УДК 517.9

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЯХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ*

А. Ю. Дуплищева

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 6.12.2010 г.

Аннотация: В статье получен ряд свойств функций периодических на бесконечности и достаточные условия периодичности на бесконечности ограниченных решений разностных уравнений.
Ключевые слова: функции периодические на бесконечности, спектр Берлинга, разностные уравнения.

Abstract: Properties of periodic on infinity functions are obtained. Also sufficient conditions of periodicity on infinity are obtained for bounded solutions of difference equations.
Key words: periodic on infinity functions, Berling spectrum, difference equations.

1. Введение. Пусть X — конечномерное линейное нормированное пространство, $EndX$ — банахова алгебра линейных операторов, действующих в X. Через $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ обозначим банахово пространство равномерно непрерывных и ограниченных функций, определенных на $\mathbb{R}$ со значениями в X, $C_0 = C_0(\mathbb{R}, X)$ — замкнутое подпространство функций $x \in C_{b,u}$ со свойством $\lim\limits_{|t|\to\infty}\|x(t)\| = 0$ (исчезающих на бесконечности). Через $L^1 = L^1(\mathbb{R})$ обозначается банахова алгебра суммируемых на $\mathbb{R}$ комплексных функций со сверткой функций в качестве умножения

$$(f * g)(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)ds, \quad f, g \in L^1. \qquad (1)$$

В банаховом пространстве $C_{b,u}$ рассмотрим сильно непрерывную группу изометрических операторов:

$$S : \mathbb{R} \to End\, C_{b,u}, \big(S(t)x\big)(s) = x(s+t),$$
$$s, t \in \mathbb{R}, x \in C_{b,u}.$$

Определение 1. Функцию $x \in C_{b,u}$ назовем *периодической на бесконечности функцией периода* $\omega > 0$ (относительно подпространства C_0), если $S(\omega)x - x \in C_0$.

Множество таких функций будем обозначать через $C_{\omega,\infty} = C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$.

Непосредственно из определения 1 следует

Лемма 1. *Множество периодических на бесконечности функций $C_{\omega,\infty}$ образует банахову алгебру.*

Рассмотрим разностное уравнение вида:

$$x(t+1) = Bx(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \qquad (2)$$

где $B \in EndX$ и $f \in C_0$.

Основным результатом статьи является

Теорема 1. *Если существует равномерно непрерывное ограниченное решение $x : \mathbb{R} \to X$ уравнения (2), то оно представимо в виде*

$$x(t) = \sum_{j=1}^{m} x_j(t) e^{i\varphi_j t}, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad (3)$$

где $x_j \in C_{1,\infty}$, $1 \le j \le m$, а числа φ_j принадлежат промежутку $[0, 2\pi)$, причем

$$\sigma(B) \cap \mathbb{T} = \left\{e^{i\varphi_1}, \dots, e^{i\varphi_m}\right\}, \ \ \mathbb{T} = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\right\}.$$

2. Спектр Берлинга векторов и функций. Нам удобно сформулировать и доказать некоторые используемые далее свойства спектра Берлинга векторов из банаховых L^1 - модулей.

Пусть $\mathfrak{X}$ — комплексное банахово пространство, являющееся пространством изометрического сильно непрерывного представления $T : \mathbb{R} \to End\mathfrak{X}$. Банахово пространство $\mathfrak{X}$ наделяется структурой банахова L^1 - модуля с помощью формулы

$$fx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)T(-\tau)xd\tau, \quad f \in L^1, \quad x \in \mathfrak{X}. \qquad (4)$$

В частности, если $\mathfrak{X} = C_{b,u}(\mathbb{R}, \mathfrak{X})$ и $T = S$, то пространство $C_{b,u}$ наделяется структурой банахова L^1-модуля с помощью свертки (1).

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-01-00276)

Определение 2 [1, с. 57]. *Спектром Берлинга вектора* $x \in \mathfrak{X}$ называется множество $\Lambda(x)$ из $\mathbb{R}$, являющееся дополнением в $\mathbb{R}$ к множеству $\{\lambda_0 \in \mathbb{R}:$ существует функция $f_0 \in L^1$ такая, что $\hat{f}_0(\lambda_0) \neq 0$ и $f_0 x = 0\}$, где $\hat{f}_0$ — преобразование Фурье [1, с.6] функции f_0 в точке $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.

Заметим, что определение спектра Берлинга зависит от представления T.

Определение 3 [1, с.8]. *Ограниченной аппроксимативной единицей (сокращенно, о.а.е.)* будем называть ограниченную последовательность функций (f_n) из алгебры L^1 со свойствами: 1) $\hat{f}_n(0) = 1, n \geq 1$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{|t|\geq\alpha} |f_n(t)| dt = 0$ для любого $\alpha > 0$.

Отметим, что имеет место

Лемма 2. (Лемма Диткина [2, § 27]). *Если* $\hat{f}(\lambda_0) = 0$ *для функции* $f \in L^1$, *то существует последовательность* (f_n) *из* L^1 *такая, что* $\hat{f}_n(\lambda) = 1$ *в окрестности точки* λ_0, $\lim\limits_{n\to\infty} dist\left(\lambda_0, \operatorname{supp} \hat{f}_n\right) = 0$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n * f = 0$.

Приведем ряд утверждений из [1, §11], используемых для доказательства основных результатов.

