

# ВЕТВЛЕНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ЦИКЛОВ ПРИ НАЛИЧИИ КРАТНЫХ РЕЗОНАНСОВ

М. Д. Джасим, А. П. Карпова, Д. В. Костин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 31.10.2011 г.

**Аннотация:** *Материал статьи дополняет более ранние результаты исследований Б. М. Даринского, Е. В. Ладыкиной, А. П. Карповой, Д. В. Костина, Ю. И. Сапронова и В. А. Смольянова. Изложен подход к изучению резонансных бифуркаций циклов динамических систем и их оптимизации (по коэффициенту несимметрии). Методологической основой предложенного подхода является теория гладких  $SO(2)$ -эквивариантных фредгольмовых уравнений в банаховых пространствах, центральным звеном которой является модифицированный метод Ляпунова—Шмидта.*

**Ключевые слова:** *цикл, резонанс, бифуркация, метод Ляпунова—Шмидта, круговая симметрия.*

**Abstract:** *The topic of the paper develops and extends the earlier research of B. M. Darinsky, E. V. Ladikina, A. P. Karpova, D. V. Kostin, Y. I. Sapronov and V. A. Smolyanov. It contains the description of the resonant bifurcations of the cycles for dynamic systems and their optimisation (due to asymmetry coefficient) The methodological basis of the procedure is the Lyapunov—Schmidt method considered in the context of general theory of smooth  $SO(2)$ -equivariant Fredholm equations (in Banach spaces).*

**Key words:** *cycle, resonance, bifurcation, Lyapunov—Schmidt method, circle symmetry.*

**Введение.** Разработке и апробации методов исследования зарождения циклов динамических систем вблизи сложного фокуса посвящено большое число работ [1]—[3]. Несмотря на значительные достижения в бифуркационном анализе циклов, многие ее задачи остаются недостаточно исследованными. В частности, недостаточно изучены случаи кратных сильных резонансов. Такие случаи появляются в радиофизике при исследовании автоколебаний в РС-генераторах, в реальных моделях экономики, популяционной динамики, химической кинетики и др. разделах естествознания.\*

В данной статье изложены элементы разработанной авторами процедуры приближенного вычисления и анализа ветвящихся циклов, а также их оптимизации по коэффициенту несимметрии (для ведущих гармоник). Процедура представлена в функционально-операторном виде и основана на методах теории гладких  $SO(2)$  эквивариантных фредгольмовых уравнений в банаховых пространствах [4], оснащенных элементами теории особенностей гладких функций [5]—[10].

© Джасим М. Д., Карпова А. П., Костин Д. В., 2012

## 1. ВЕТВЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ ОРБИТ ФРЕДГОЛЬМОВЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ С КРУГОВОЙ СИММЕТРИЕЙ

**1.1. Основные предположения и условия.** Многие задачи теории упругих систем, теории фазовых переходов в кристаллах и теории динамических систем естественным образом сводятся к вариационной задаче

$$V_\delta(x) \rightarrow \inf,$$

в которой  $V_\delta(x)$  — гладкое семейство гладких функционалов на банаховом пространстве  $E$ , инвариантных относительно действия  $T$  группы  $SO(2)$  на  $E$ :

$$V_\delta(T_g x) = V_\delta(x) \quad \forall x \in E, \quad g \in SO(2). \quad (1)$$

Действие  $SO(2)$  при этом задано гомоморфизмом  $g \mapsto T_g$  группы  $SO(2)$  в группу ортогональных операторов  $O(H)$  некоторого гильбертова пространства  $H$ , в которое пространство  $E$  вложено непрерывно и плотно. Рассматриваемое ниже действие предполагается слабо гладким: для  $\forall L \subset E$ ,  $\dim L < \infty$ , такового, что  $T_g(L) \subset L$ , отображение  $T : G \times L \rightarrow L$  ( $(g, x) \mapsto T_g(x)$ ) гладкое.

Как известно, в случае непрерывно-групповой симметрии, орбита каждой критической

точки состоит из критических точек. Напомним, что орбитой  $orb(x_0)$  группы  $SO(2)$ , проходящей через данную точку  $x_0 \in E$ , называется множество всех таких и только таких точек  $x \in E$ , для которых имеет место представление  $x = T_g x_0$ .

