметрий G_S пространства Максвелла (M,g,F), такого, что $F = dA$, то первые интегралы соответствующих обобщенных уравнений Лоренца получаются непосредственно по теореме Нётер. В противном случае для получения полного набора нётеровых интегралов приходится пользоваться приведенным выше алгоритмом.

5. НЁТЕРОВЫ ПРОСТРАНСТВА МАКСВЕЛЛА И ФАКТОРЫ БЕССЕЛЬ-ХАГЕНА

Определение 1. ([11]). *Назовем пространство Максвелла* (M,g,F) *нётеровым, если оно допускает нетривиальную группу* G_S *и существует такой потенциал* (M,g,A), *что* $F = dA$ *и группа* G_P *совпадает с* G_S.

Замечание 3. Смысл введенного понятия состоит в следующем. Для нётеровых пространств Максвелла все первые интегралы уравнений Лоренца, получаемые с использованием группы G_S, могут быть получены непосредственно из теоремы Нётер.

Каждой потенциальной структуре $A = A_i dx^i$ $\big(A_i = A_i(x)\big)$ на пространстве Минковского (M,g) (потенциалу (M,g,A)) можно сопоставить пространство Максвелла (M,g,F), положив

$$F = dA \quad \left(F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i\right). \quad (24)$$

Обратно, каждому пространству Максвелла соответствует потенциал (M,g,A), для которого справедливо (24); он определен с точностью до дифференциала от скалярной функции. Говорят, что потенциальная структура A *подчинена* симплектической структуре F, если выполнено условие (24) [14]. Если для (M,g,F) и (M,g,A) выполнено (24), то $G_A \subset G_F$ и, следовательно, $G_P \subset G_S$. Каждой группе $G_{k,l}$ соответствует класс $C_{k,l}$ пространств Максвелла и класс потенциалов $P_{k,l}$, допускающих эту группу. При этом внешний дифференциал действует как линейный оператор из $\tilde{P}_{k,l}$ в $\tilde{C}_{k,l}$ *:

$$d : \tilde{P}_{k,l} \to \tilde{C}_{k,l} \quad (A \mapsto F = dA). \qquad (25)$$

Образ $d(\tilde{P}_{k,l})$ отображения (25) состоит из 2-форм F, задающих пространства Максвелла, допускающие группу $G_{k,l}$. Они будут нётеровыми при условии $G_S = G_{k,l}$. Других нётеровых пространств Максвелла, допускающих группу $G_{k,l}$, не существует, т. к. для потенциальной структуры A, подчиненной симплектической структуре F, всегда выполнено включение $G_A \subset G_F$, а следовательно, и $G_P \subset G_S$.

Определение 2. ([12]). *Фактором Бессель-Хагена, соответствующим группе $G_{k,l}$, назовем фактор-пространство $B_{k,l} = \tilde{C}_{k,l} \,/\, d\left(\tilde{P}_{k,l}\right)$.*

Замечание 4. Если все пространства Максвелла класса $C_{k,l}$ нётеровы, то фактор Бессель-Хагена равен нулю: $B_{k,l} = 0$; а если $d\left(\tilde{P}_{k,l}\right) = 0$, то $B_{k,l} = C_{k,l}$. Если $B_{k,l} \neq C_{k,l}$ и $B_{k,l} \neq 0$, то некоторые из интегралов уравнений Лоренца можно найти непосредственным применением теоремы Нётер, а для получения других придётся искать калибровочные функции и симметричные потенциалы.

Замечание 5. Определение 2 допускает следующее обобщение. Пусть (M,g) — риманово многообразие любой сигнатуры, G — его группа движений, G' — подгруппа G, $\tilde{C}$ и $\tilde{P}$ — соответственно пространства замкнутых внешних дифференциальных 2-форм и 1-форм на M, инвариантных относительно G'. Фактор Бессель-Хагена подгруппы G' есть фактор-пространство пространства $\tilde{C}$ по подпространству $d(\tilde{P})$ — образу $\tilde{P}$ при отображении, задаваемом внешним дифференциалом d.