Лемма 3. *Для любых* $f, g \in L^1$ *и любого вектора* $x \in \mathfrak{X}$ *имеет место равенство*

$$f(gx) = (f * g)x. \tag{5}$$

Лемма 4. *Для любого вектора* $x \in \mathfrak{X}$ *линейное подпространство* $I(x) = \left\{f \in L^1 : fx = 0\right\} \subset L^1$ *является замкнутым двусторонним идеалом алгебры* L^1.

Лемма 5. *Если идеал* $I(x)$ *обладает свойством: для любого* λ_0 *из* $\mathbb{R}$ *существует функция* f *из* $I(x)$ *такая, что* $\hat{f}(\lambda_0) \neq 0$, *то* $I(x) = L^1$.

Лемма 6. *Если множество* $\Lambda(y)$ *представимо в виде* $\Lambda(y) = \sigma_0 \cup \sigma_1$, *где* σ_0, σ_1 *— замкнутые взаимно непересекающиеся множества, то вектор* y *представим в виде* $y = y_0 + y_1$ *с* $\Lambda(y_0) = \sigma_0$ *и* $\Lambda(y_1) = \sigma_1$.

Лемма 7. *Имеют место следующие свойства спектра Берлинга векторов из банахова* L^1*-модуля* $\mathfrak{X}$:

1) $\Lambda(x)$ *— замкнутое подмножество из* $\mathbb{R}$ *и* $\Lambda(x) = \varnothing \Longleftrightarrow x = 0$;

2) $\Lambda(fx) \subset \operatorname{supp} \hat{f} \cap \Lambda(x)$, $f \in L^1$, $x \in \mathfrak{X}$;

3) $fx = 0$, *если* $\operatorname{supp} \hat{f} \cap \Lambda(x) = \varnothing$.

Лемма 8. *Для векторов из банахова* L^1*-модуля справедливо равенство:* $fx = 0$, *если* $\hat{f} = 0$ *на множестве* $\Lambda(x)$ *и множество* $supp\, \hat{f} \cap \Lambda(x)$ *не более чем счетно.*

Доказательство. Пусть $y = fx$, где $\hat{f} = 0$ на $\Lambda(x)$ и множество $supp\, \hat{f} \cap \Lambda(x)$ не более чем счетно. Множество $\Lambda(y)$ замкнуто и, ввиду включения $\Lambda(y) \subset supp\, \hat{f} \cap \Lambda(x)$, не более чем счетно. Если $\Lambda(y) = \emptyset$, то $y = fx = 0$. Допустим, что оно не пусто. Тогда оно содержит некоторую изолированную точку λ_0 и $\Lambda(y) = \sigma_0 \cup \sigma_1$, где $\sigma_0 = \{\lambda_0\}$ и $\lambda_0 \overline{\in} \sigma_1$. В этом случае, согласно леммы 6, вектор y представим в виде $y = y_0 + y_1$, где $\Lambda(y_0) = \{\lambda_0\}, \Lambda(y_1) = \sigma_1$. По лемме Диткина, существует последовательность функций (f_n) из L^1 такая, что $\hat{f}_n = 1$ в окрестности точки λ_0, $supp\, \hat{f}_n \cap \sigma_1 = \varnothing, n \geq 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n * f = 0$. Тогда из свойств 2) и 3) леммы 7 получаем

$$f_n y = f_n y_0 + f_n y_1 = f_n y_0 = y_0, \quad n \geq 1.$$

Поэтому, $y_0 = f_n y_0 = (f_n * f)x \to 0, n \to \infty$, т. е. $y_0 = 0$. Следовательно, $\lambda_0 \overline{\in} \Lambda(y)$. Получаем противоречие в связи с предположением, что $\lambda_0 \in \Lambda(y)$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Идеал из алгебры* L^1 *вида* $I = \left\{f \in L^1 : \hat{f}\left(\frac{2\pi n}{\omega}\right) = 0, n \in \mathbb{Z}, \omega > 0\right\}$ *совпадает с замыканием в* L^1 *идеала* $I_\omega = \{S(\omega)f - f, f \in I, \omega > 0\}$.

Доказательство. Отметим, что идеал I_ω содержится в идеале I, т. е. $I_\omega \subset I \subset L^1$. Действительно, если g — элемент из I_ω, то функция g представима в виде: $g = S(\omega)f - f, f \in I$. Следовательно, ее преобразование Фурье имеет вид:

$$\hat{g}(\lambda) = e^{i\omega\lambda}\hat{f}(\lambda) - \hat{f}(\lambda) = \left(e^{i\omega\lambda} - 1\right)\hat{f}(\lambda).$$

Тогда $\hat{g}\left(\frac{2\pi n}{\omega}\right) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$, т. е. $g \in I$.

Рассмотрим замыкание $\overline{I}_\omega$ идеала I_ω. Поскольку I — замкнутый идеал, то $\overline{I}_\omega \subset I$. Допустим, что $\overline{I}_\omega$ не совпадает с I, т. е. $\overline{I}_\omega \neq I$.

Далее используется изометрический изоморфизм сопряженного к L^1 банахова пространства L^{1*} банахову пространству существенно ограниченных функций $L^\infty = L^\infty(\mathbb{R})$ [3, с. 172]. Согласно изоморфизму каждый функционал $\xi \in L^{1*}$ представим в виде:

$$\xi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} x(\tau)a(\tau)d\tau, \tag{6}$$

где $a \in L^\infty$ и $\|\xi\| = \|a\|$. Поскольку $\overline{I}_\omega \neq I$, то по теореме Хана—Банаха [4, с. 180] существует функционал ξ, представимый в виде (6), который является нулевым на $\overline{I}_\omega$ и ненулевой на I.