В бифуркационном анализе экстремалей важное место занимает конечномерная редукция [9], [10], которая позволяет, в условиях круговой симметрии, свести анализ ветвления экстремалей к анализу ветвления критических точек версальных параметрических разветвок краевых и угловых особенностей гладких функций.

Теория угловых особенностей была создана в трудах В. И. Арнольда, С. Т. С. Уолла, Д. Сирсмы, Д. Пита, Т. Постопа и др. [5]—[7].

Приложения краевых и угловых особенностей к задачам вариационного исчисления (в рамках теории фредгольмовых функционалов на банаховых многообразиях) был получены Ю. И. Сапроновым, А. В. Гнездиловым, О. Ю. Даниловой, О. В. Швыревой, Е. В. Ладыкиной и М. А. Хусайном [10]. Исследования по фредгольмовым уравнениям с круговой симметрией и их приложениям проводились Н. А. Бобылевым [11], В. Г. Звягиным, Ю. И. Сапроновым, Е. В. Ладыкиной, А. П. Карповой [10], [12]—[15].

Используемое в статье свойство фредгольмовости функционала  $V_\delta$  означает фредгольмовость его градиента  $f_\delta : E \rightarrow F = \text{grad } V_\delta$  : ядро и коядро производной Фреше  $\frac{\partial f_\delta}{\partial x}(x) \forall x$  конечномерны и их размерности совпадают [4].

Отображение  $f_\delta$  называется градиентом функционала  $V_\delta$ , если

$$\langle f_\delta(x), h \rangle \equiv \frac{\partial V_\delta}{\partial x}(x)h$$

(условие потенциальности  $f_\delta$ ). Здесь  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение в (гильбертовом) пространстве  $H$ , содержащем  $E$  и  $F$ , как непрерывно и плотно вложенные подпространства. Пространство  $E$  предполагается непрерывно вложенным в  $F$ . В этом случае говорят, что  $f_\delta$  — градиент функционала  $V$  в тройке пространств  $\{E, F, H\}$ .

Пусть, далее, зафиксированы прямые разложения

$$E = N \dot{+} E^{\infty-n}, \quad F = N \dot{+} F^{\infty-n},$$

где  $N$  —  $n$ -мерное подпространство в  $E$ , а  $E^{\infty-n}$  и  $F^{\infty-n}$  — ортогональные (в  $H$ ) прямые дополнения к  $N$  в  $E$  и  $F$ .

Если  $e_1, e_2, \dots, e_n$  — базис  $N$ , ортонормированный в  $H$ , то для каждого вектора  $x \in E$  имеют место разложения

$$x = u + v, \quad u = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i, \quad \xi_j = \langle x, e_j \rangle, \quad v \in E^{\infty-n}.$$

и

$$f(x) = f^{(n)}(x) + f^{(\infty-n)}(x),$$

$$f^{(n)}(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x) e_j, \quad f_j(x) = \langle f(x), e_j \rangle,$$

$$f^{(\infty-n)}(x) \in F^{\infty-n}.$$

Здесь мы опускаем, ради простоты, символ параметра  $\delta$ .

Предположив, что производная  $\frac{\partial f^{(\infty-n)}}{\partial v}(a) : E^{(\infty-n)} \rightarrow F^{(\infty-n)}$  является изоморфизмом в некоторой точке  $a \in E$ ,  $f(a) = 0$ , получим, в силу теоремы о неявном отображении, зависимость  $v = \Phi(u)$  (для  $u$  из достаточно малой окрестности  $\mathcal{O} \subset N$  точки  $\bar{u}$ ), такую, что  $\Phi(\bar{u}) = \bar{v}$  ( $\bar{u}, \bar{v}$  — компоненты  $a$ ) и  $f^{(\infty-n)}(u + \Phi(u)) = 0 \quad \forall u \in \mathcal{O}$  (отображение  $\Phi : \mathcal{O} \rightarrow E^{\infty-n}$  при этом является гладким). Для отыскания решений уравнения  $f(x) = 0$  в окрестности точки  $x = a$  достаточно найти решение уравнения  $f^{(n)}(u + \Phi(u)) = 0$ . Это уравнение эквивалентно уравнению  $\theta(\xi) = 0$ ,  $\theta(\xi) = (\theta_1(\xi), \dots, \theta_n(\xi))^T$ , где