Это обобщение имеет тот же смысл для обобщенных уравнений Лоренца, что и определение 2 для уравнений Лоренца.

В работах [11, 12] установлены следующие результаты о нётеровости пространств Максвелла, допускающих подгруппы размерностей 4—6, и о классах Бессель-Хагена этих подгрупп.

1. *Не существует нётеровых пространств Максвелла, допускающих шестимерные подгруппы группы Пуанкаре.*

Факторы Бессель-Хагена для всех 6-мерных групп $G_{6,l}$ совпадают с классами $C_{6,l}$: $B_{6,l} = C_{6,l}$.

* $\tilde{P}_{k,l}$ — пространство ковекторных полей, задающих потенциалы класса $P_{k,l}$; $\tilde{C}_{k,l}$ — пространство 2-форм, задающих пространства Максвелла класса $C_{k,l}$.

2. *Пространства Максвелла класса $C_{5,6}$ $(\lambda \neq 0)$, определяемого тензором*

$$\begin{gathered} F_{12} = F_{13} = F_{14} = F_{24} = 0, \\ F_{23} = -F_{34} = Ke^{-x^3/\lambda} \quad (K = \text{const}), \end{gathered} \qquad (26)$$

и класса $C_{5,9}$, определяемого тензором

$$\begin{gathered} F_{12} = F_{14} = \frac{Kx^1}{x^2 + x^4}, \;\; F_{13} = 0, \;\; F_{24} = K, \\ F_{23} = -F_{34} = -\frac{Kx^3}{x^2 + x^4} \quad (K = \text{const}), \end{gathered} \qquad (27)$$

*являются нётеровыми. Не существует других нётеровых пространств Максвелла, допускающих 5-мерные подгруппы группы Пуанкаре***.*

Факторы Бессель-Хагена для групп $G_{5,6}$ $(\lambda \neq 0)$ и $G_{5,9}$ равны нулю. Для групп $G_{5,l}$ $(l \neq 6{,}9)$ и $G_{5,6}$ $(\lambda = 0)$ факторы Бессель-Хагена совпадают с классами $C_{5,l}$: $B_{5,l} = C_{5,l}$.

3. *Пространства Максвелла следующих классов не являютсяся нётеровыми:*

а) класса $C_{4,1}$, соответствующего группе трансляций $G_{4,1}$ (алгебре $\mathcal{L}_{4,1} = L\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$), и задаваемого в галилеевой системе координат тензором $F_{ij} = \text{const}$;

б) класса $C_{4,4a}$, соответствующего группе $G_{4,4a}$ (алгебре $\mathcal{L}_{4,4a} = L\{e_{13} + \lambda e_2, e_1, e_3, e_2 + e_4\}$), и задаваемого тензором

$$\begin{gathered} F_{12} = -F_{14} = b_1 \cos\frac{x^2 - x^4}{\lambda} - b_2 \sin\frac{x^2 - x^4}{\lambda}, \\ F_{13} = b_3, \\ F_{23} = F_{34} = b_1 \sin\frac{x^2 - x^4}{\lambda} + b_2 \cos\frac{x^2 - x^4}{\lambda}, \\ F_{24} = b_4 \quad (b_i = \text{const}); \end{gathered} \qquad (28)$$

в) класса $C_{4,5}$, соответствующего группе $G_{4,5}$ (алгебре $\mathcal{L}_{4,5} = L\{e_{24}, e_1, e_3, e_2 + e_4\}$), и задаваемого тензором

$$\begin{gathered} F_{12} = -F_{14} = \frac{b_1}{x^2 - x^4}, \;\; F_{13} = b_3, \\ F_{23} = F_{34} = \frac{b_2}{x^2 - x^4}, F_{24} = b_4 \quad (b_k = \text{const}). \end{gathered} \qquad (29)$$

4. *Пространства Максвелла класса $C_{4,4b}$, соответствующего группе $G_{4,4b}$ (алгебре $\mathcal{L}_{4,4b} = L\{e_{13}, e_1, e_3, e_2 + e_4\}$), и задаваемого тензором*