Отметим, что идеал $\overline{I}_\omega$ инвариантен относительно всех операторов сдвига $S(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Этот факт следует из равенств

$$S(t)\big(S(\omega)f - f\big) = S(\omega)S(t)f - S(t)f,$$
$$t \in \mathbb{R}, f \in I.$$

Пользуясь равенством (6) и доказанным свойством, получаем следующее равенство, где участвует рассматриваемый функционал ξ :

$$\xi\big(S(t)x\big) = \int\limits_{\mathbb{R}} \big(S(t)x\big)(\tau)a(\tau)d\tau = 0, \quad t \in \mathbb{R}, x \in \overline{I}_\omega. \tag{7}$$

Из равенств (7) следует, что имеет место равенство

$$x * b = 0, \tag{8}$$

для любой функции $x \in \overline{I}_\omega$ и функции $b(\tau) = a(-\tau), \tau \in \mathbb{R}$.

Докажем, что $\Lambda(b) \subset \frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$. Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$. Рассмотрим функцию $f \in L^1$, для которой $\hat{f}(\lambda_0) \neq 0$ и $(\operatorname{supp}\hat{f}) \cap \frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z} = \varnothing$. Тогда функция $g = S(\omega)f - f$ обладает свойствами: $\hat{g}(\lambda_0) = \left(e^{i\lambda_0\omega} - 1\right)\hat{f}(\lambda_0) \neq 0$, $\operatorname{supp}\hat{g} = \operatorname{supp}\hat{f}$. Следовательно, $g \in I_\omega$. Тогда, из равенства (8) следует, что $g * b = 0$. Поэтому из определения спектра Берлинга следует, что $\lambda_0 \overline{\in} \Lambda(b)$. Таким образом, имеет место включение $\Lambda(b) \subset \frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$.

Теперь, пользуясь леммой 8 получаем, что равенство (8) имеет место для любой функции x из идеала I. Следовательно, ξ — нулевой функционал на идеале I. Получено противоречие в связи с предположением, что $I_\omega \neq I$. Поэтому $I_\omega = I$. Лемма доказана.

Определение 4. Вектор x из L^1 — модуля $\mathfrak{X}$ называется *периодическим периода* $\omega > 0$, если $T(\omega)x = x$.

Лемма 10. *Для того, чтобы вектор $x \in \mathfrak{X}$ обладал свойством $T(\omega)x = x, \omega > 0$ (был периодическим) необходимо и достаточно, чтобы спектр $\Lambda(x)$ вектора x содержался в множестве $\frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть вектор $x \in \mathfrak{X}$ обладает свойством $T(\omega)x = x$. Тогда $f\big(T(\omega)x - x\big) = \big(S(\omega)f - f\big)x = 0$ для любой $f \in L^1$, т. е. $gx = 0$, $\forall g \in \overline{I}_\omega$. Теперь из леммы 9 получаем, что $gx = 0$ для любой функции g из идеала I. Если $\lambda_0 \overline{\in} \frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$, то существует $f \in L^1$ такая, что $\hat{f}(\lambda_0) \neq 0$ и $\operatorname{supp}\hat{f} \cap \frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z} = \emptyset$. Следовательно, $f \in I$ и поэтому $fx = 0$. Из определения 2 следует, что $\lambda_0 \overline{\in} \Lambda(x)$, т. е. $\Lambda(x) \subset \frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$.

Достаточность. Пусть спектр вектора $x \in X$ содержится в множестве $\frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$. Докажем, что вектор $y = T(\omega)x - x$ нулевой. Для доказательства (в силу свойства 1) леммы 7 достаточно установить, что $y = f\big(T(\omega)x - x\big) = 0$ для любой функции f из алгебры L^1. Вектор y запишем в виде $y = gx$, где $g = S(\omega)f - f$ принадлежит идеалу I_ω. Поскольку преобразование Фурье $\hat{g}$ обращается в нуль на множестве $\frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$, то из леммы 8 следует, что $y = gx = 0$. Итак, $T(\omega)x = x$. Лемма доказана.

Замечание 1. Рассмотрим факторпространство $C_{b,u} / C_0$. Оно является банаховым L^1 — модулем, структура которого определяется формулой (4) по изометрическому сильно непрерывному представлению $T : \mathbb{R} \to End\mathfrak{X}$, $T(t)\tilde{x} = \widetilde{S(t)x}$, где $\tilde{x} = x + C_0$ — класс эквивалентности из $\mathfrak{X}$, содержащий функцию $x \in C_{b,u}$. Непосредственно из определений 1 и 2 следует, что функция $x \in C_{b,u}$ периодична на бесконечности с периодом $\omega > 0$ тогда и только тогда, когда $\tilde{x}$ — периодический периода ω вектор из L^1 — модуля $\mathfrak{X} = C_{b,u} / C_0$, т. е. $\widetilde{S(\omega)x} = \tilde{x}$.

3. Доказательство теоремы 1. Перейдем теперь к основным результатам работы, связанным со свойствами решений разностных уравнений. Вначале докажем теорему 1 для случая, когда число 1 является единственной точкой спектра оператора B на единичной окружности.