$\theta_k(\xi) = \left\langle f \left( \sum_{j=1}^n \xi_j e_j + \Phi \left( \sum_{j=1}^n \xi_j e_j \right) \right), e_k \right\rangle$ . Отображение  $\theta$  называется *ключевым*. При этом имеем

$$\theta = \text{grad } W, \quad \text{где } W(\xi) := V \left( \sum_{j=1}^n \xi_j e_j + \Phi \left( \sum_{j=1}^n \xi_j e_j \right) \right)$$

— *ключевая функция* [10].

**1.2. Структура ключевой функции в случае резонанса 1 : 2.** Пусть функционал  $V_\delta$  инвариантен относительно слабо гладкого действия  $SO(2)$  в  $H$  (см.(1)). Наряду с этим, имеет место эквивариантность редуцирующей сублимерсии

$$\mathbf{p} : x \mapsto \xi, \quad x \in \mathcal{U} \subset E, \quad \xi \in \mathcal{O} \subset R^n, \quad \xi_j = \langle x, e_j \rangle$$

( $\mathcal{U}, \mathcal{O}$  — некоторые открытые подмножества), так как условие слабой гладкости действия окружности дает гладкость действия группы  $SO(2)$  в пространстве ключевых параметров. Следовательно, ключевая функция  $W_\delta$  также будет инвариантной [10].

Во всех рассмотренных ниже случаях предполагается, что индуцированное действие

$SO(2)$  на  $\mathbb{R}^n$  полусвободно: начало координат — единственная неподвижная точка действия  $SO(2)$ . В таком случае  $n = 2m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

Если при этом отождествить вектор  $\xi \in \mathbb{R}^{2m}$  с комплексным вектором

$$z = (z_1, \dots, z_m)^\top \in \mathbb{C}^m, \quad z_k = \xi_{2k-1} + i\xi_{2k},$$

$\xi_{2k-1}, \xi_{2k}$  — координаты в инвариантной плоскости, то инвариантность  $W_\delta$  означает выполнение следующего соотношения:

$$W_\delta(\tilde{z}) = W_\delta(z),$$

$$\tilde{z} = (\exp(ip_1\varphi)z_1, \dots, \exp(ip_m\varphi)z_m)^\top, \quad p_k \in \mathbb{Z}_+.$$

Последнее означает инвариантность относительно действия

$$\{\exp(i\varphi), z\} \mapsto (\exp(ip_1\varphi)z_1, \dots, \exp(ip_m\varphi)z_m)^\top \quad (2)$$

группы  $SO(2)$ . Предполагается, что  $HOD(p_1, p_2, \dots, p_m) = 1$ .

В этом случае будем говорить, что в нулевой критической точке имеет место *резонанс типа*  $p_1 : p_2 : \dots : p_m$ . Если  $m = 1$ , то резонанс называется *простым*, а при  $m > 1$  — *кратным*. Число  $m - 1$  называется *кратностью* резонанса.

Отметим, что данные определения согласуются с соответствующими определениями из теории резонансов в динамических системах (являются их аналогами).

Множество ненулевых критических точек ключевой функции и их образов относительно маргинального отображения  $\varphi_\delta : \mathbb{R}^n \rightarrow E$ ,

$$\varphi_\delta(\xi) := \sum_{j=1}^n \xi_j e_j + \Phi_\delta \left( \sum_{j=1}^n \xi_j e_j \right),$$

представляет собой набор одномерных подмногообразий (критических орбит действия (2), диффеоморфных окружности [16]).