** кроме пространств Максвелла, допускающих группы G_S, сопряженные группам $G_{5,6}$ $(\lambda \neq 0)$ и $G_{5,9}$ ($\mathcal{L}_{5,6} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{24} + \lambda e_3, e_1, e_2, e_4\}$, $\mathcal{L}_{5,9} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_{13}, e_{24}, e_2 - e_4\}$).

$$\begin{gathered} F_{12} = F_{14} = F_{23} = F_{34} = 0, \\ F_{13} = \mathrm{const},_{24} = \Psi(x^2 - x^4), \end{gathered} \tag{30}$$

являются нётеровыми в случае $\Psi \neq const$ *и* $F_{13} = 0$, *и не являются нётеровыми в случае* $F_{13} \neq 0$.

5. *Пространства Максвелла класса* $C_{4,6a}$, *соответствующего группе* $G_{4,6a}$ *(алгебре* $\mathcal{L}_{4,6a} = L\left\{e_{24} + \lambda e_3, e_1, e_2, e_4\right\}$*), и задаваемого тензором*

$$\begin{gathered} F_{23} = a_1 \operatorname{ch}\frac{x^3}{\lambda} + a_2 \operatorname{sh}\frac{x^3}{\lambda}, \\ F_{34} = a_1 \operatorname{sh}\frac{x^3}{\lambda} + a_2 \operatorname{ch}\frac{x^3}{\lambda}, \\ F_{12} = F_{14} = 0, \;\; F_{24} = a_3, \\ F_{13} = a_4 \quad (a_i = \mathrm{const}), \end{gathered} \tag{31}$$

являются нётеровыми, если $a_3 = a_4 = 0$ *и* $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$, *и не являются нётеровыми, если* $a_3 \neq 0$ *или* $a_4 \neq 0$.

6. *Пространства Максвелла класса* $C_{4,6b}$, *соответствующего группе* $G_{4,6b}$ *(алгебре* $\mathcal{L}_{4,6b} = L\left\{e_{24}, e_1, e_2, e_4\right\}$*), и задаваемого тензором*

$$\begin{gathered} F_{12} = F_{14} = F_{23} = F_{34} = 0, \\ F_{13} = F_{13}\left(x^3\right), \, F_{24} = \mathrm{const}, \end{gathered} \tag{32}$$

являются нётеровыми, если $F_{24} = 0$, *и не являются нётеровыми, если* $F_{24} \neq 0$.

7. *Факторы Бессель-Хагена для групп* $G_{4,1}$, $G_{4,4a}$, $G_{4,4b}$, $G_{4,5}$, $G_{4,6a}$ *и* $G_{4,6b}$ *равны соответственно:* $B_{4,1} = C_{4,1} = \mathbb{R}^6$, $B_{4,4a} = \mathbb{R}^2$, $B_{4,4b} = \mathbb{R}^1$, $B_{4,5} = \mathbb{R}^3$, $B_{4,6a} = \mathbb{R}^2$, $B_{4,6b} = \mathbb{R}^1$.

6. НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О ФАКТОРАХ БЕССЕЛЬ-ХАГЕНА ДЛЯ ПОДГРУПП ГРУППЫ ПУАНКАРЕ

Справедливо следующее утверждение для 4-мерных подгрупп группы Пуанкаре.

Предложение. *Факторы Бессель-Хагена для групп** $G_{4,2}$, $G_{4,3a}$, $G_{4,3b}$, $G_{4,8a}$, $G_{4,10}$, $G_{4,11}$, $G_{4,12a}$ *и* $G_{4,14a}$ *равны соответственно:*

$$B_{4,2} = B_{4,3a} = \mathbb{R}^2,$$

$$B_{4,3b} = B_{4,8a} = B_{4,10} = B_{4,11} = B_{4,12a} = \mathbb{R},$$

$$B_{4,14a} = 0.$$

Доказательство. Покажем, что $B_{4,2} = \mathbb{R}^2$. Класс потенциалов $P_{4,2}$, соответствующий группе $G_{4,2}$ $(\mu \neq 0)$, задается ковекторным полем A_i вида (см. [13])

$$\begin{gathered} A_1 = C_1 \sin\frac{x^4}{\mu} + C_2 \cos\frac{x^4}{\mu}, \;\; A_2 = C_3, \\ A_3 = C_1 \cos\frac{x^4}{\mu} - C_2 \sin\frac{x^4}{\mu}, \;\; A_4 = C_4, \end{gathered} \tag{33}$$