Теорема 2. *Пусть $B \in EndX$ — линейный оператор, спектр которого $\sigma(B)$ обладает свойством: число 1 является единственной точкой спектра оператора B на единичной окружности $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. Если существует ограниченное равномерно непрерывное решение x_0 уравнения (2), то оно является периодической на бесконечности периода 1 функцией, т.е. $x_0 \in C_{1,\infty}$.*

Доказательство теоремы использует две приводимые ниже леммы. В них рассматриваются уравнения специального вида:

$$x(t+1) = Ax(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, f \in C_0, \tag{9}$$

где оператор $A \in EndX$ удовлетворяет одному из условий

$$\begin{aligned} &1). \quad r(A) \quad < 1, \\ &2). \quad r(A^{-1}) \quad < 1, \end{aligned} \tag{10}$$

где во втором условии оператор A обратим и $r(A)$, и $r(A^{-1})$ обозначает спектральный радиус операторов A, A^{-1}.

Лемма 11. *Любое равномерно непрерывное и ограниченное на $\mathbb{R}$ решение x_0 уравнения (9), где A удовлетворяет условию 1) из (10), принадлежит пространству C_0, единственно и представимо в виде:*

$$x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} A^n S(-n-1)f, \quad f \in C_0. \qquad (11)$$

Доказательство. Уравнение (9) перепишем в эквивалентном виде:

$$x = AS(-1)x + S(-1)f. \qquad (12)$$

После чего окончательно соотношение (12) запишем так:

$$(I - \tilde{A})x = S(-1)f, \qquad (13)$$

где $\tilde{A} = AS(-1) \in End\, C_{b,u}$.

Поскольку S(–1) — обратимая изометрия, перестановочная с оператором умножения в $C_{b,u}$ на оператор A, то $r(\tilde{A}) = r(A) < 1$. Поэтому (см.[5, с. 45]), оператор $I - \tilde{A} \in End\, C_{b,u}$ непрерывно обратим и обратный имеет вид

$$(I - \tilde{A})^{-1} y = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{A}^n y = \sum_{n=0}^{\infty} A^n S(-n) y, \quad y \in C_{b,u}.$$

В частности, уравнение (9) имеет единственное решение x_0 из $C_{b,u}$ и представимо в виде (11). Ясно, что $x_0 \in C_0$. Лемма доказана.

Лемма 12. *Равномерно непрерывное ограниченное решение уравнения (9), где A обратим и $r(A^{-1}) < 1$, единственно, принадлежит пространству C_0 и представимо в виде:*

$$x_0 = -\sum_{n=0}^{\infty} A^{-n-1} S(n) f, \quad f \in C_0. \qquad (14)$$

Доказательство. Применяя к обеим частям уравнения (9) оператор A^{-1}, перепишем его в эквивалентном виде:

$$x = A^{-1}S(1)x - A^{-1}f. \qquad (15)$$

После чего, окончательно соотношение (9) запишем так:

$$(I - \tilde{A})x = -A^{-1}f, \qquad (16)$$

где $\tilde{A} = A^{-1}S(1)$.

Проводя аналогичные рассуждения (см. лемму 11), получаем, что оператор $I - \tilde{A}$ — обратим, причем обратный имеет вид: $\left(I - \tilde{A}\right)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} A^{-n-1} S(n)$. Следовательно, ограниченное равномерно непрерывное решение x_0 уравнения (9) единственно и представимо в виде (14). Лемма доказана.

При доказательстве теорем 1 и 2 будут использоваться понятия и результаты, изложенные в [6].

Доказательство теоремы 2. В силу конечномерности пространства X, спектр $\sigma(B)$ оператора B конечен и пусть $\sigma(B) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1,k}$. Представим его в виде: $\sigma(B) = a_0 \cup \tilde{\sigma}_0$, где $\sigma_0 = \{1\}$, $1 \overline{\in}\ \tilde{\sigma}_0$. Тогда пространство X есть прямая сумма $X = X_0 \oplus \tilde{X}_0$ двух инвариантных относительно оператора B подпространств X_0, $\tilde{X}_0$. Рассмотрим проекторы P_0, $\tilde{P}_0$ со свойствами: 1) $Im P_0 = X_0$, $Im\tilde{P}_0 = \tilde{X}_0$; 2) $P_0 + \tilde{P}_0 = I$ — разложение единицы. Отметим, что

$$P_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \left(B - \lambda I\right)^{-1} d\lambda,$$

где γ — жорданова замкнутая кривая [7, с. 246], во внутренней части которой содержится σ_0, а во внешней — $\tilde{\sigma}_0$ [1, с. 76]. Другой способ построения проектора P_0 имеется в [6, § 27]. Следовательно, оператор B разлагается в прямую сумму операторов $B = B_0 \oplus \tilde{B}_0$, где $B_0 = B \mid X_0$, $\tilde{B}_0 = B \mid \tilde{X}_0$, $\sigma(B_0) = \sigma_0$, $\sigma\left(\tilde{B}_0\right) = \tilde{\sigma}_0$.

Пусть $x \in C_{b,u}$ — решение уравнения (2). Представим его в виде: $x = x_0 + \tilde{x}_0$, где $x_0(t) = P_0 x(t)$, $\tilde{x}_0(t) = \tilde{P}_0 x(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Применяя проекторы P_0 и $\tilde{P}_0$ к обеим частям уравнения (2) получим:

$$x_0(t+1) = B_0 x_0(t) + f_0(t),$$

$$\tilde{x}_0(t+1) = \tilde{B}_0 \tilde{x}_0(t) + \tilde{f}_0(t), \qquad (17)$$

где $f_0(t) = P_0 f(t)$, $\tilde{f}_0(t) = \tilde{P}_0 f(t)$, $f_0, \tilde{f}_0 \in C_0$.