Пусть  $m = 2$  и действие окружности на (4-мерном) ядре задано (в комплексной форме) соотношением

$$\{\exp(i\varphi), z\} \mapsto (\exp(ip\varphi)z_1, \exp(iq\varphi)z_2)^\top. \quad (3)$$

Резонанс  $p : q$  называется *сильным*, если существует такой ненулевой набор целых чисел  $n_1, n_2$ , что  $n_1 p + n_2 q = 0$  и  $|n_1| + |n_2| \leq 4$ . Число  $|n_1| + |n_2|$  называется *порядком* (резонансного) соотношения  $n_1 p + n_2 q = 0$ . Число, наименьшее из порядков резонансных соотношений, называется *порядком* данного резонанса. Резонансные соотношения порядка  $\leq 4$  называются *сильными*, а остальные — *слабыми*. Таким образом, *сильным* называется резонанс, для

которого существует сильное резонансное соотношение. В противном случае резонанс называется *слабым*.

В случае резонанса  $1 : 2$  ключевая функция  $W_\delta$  допускает представление в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2) + \frac{1}{3}(C_3 I_3 + C_4 I_4) + \\ & + \frac{1}{4}(A_1 I_1^2 + A_2 I_2^2 + 2BI_1 I_2) + o(\|\xi\|^4), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$I_1 = \xi_1^2 + \xi_2^2, \quad I_2 = \xi_3^2 + \xi_4^2,$$

$$I_3 = (\xi_1^2 - \xi_2^2)\xi_3 + 2\xi_1 \xi_2 \xi_4,$$

$$I_4 = 2\xi_1 \xi_2 \xi_3 - (\xi_1^2 - \xi_2^2)\xi_4$$

— полная система инвариантов действия (2),  $A_1, A_2, B, C_1, C_2$  — вычисляемые константы, зависящие от  $\delta$  [10], [15].

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

**Теорема 1.** В случае резонанса  $1 : 2$  ключевая функция  $W_\delta$  допускает в полярных координатах

$$\xi_1 = r_1 \cos(\varphi_1), \quad \xi_2 = r_1 \sin(\varphi_1),$$

$$\xi_3 = r_2 \cos(\varphi_2), \quad \xi_4 = r_2 \sin(\varphi_2),$$

представление (после масштабирования и деления на нормирующую константу) в виде

$$\begin{aligned} \tilde{W} = & -\frac{1}{2}(\beta_1 r_1^2 + \beta_2 r_2^2) + cr_1^2 r_2 \cos(\psi) + \\ & + \frac{1}{4}(r_1^4 + r_2^4 + 2ar_1^2 r_2^2) + \\ & + \vartheta(r_1^2, r_2^2) + r_1^2 r_2 \varrho(r_1^2, r_2^2, \psi), \quad a > -1, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $a = a(\delta)$ ,  $c = c(\delta)$  — вычисляемые константы,  $\psi = \varphi_2 - 2\varphi_1 + const$ ,  $\vartheta, \varrho$  — некоторые гладкие функции, соответственно, двух и трех переменных, для которых

$$\vartheta(r_1^2, r_2^2) = O(\|\xi\|^6), \quad \varrho(r_1^2, r_2^2, \psi) = O(\|\xi\|^2).$$

**1.3. Анализ главной части ключевой функции. Редукция к краевой особенности.** Множество ненулевых критических точек Функции  $W_\delta$  представляют собой набор одномерных подмногообразий, диффеоморфных окружности.

Условие стационарности орбиты по фазе  $\psi = 2\varphi_1 - \varphi_2$  приводит к следующим критическим значениям фазы:

$$\psi = 0 + O(\|\xi\|^2), \quad \pi + O(\|\xi\|^2).$$

Дальнейшее изучение условий стационарности по амплитудам  $r_1, r_2$  приводит к задаче о бифуркации критических точек из критической точки с омбилической особенностью параболического типа [7]. В этом случае локальной нормальной формой ключевой функции (при нулевых значениях возмущающих параметров) является полином

$$\tilde{W}_0 = r_2^4 \pm r_1^2 r_2.$$

Заметим, что функция  $r_2^4 \pm r_1^2 r_2$  симметрична относительно следующей пары преобразований:

$$J_1 : (r_1, r_2) \rightarrow (-r_1, r_2), \quad J_2 : (0, r_2) \rightarrow (0, -r_2).$$