где $C_k = const$; класс $C_{4,2}$ пространств Максвелла задается тензором F_{ij} вида (см. [7, 9])

$$\begin{gathered} F_{14} = c_1 \cos\frac{x^4}{\mu} + c_2 \sin\frac{x^4}{\mu}, \\ F_{34} = -c_1 \sin\frac{x^4}{\mu} + c_2 \cos\frac{x^4}{\mu}, \\ F_{12} = F_{23} = 0, \quad F_{13} = c_3, \\ F_{24} = c_4 \quad (c_k = \mathrm{const}). \end{gathered} \tag{34}$$

Для нахождения образа $d(\tilde{P}_{4,2})$ применим формулу (24) и соответствующий тензор F_{ij} пометим тильдой:

$$\begin{gathered} \tilde{F}_{12} = \tilde{F}_{13} = 0, \, \tilde{F}_{14} = -\frac{C_1}{\mu}\cos\frac{x^4}{\mu} + \frac{C_2}{\mu}\sin\frac{x^4}{\mu}, \\ \tilde{F}_{23} = \tilde{F}_{24} = 0, \, \tilde{F}_{34} = \frac{C_1}{\mu}\sin\frac{x^4}{\mu} + \frac{C_2}{\mu}\cos\frac{x^4}{\mu}. \end{gathered} \tag{35}$$

Пространство $\tilde{C}_{4,2}$ тензоров вида (34) 4-мерно, а его подпространство $d(\tilde{P}_{4,2})$ — пространство тензоров вида (35), 2-мерно. Поэтому размерность фактор пространства $\tilde{C}_{4,2} \,/\, d(\tilde{P}_{4,2})$ равна двум, и

$$B_{4,2} = \tilde{C}_{4,2} \,/\, d(\tilde{P}_{4,2}) = \mathbb{R}^2.$$

По той же схеме проводятся доказательства и для остальных групп. Рассмотрим еще характерный пример, когда пространства $\tilde{C}_{k,l}$ и $d(\tilde{P}_{k,l})$ бесконечномерны.

Покажем, что $B_{4,8a} = \mathbb{R}$. Класс потенциалов $P_{4,8a}$, соответствующий группе $G_{4,8a}$, задается ковекторным полем A_i вида

$$A_1 = 0, \;\; A_2 = A_4 = \Phi\left(x^3\right), \;\; A_3 = \Psi\left(x^3\right), \tag{36}$$

где $\Phi\left(x^3\right)$ и $\Psi\left(x^3\right)$ — произвольные функции; класс $C_{4,2}$ пространств Максвелла задается тензором F_{ij} вида

$$\begin{gathered} F_{12} = F_{14} = \mathrm{const}, \;\; F_{13} = F_{24} = 0, \\ F_{23} = -F_{34}\left(x^3\right). \end{gathered} \tag{37}$$