В силу того, что $\sigma\left(B_0\right) = \sigma_0 = \{1\}$, оператор B_0 имеет вид: $B_0 = I + Q_0$, где Q_0 — нильпотентный оператор [5, с.58]. Спектр оператора $\tilde{B}_0$ представим следующим образом: $\sigma\left(\tilde{B}_0\right) = \sigma_{int} \cup \sigma_{out}$, где $\sigma_{int} = \{\lambda \in \sigma(B) : |\lambda| < 1\}$, $\sigma_{out} = \{\lambda \in \sigma(B) : |\lambda| > 1\}$. Пусть $P_{int}, P_{out} \in End X_0$ — проекторы Рисса, построенные по оператору $\tilde{B}_0$ и по спектральным множествам σ_{int} и σ_{out} соответственно. Пусть $X_{int} = Im P_{int}$ и $X_{out} = Im P_{out}$ — образы проекторов P_{int} и P_{out} соответственно. Согласно [1], оператор $\tilde{B}_0$ есть прямая сумма операторов $\tilde{B}_0 = B_1 \oplus B_2$ относительно прямой суммы подпространств $\tilde{X}_0 = X_{int} \oplus X_{out}$, где $B_1 = \tilde{B}_0 \mid X_{int}$, $B_2 = \tilde{B}_0 \mid X_{out}$. Пусть $P_{int} + P_{out} = I$ — соответствующее разложение единицы. Применяя проекторы P_{int}, P_{out} ко второму равенству из (17), получаем:

$$x_1(t+1) = B_1 x_1(t) + f_1(t),$$

$$x_2(t+1) = B_2 x_1(t) + f_2(t), \qquad (18)$$

причем $x_1(t) = P_{int}\tilde{x}_0(t)$, $x_2(t) = P_{out}\tilde{x}_0(t)$, $f_1(t) = P_{int}\tilde{f}_0(t)$, $f_2(t) = P_{out}\tilde{f}_0(t)$.

Соотношение (17), учитывая (18), перепишем в виде:

$$x_0(t+1) = B_0 x_0(t) + f_0(t),$$
$$x_1(t+1) = B_1 x_1(t) + f_1(t), \qquad (19)$$
$$x_2(t+1) = B_2 x_1(t) + f_2(t).$$

Пользуясь определением, из первого равенства соотношения (19) делаем вывод, что x_0 — периодическая на бесконечности периода 1 функция. По результатам выше доказанных лемм 11 и 12 имеем, что $x_1, x_2 \in C_0$, т. е. являются убывающими на бесконечности функциями. Окончательно получаем, что равномерно непрерывное ограниченное решение уравнения (2) является периодической на бесконечности периода 1 функцией. Из всего сказанного следует, что: $x(t) = P_0 x(t) + P_{int} x(t) + P_{out} x(t) = x_0(t) + x_1(t) + x_2(t)$, где

$$x_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_1^n f_1(t-n-1), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$x_2(t) = -\sum_{n=0}^{\infty} B_2^{-n-1} f_2(t+n), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Теорема доказана.

Используя доказанные выше утверждения о спектре Берлинга периодических на бесконечности функций, будет доказано следующее утверждение:

Лемма 13. *Пусть* $A \in EndX$ *— линейный оператор, спектр которого* $\sigma(A)$ *содержится в единичной окружности* $\mathbb{T}$, *причем*

$$\sigma(A) = \left\{ e^{i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_k} \right\},$$

где $\varphi_j \in [0, 2\pi), 1 \le j \le k$. *Тогда каждое решение* $x \in C_{b,u}$ *уравнения*

$$x(t+1) = Ax(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, f \in C_0, \quad (20)$$

представимо в виде

$$x(t) = \sum_{j=1}^{k} e^{i\varphi_j t} x_{0,j}(t), \qquad (21)$$

где $x_{0,j} \in C_{1,\infty}, j = \overline{1,k}$ (т. е. являются периодическими на бесконечности функциями периода 1).

Доказательство. В силу конечномерности пространства X, спектр $\sigma(A)$ оператора A конечен. Тогда $X = X_1 \oplus \ldots \oplus X_k$ — разложение пространства X в прямую сумму, причем $X_j, j = \overline{1,k}$ — инвариантные подпространства относительно оператора A, $\sigma\left(A_j\right) = \lambda_j, 1 \le j \le k$, где $A_j = A \mid X_j$ — сужение оператора A на X_j. Через P_j, $1 \le j \le k$ обозначим проекторы со свойством: $ImP_j = X_j$, $1 \le j \le k$. Тогда $I = P_1 + \ldots + P_k$ — разложение единицы. В данном случае, каждый из операторов A_j, $1 \le j \le k$ представим в виде: $A_j = \lambda_j I_j + Q_j$, где I_j — тождественный оператор в X_j и Q_j — нильпотентный оператор.

Допустим, что уравнение (20) имеет непрерывное решение $x : \mathbb{R} \to X$, принадлежащее пространству $C_{b,u}$. Положим $x_j(t) = P_j x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $1 \le j \le k$. Тогда оно представимо в виде $x = \sum_{j=1}^{k} x_j$. Применяя проекторы P_j, $1 \le j \le k$, к обеим частям уравнения (20), получим:

$$P_1 x(t+1) = P_1\left(Ax(t) + f(t)\right),$$
$$\ldots \qquad (22)$$
$$P_k x(t+1) = P_k\left(Ax(t) + f(t)\right).$$

Поскольку $P_j A = AP_j = \lambda_j I + Q_j$, $1 \le j \le k$, то соотношения (22) перепишутся в виде:

$$x_1(t+1) = \lambda_1 x_1(t) + Q_1 x_1(t) + f_1(t),$$
$$\ldots \qquad (23)$$
$$x_k(t+1) = \lambda_k x_k(t) + Q_k x_k(t) + f_k(t).$$

Рассмотрим функции $x_{0,j}(t) = x_j(t) e^{-i\varphi_j t}$, $1 \le j \le n$. Ясно, что $x_j(t) = x_{0,j}(t) e^{i\varphi_j t}$, $j = \overline{1,k}$. Подставляя полученные соотношения в (23), получим:

$$x_{0,1}(t+1) e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_1 t} - e^{i\varphi_1} x_{0,1}(t) e^{i\varphi_1 t} = Q_1 x_{0,1}(t) e^{i\varphi_1 t} + f_1(t),$$
$$\ldots \qquad (24)$$
$$x_{0,k}(t+1) e^{i\varphi_k} e^{i\varphi_k t} - e^{i\varphi_k} x_{0,1}(t) e^{i\varphi_k t} = Q_k x_{0,k}(t) e^{i\varphi_k t} + f_k(t).$$

Домножив обе части равенств соотношения (24) на $e^{-i\varphi_j(t+1)}$, $j = \overline{1,k}$, получим:

$$x_{0,1}(t+1) - x_{0,1}(t) = Q_1 x_{0,1}(t) e^{-i\varphi_1} + f_1(t) e^{-i\varphi_1(t+1)},$$
$$\ldots \qquad (25)$$
$$x_{0,k}(t+1) - x_{0,k}(t) = Q_k x_{0,k}(t) e^{-i\varphi_k} + f_k(t) e^{-i\varphi_k(t+1)}.$$

Рассмотрим первое равенство из (25) и применим к обеим его частям оператор Q_1^{m-1}, где m — индекс нильпотентности оператора Q:

$$Q_1^{m-1} x_{0,1}(t+1) = Q_1^{m-1} x_{0,1}(t) + Q_1^{m-1} f_0^1(t), \quad (26)$$

где $f_{0,1}(t) = f_1(t) e^{-i\varphi_1(t+1)}$. Пусть $y_m(t) = Q_1^{m-1} x_{0,1}(t)$. Тогда равенство (26) примет вид:

$$y_m(t+1) = y_m(t) + g_m(t), \qquad (27)$$

где $g_m(t) = Q_1^{m-1} f_{0,1}(t)$, причем $g_m \in C_0$. Пользуясь определением периодической на бесконечности функции периода 1 получаем, что $y_m \in C_{1,\infty}$.

Теперь, применив к первому равенству системы (25) оператор Q_1^{m-2}, приходим к равенству:

$$\begin{aligned} Q_1^{m-2}x_{0,1}(t+1) = Q_1^{m-2}x_{0,1}(t) + \\ +Q_1^{m-1}x_{0,1}(t)e^{-i\varphi_1} + Q_1^{m-2}f_1(t). \end{aligned} \tag{28}$$

Рассмотрим функции: $y_{m-1}(t) = Q_1^{m-2}x_{0,1}(t)$, $g_{m-1}(t) = Q_1^{m-1}x_{0,1}(t)e^{-i\varphi_1} + Q_1^{m-2}f_1(t)$. Ясно, что $g_{m-1} \in C_{1,\infty}$. Уравнение (28) перепишется в виде:

$$y_{m-1}(t+1) - y_{m-1}(t) = g_{m-1}(t). \tag{29}$$

Возьмем произвольную функцию $f \in L^1$ такую, что $\hat{f}(2\pi n) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$, т. е. f принадлежит идеалу I, введенному в рассмотрение в лемме 9 (где $\omega = 1$). Из замечания 1 следует, что $\tilde{g}_{m-1} = f * g_{m-1} \in C_0$. Рассматривая свертку функции f с обеими частями равенства (29), получим, что

$$\big(S(1)f - f\big) * y_{m-1} = \tilde{g}_{m-1} \in C_0. \tag{30}$$

Функция $S(1)f - f$ принадлежит идеалу $I_1 = I_\omega$ (здесь $\omega = 1$), рассмотренному в лемме 9 и поэтому из (30) следует, что $g * y_{m-1} \in C_0$, для любой функции $g \in \overline{I}_1$. Поскольку $I_1 = I$ (см. лемму 9), то из замечания 1 следует, что $y_{m-1} \in C_{1,\infty}$. Далее рассматривая последовательно функции $y_{m-2} = Q_1 y_{m-1}, \dots, y_0 = Q_1 y_1$, где $y_k(t) = Q_1^{k+1}x_{0,1}(t)$, $k = \overline{0,m}$, и, проводя аналогичные рассуждения, получим, что все эти функции принадлежат пространству $C_{1,\infty}$. В частности, ему принадлежит функция $y_0(t) = Q_1 x_{0,1}(t), t \in \mathbb{R}$.

Итак, первое уравнение из системы уравнений (25) запишется в виде:

$$y_0(t+1) - y_0(t) = g_0(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{31}$$

где $g_0 \in C_{1,\infty}$. Оно относится к уравнениям вида (29), и поэтому, проводя те же рассуждения, что были проведены при доказательстве принадлежности функции y_{m-1} пространству $C_{1,\infty}$, получим, что $y_0 \in C_{1,\infty}$. Теперь из первого равенства в соотношениях (25) видно, что функция $x_{0,1} \in C_{1,\infty}$, т. к. оно относится к уравнениям вида (29).

Аналогичным образом устанавливается, что решения $x_{0,j}, 2 \le j \le m$, последующих уравнений являются периодическими на бесконечности функциями периода 1. Поскольку решение x представимо в виде $x = \sum_{j=1}^{k} x_j$, то $x \in C_{1,\infty}$. Лемма доказана.