Образ $d\left(\tilde{P}_{4,8a}\right)$ состоит из тензоров

* Соответствующие алгебры Ли векторных полей: $\mathcal{L}_{4,2} = L\left\{e_{13} + \mu e_4, e_1, e_2, e_3\right\}$, $\mathcal{L}_{4,3a} = L\left\{e_{13} + \lambda e_2, e_1, e_3, e_4\right\}$ $(\lambda \neq 0)$, $\mathcal{L}_{4,3b} = L\left\{e_{13}, e_1, e_3, e_4\right\}$, $\mathcal{L}_{4,8a} = L\left\{e_{12} - e_{14}, e_1, e_2, e_4\right\}$, $\mathcal{L}_{4,10} = L\left\{e_{13}, e_{24}, e_1, e_3\right\}$, $\mathcal{L}_{4,11} = L\left\{e_{13}, e_{24}, e_2, e_4\right\}$, $\mathcal{L}_{4,12a} = L\left\{e_{12} - e_{14}, e_{23} +\right.$ $\mathcal{L}_{4,12a} = L\left\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_1, e_2 - e_4\right\}$, $\mathcal{L}_{4,14a} = L\left\{e_{12} - e_{14}, e_{24} + \lambda e_3, e_1 + \nu e_3, e_2 - e_4\right\}$ $(\nu \neq 0)$.

$$\begin{gathered}\tilde{F}_{12} = \tilde{F}_{14} = \tilde{F}_{13} = \tilde{F}_{24} = 0,\\ F_{23} = -F_{34} = -\Phi'\left(x^3\right).\end{gathered} \tag{38}$$

Так как для каждой функции $F_{34}\left(x^3\right)$ существует функция $\Phi\left(x^3\right)$, удовлетворяющая условию $\Phi'\left(x^3\right) = F_{34}\left(x^3\right)$, то справедливо равенство $F_{ij} = \tilde{F}_{ij} + F_{ij}^0$, где

$$F_{ij}^0 = \begin{pmatrix} 0 & C & 0 & C \\ -C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \mathrm{const}. \tag{39}$$

Пространство тензоров вида (39) одномерно, откуда и следует утверждение.

В случае группы $G_{4,14a}$ надо показать, что $d\left(\tilde{P}_{4,14a}\right) = \tilde{C}_{4,14a}$. Пространство $\tilde{P}_{4,14a}$ состоит из ковекторных полей вида

$$A_1 = \frac{\left(x^3 - \nu x^1\right)C_1}{\nu\left(x^2 + x^4\right)} + C_2,$$

$$A_2 = \frac{\left(x^3 - \nu x^1\right)^2 C_1}{2\nu^2\left(x^2 + x^4\right)^2} + \frac{\left(x^3 - \nu x^1\right)C_2}{\nu\left(x^2 + x^4\right)} + C_3, \tag{40}$$

$$A_3 = C_4, \ A_4 = A_2 + C_1,$$

где

$$C_1 = K_1\left(x^2 + x^4\right),$$

$$C_2 = -\frac{K_1\lambda}{\nu}\ln\left(x^2 + x^4\right) + K_2,$$

$$C_3 = \frac{K_1\lambda^2\ln^2\left(x^2 + x^4\right) - 2K_2\lambda\nu\ln\left(x^2 + x^4\right)}{2\nu^2\left(x^2 + x^4\right)} - \tag{41}$$

$$-\frac{K_1}{2}\left(x^2 + x^4\right) + \frac{K_3}{x^2 + x^4},$$

$$C_4 = K_4 \quad \left(K_i = \mathrm{const}\right).$$

Пространство $\tilde{C}_{4,14a}$ 3-мерно и состоит из тензоров вида

$$F_{12} = F_{14} = \frac{1}{r}\left(a_1\tilde{x}^1 - \frac{a_1}{\nu}\left(\tilde{x}^3 - \lambda\ln r\right) + a_2\right)e^{-\varphi},$$

$$F_{23} = -F_{34} = \frac{1}{r}\left(\frac{a_1}{\nu}\tilde{x}^1 - \frac{a_1}{\nu^2}\left(\tilde{x}^3 - \lambda\ln r\right) + a_3\right)e^{-\varphi}, \tag{42}$$

$$F_{13} = -\frac{a_1}{\nu}, \ F_{24} = a_1 \quad \left(a_i = \mathrm{const}\right),$$

где замена координат задается формулами

$$\begin{gathered} x^1 = \tilde{x}^1, \ x^2 = r\,\mathrm{ch}\,\varphi,\\ x^3 = \lambda\varphi + \tilde{x}^3, \ ^4 = r\,\mathrm{sh}\,\varphi. \end{gathered} \tag{43}$$