Пользуясь результатами леммы 13, докажем теперь теорему 1.

Доказательство теоремы 1. Спектр $\sigma(B) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}, \lambda_j \in \mathbb{C}, j = \overline{1,n}$, оператора B конечен. Представим его в виде: $\sigma(B) = \sigma_0 \cup \sigma_{int} \cup \sigma_{out}$, где $\sigma_0 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$, $\sigma_{int} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}, \sigma_{out} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > 1\}$. Тогда $X = X_0 \oplus X_{int} \oplus X_{out}$ — разложение пространства X в прямую сумму, $I = P_0 + P_{int} + P_{out}$ — соответствующее разложение единицы. Следовательно, оператор B разлагается в прямую сумму операторов: $B = B_0 \oplus B_{int} \oplus B_{out}$, $B_0 = B \mid X_0$, $B_{int} = B \mid X_{int}$, $B_{out} = B \mid X_{out}$, $\sigma(B_0) = \sigma_0$, $\sigma(B_{int}) = \sigma_{int}$, $\sigma(B_{out}) = \sigma_{out}$.

Пусть x — непрерывное решение уравнения (2), принадлежащее пространству $C_{b,u}$. Тогда оно представимо в виде: $x = x_0 + x_{int} + x_{out}$, где $x_0(t) = P_0 x(t)$, $x_{int}(t) = P_{int}x(t)$, $x_{out}(t) = P_{out}x(t), t \in \mathbb{R}$. Применяя проекторы P_0, P_{int}, P_{out} к обеим частям уравнения (2) получим:

$$\begin{aligned} x_0(t+1) &= B_0 x_0(t) + f_0(t), \\ x_{int}(t+1) &= B_{int}x_{int}(t) + f_{int}(t), \\ x_{out}(t+1) &= B_{out}x_{out}(t) + f_{out}(t). \end{aligned}$$

Пользуясь ранее доказанными леммами 11, 12, 13 получаем:

$$x_0(t) = \sum_{j=1}^{k} e^{i\varphi_j t} x_{0,j}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $x_{0,j} \in C_{1,\infty}(\mathbb{R}, X), 1 \le j \le k, x_{int}, x_{out} \in C_0$.

Тогда решение представимо в виде: $x = x_0 + x_1$, где $x_1 = x_{int} + x_{out}$. Так как $x_1 \in C_0$, то решение уравнения (2) можно представить в виде:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{m} x_j(t) e^{i\varphi_j t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $x_j \in C_{1,\infty}, 1 \le j \le m, \varphi_j \in [0; 2\pi)$. Теорема доказана.

Замечание 2. Отметим, что из доказательства теоремы 1 следует, что представление (3) не является единственным. Однако, если

$$x(t) = \sum_{j=1}^{m} \tilde{x}_j(t) e^{i\varphi_j t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

то $x_j - \tilde{x}_j \in C_0$.

4. Достаточное условие существования ограниченных решений. Символом $W_1 = W_1(\mathbb{R}, X)$ обозначим подпространство функций из C_0, для которых конечна величина

$$\|y\|_* = \sup_{t\in\mathbb{R}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|y(t-k)\| = \sup_{t\in[0,1]} \sum_{k\in Z} \|y(t-k)\|.$$

Этот класс функций близок к классу функций, определенных в [8, с. 98], и его содержит.

Например, скалярная функция $x(t) = \frac{\sin 2\pi t}{t}$ не принадлежит введенному классу $W_1 = W_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, а функция вида $\tilde{x}(t) = \left(\frac{\sin 2\pi t}{t}\right)^2$ принадлежит.

Эти функции образуют банахово пространство и незамкнутое подпространство, плотное в C_0.

Определение 5. [5, с. 59]. Собственное значение $\lambda \in \mathbb{C}$ оператора $B \in EndX$ назовем *полупростым*, если собственные векторы не имеют присоединенных.

Теорема 3. Достаточное условие существования ограниченных решений. *Пусть спектр оператора B обладает свойством: $\sigma(B) = \{\lambda_1,\dots,\lambda_m\} \subset \mathbb{T}$, где $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ — полупростые собственные значения, функция f принадлежит классу W_1. Тогда уравнение (2) имеет ограниченное непрерывное решение.*

Доказательство. Пусть P_j, $j = \overline{1,m}$ — проекторы Рисса, для которых $BP_j = \lambda_j P_j$, $j = \overline{1,m}$.

Так как $B = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j P_j$, то $B^k = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k P_j$ и поэтому

$$\|B^k\| = \left\|\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k P_j\right\| \le \sum_{j=1}^{m} \|P_j\|, \quad k \in \mathbb{Z}. \qquad (32)$$

Докажем, что функция вида:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B^k f(t-k-1), \quad t \in \mathbb{R}, f \in W_1, \qquad (33)$$

есть ограниченное решение уравнения (2). Действительно,

$$\|x\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left\|\sum_{k=0}^{\infty} B^k f(t-k)\right\| \le$$

$$\le \sup_{t\in\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{\infty} \|B^k\| \|f(t-k)\| < \infty.$$

Покажем теперь, что функция x является решением уравнения (2). Из принадлежности функции f классу W_1 и оценок (32) следует абсолютная сходимость рядов в следующих равенствах:

$$x(t+1) - Bx(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B^k f(t+1-k-1) -$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty} B^{k+1} f(t-k-1) = f(t),$$

где $f \in W_1, x \in C_{b,u}$. Теорема доказана.

Замечание 3. Находясь в условиях теоремы 3 и, пользуясь ее обозначениями, покажем, что решение (33) представимо в виде (21). Для этого рассмотрим цепочку равенств:

$$x(t) = \left(P_1 + \ldots + P_m\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} B^k f(t-k-1)\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} e^{i\varphi_j k} f_j(t-k-1) = \sum_{j=1}^{m} x_j(t),$$

где

$$f_j(t-k-1) = P_j f(t-k-1), x_j(t) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{i\varphi_j k} f_j(t-k-1), 1 \le j \le m.$$

Представим теперь каждую функцию $x_j, 1 \le j \le m$ в виде:

$$x_j(t) = x_j^0(t) e^{i\varphi_j t},$$

где $x_j^0(t) = e^{-i\varphi_j t} \sum_{k=0}^{\infty} e^{i\varphi_j k} f_j(t-k-1)$ и покажем, что $x_j^0 \in C_{1,\infty}$.

Для этого воспользуемся определением 1. Действительно,

$$S(1)x_j^0(t) - x_j^0(t) = e^{-i\varphi_j(t+1)} \sum_{k=0}^{\infty} e^{i\varphi_j k} f_j(t-k-1+1) -$$

$$-e^{-i\varphi_j t} \sum_{k=0}^{\infty} e^{i\varphi_j k} f_j(t-k-1) =$$

$$= e^{-i\varphi_j t}\left(e^{-i\varphi_j} \sum_{k=0}^{\infty} e^{i\varphi_j k} f_j(t-k) - \sum_{k=0}^{\infty} e^{i\varphi_j k} f_j(t-k-1)\right) =$$

$$= e^{-i\varphi_j t}\left(e^{-i\varphi_j} f_j(t) + f_j(t-1) + e^{i\varphi_j} f_j(t-2) +\right.$$

$$+ e^{2i\varphi_j} f_j(t-3) + \ldots - f_j(t-1) - e^{i\varphi_j} f_j(t-2) -$$

$$\left. - e^{2i\varphi_j} f_j(t-3) - \ldots\right) = e^{-i\varphi_j(t+1)} f_j(t) \in C_0.$$

Таким образом, делаем вывод, что решение (33) представимо в виде (21), а именно:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{m} x_j(t) = \sum_{j=1}^{m} x_j^0(t) e^{i\varphi_j t}, \text{ где } x_j^0 \in C_{1,\infty}.$$

Замечание 4. Обратимся к более общему случаю, рассматривая уравнение (2) с $f \in W_1$. Пусть $\sigma(B) = \{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}, \lambda_j \in \mathbb{C}, j = \overline{1,n}$ — спектр оператора B. Представим его в виде: $\sigma(B) = \sigma_0 \cup \sigma_{int} \cup \sigma_{out}$, где $\sigma_0 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$, $\sigma_{int} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}, \sigma_{out} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > 1\}$. Тогда $X = X_0 \oplus X_{int} \oplus X_{out}$ — разложение пространства X в прямую сумму, $I = P_0 + P_{int} + P_{out}$ — соответствующее разложение единицы. Следовательно, оператор B разлагается в прямую сумму операторов: $B = B_0 \oplus B_{int} \oplus B_{out}$, $B_0 = B \mid X_0$, $B_{int} = B \mid X_{int}$, $B_{out} = B \mid X_{out}$, $\sigma(B_0) = \sigma_0$, $\sigma(B_{int}) = \sigma_{int}$, $\sigma(B_{out}) = \sigma_{out}$. В силу лемм 11, 12, а также, теоремы 3, ограниченное решение x уравнения (2) существует и представимо в виде:

$$x = x_0 + x_{int} + x_{out},$$

где

$$x_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_0^k P_0 f(t-k-1),$$

$$x_{int}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{int}^k f_{int}(t-k-1),$$

$$x_{out}(t) = -\sum_{k=0}^{\infty} B_{out}^{-k-1} f_{out}(t+k),$$

где $t \in \mathbb{R}$, $x_0(t) = P_0 x(t)$, $x_{int}(t) = P_{int} x(t)$, $x_{out}(t) = P_{out} x(t)$, $f_0(t) = P_0 f(t), f_0 \in W_1$, $f_{int}(t) = P_{int} f(t)$, $f_{out}(t) = P_{out} f(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баскаков А. Г.* Гармонический анализ линейных операторов / А. Г. Баскаков // Изд-во Воронежского университета, 1987. — 164 с.

2. *Гельфанд И. М.* Коммутативные нормированные кольца / И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов // М.: Физматгиз, 1960. — 315 с.

3. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца / М. А. Наймарк // М.: Наука, 1968. — 664 с.

4. *Колмогоров А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа /А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин // М.: Наука, 1976. — 544 с.

5. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. / Т. Като // М.: Мир, 1972. — 739 с.

6. *Баскаков А. Г.* Лекции по алгебре / А. Г. Баскаков // Изд-во Воронежского университета, 2001. — 284 с.

7. *Данфорд Н.* Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Шварц // М.: Изд-во иностранной литературы, 1962. — 896 с.

8. *Винер Н.* Интеграл Фурье и некоторые его приложения / Н. Винер // М.: Физматгиз, 1963. — 256 с.

Дуплищева Анастасия Юрьевна — аспирант факультета ПММ, Воронежский государственный университет
E-mail: dupl_ayu@mail.ru
Тел.: 8 950 764 56 45

Duplishcheva A. — postgraduate student, Voronezh State University
E-mail: dupl_ayu@mail.ru
Tel.: 8 950 764 56 45