Вычисляя тензор $\tilde{F}_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$ *, задающий пространство $d\left(\tilde{P}_{4,14a}\right)$, и сравнивая $\tilde{F}_{ij}$ с (42), получим совпадение этих выражений при

$$a_1 = K_1, \ a_2 = -K_2 + \frac{\lambda K_1}{\nu}, \ a_3 = -\frac{K_2}{\nu}. \tag{44}$$

Таким образом, пространство $d\left(\tilde{P}_{4,14a}\right)$ также 3-мерно и $d\left(\tilde{P}_{4,14a}\right) = \tilde{C}_{4,14a}$, т. е. $B_{4,14a} = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 399 с.

2. *Ибрагимов Н. Х.* Группы Ли в некоторых вопросах математической физики. — Новосибирск: НГУ, 1972. — 128 с.

3. *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике. — М.: Наука, 1983. — 280 с.

4. *Noether E.* Invariante Variationsprobleme // Nachr. König. Gesell. Wissen. Göttingen, Math.-Phys. Kl. — 1918. — S. 235—257.

5. *Bessel-Hagen E.* Uber die Erhaltungssätze der Electrodynamic // Math. Ann. — 1921. — Bd. 84. — S. 258—276.

6. *Емельянова И. С.* Проблема «симметрия — интегралы движения» в аналитической динамике. — Нижний Новгород: ННГУ, 1992. — 171 с.

7. *Паринов М. А.* Пространства Эйнштейна — Максвелла и уравнения Лоренца. — Иваново: Изд-во ИвГУ, 2003. — 180 с.

8. *Иванова А. С., Паринов М. А.* Первые интегралы уравнений Лоренца для некоторых классов электромагнитных полей // Тр. МИРАН им. В. А. Стеклова. — 2002. — Т. 236. — С. 197—203.

9. *Паринов М. А.* Классы пространств Максвелла, допускающих подгруппы группы Пуанкаре // Фундаментальная и прикладная математика. — 2004. — Т. 10. — 1. — С. 183—237.

10. *Паринов М. А.* Шесть классов пространств Максвелла, допускающих нетривиальные группы симметрий // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2006. — 1. — С. 170—171.

11. *Колесова В. А., Паринов М. А.* О нётеровых пространствах Максвелла // Математика и ее приложения: Журн. Иванов. матем. об-ва. — 2007. — Вып. 1 (4). — С. 7—12.

12. *Кочева Н. А., Паринов М. А.* Факторы Бессель-Хагена для некоторых подгрупп группы Пуанкаре // Математика и ее приложения: Журн. Иванов. матем. об-ва. — 2010. — Вып. 1 (7). — С. 41—48.

13. *Паринов М. А.* Классификация потенциальных структур на пространстве Минковского по подгруппам группы Пуанкаре // Фундаментальная

* Мы не приводим его выражение ввиду громоздкости.

и прикладная математика. — 2006. — Т. 12. — 7. — С. 177—225.

14. *Паринов М. А.* Введение в симплектическую геометрию: Учеб. пособие. — Иваново: ИвГУ, 1994. — 60 с.

15. *Белько И. В.* Подгруппы группы Лоренца — Пуанкаре // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1971. — 1. — С. 5—13.

Ерина Е. С. — старший преподаватель кафедры высшей математики и статистики, Ивановская государственная текстильная академия

E-mail: erinaes@mail.ru

Паринов М. А. — доцент кафедры высшей математики и статистики, кандидат физико-математических наук, Ивановская государственная текстильная академия

E-mail: mihailparinov@mail.ru

Erina E. S. — Senior teacher of the cheir of high mathematics and statistics, Ivanovo state textile academy

E-mail: erinaes@mail.ru

Parinov M. A. — Reader of the chair of high mathematics and statistics. Candidate of physical and mathematical sciences, Ivanovo state textile academy

E-mail: mihailparinov@mail.ru