Так как и функция  $\tilde{W}_\delta$  (см. (5)) инвариантна относительно преобразований  $J_1, J_2$  (вследствие  $SO(2)$  – эквивариантности ключевой функции), то она эквивалентна (в классе деформаций особенностей с симметрией относительно преобразований  $J_1, J_2$ ) следующей (миниверсальной) развертке ростка функции  $\tilde{W}_0$  в нуле:

$$W_\delta(r_1, r_2) = r_2^4 \pm r_1^2 r_2 + \delta_1 r_1^2 + \delta_2 r_2^2.$$

Стандартная замена  $r_1^2 = u, u \geq 0$ , приводит к эквивалентной задаче о бифуркациях экстремалей из краевой особой точки [5] для следующей развертки (ниже введено обозначение  $v = r_2$ ):

$$\hat{W}_\delta(u, v) = v^4 \pm uv + \delta_1 u + \delta_2 v^2, \quad u \geq 0. \quad (6)$$

Полином  $v^4 \pm uv$  можно заменить полиномом  $v^4 + uv$ , отбросив ограничение  $v \geq 0$  (критические точки с отрицательными значениями  $v$  переходят в критические точки с положительными значениями  $v$  после смены знака во втором слагаемом полинома  $v^4 + uv$ ).

Переход от функции  $\hat{W}_\delta$  к краевой особенности функции  $v^4 + uv, u \geq 0$ , и ее деформации не отражается на каустике\*, которая представляет собой росток в нуле следующего объединения множеств:

$$\Sigma = \Sigma_1^{int} \cup \Sigma_1^{ext} \cup \Sigma_0,$$

где  $\Sigma_1^{int}, \Sigma_1^{ext}$  — подмножества (компоненты) каустики, отвечающие за вырождение краевых особенностей вдоль края и, соответственно, по нормали, а  $\Sigma_0$  — компонента, отвечающая за вырождение внутренних (некраевых) критических точек.

\* Каустикой в нулевой особой точке называется росток множества таких точек  $(\delta_1, \delta_2)^T \in \mathbb{R}^2$  при которых функция  $\hat{W}$  имеет вырожденную критическую точку, ответвленную от нуля.

Нетрудно проверить, что в рассмотренной задаче компонента  $\Sigma_0$  является пустой. Следовательно, построение параметризации каустики сводится к параметризации лишь ее “краевых” компонент.

**1.4. Вырождение вдоль края (внутреннее вырождение).** Для функции  $\hat{W}_\delta(u, v) = v^4 + uv + \delta_1 u + \delta_2 v^2$  рассмотрим ее краевые критические точки, в которых вторая частная производная по  $v$  обращается в нуль:

$$\frac{\partial \hat{W}_\delta}{\partial v}(0, v) = \frac{\partial^2 \hat{W}_\delta}{\partial v^2}(0, v) = 0, \quad \text{или}$$

$4v^3 + 2\delta_2 v = 12v^2 + 2\delta_2 = 0$ . На основе этих соотношений легко увидеть, что множество  $\Sigma_1^{int}$  задается уравнением  $\delta_2 = 0$ . Переход параметра  $\delta_2$  сверху вниз через нуль приводит к рождению пары симметрично расположенных точек минимума (относительно края). Нуль становится при этом точкой максимума. Индекс Морса всех краевых критических точек изменяется на единицу при смене знака производной  $W$  в нуле по нормали к краю (по переменной  $u$ ).

**1.5. Вырождение вдоль нормали (внешнее вырождение).** Рассмотрим краевые критические точки функции  $\hat{W}$ , в которых частная производная по  $u$  обращается в нуль (внешнее вырождение):  $\frac{\partial \hat{W}_\delta}{\partial u}(0, v) = 4v^3 + 2\delta_2 v = 0$ . После сопоставления последнего соотношения с уравнением критических краевых точек, нетрудно заметить, что множество  $\Sigma_1^{ext}$  задается уравнением  $(\delta_2 + 2\delta_1^2)\delta_1 = 0$ .

Таким образом, каустика функции  $\hat{W}_\delta(u, v)$  получается объединением координатного креста  $\delta_1 \delta_2 = 0$  с параболой  $\delta_2 + 2\delta_1^2 = 0$ .

Дополнение к каустике состоит из открытых непересекающихся подмножеств  $\Omega_k$  — ячеек регулярности,  $k = 1, 2, 3, 4$ . Ячейке  $\Omega_1$  соответствует единственная критическая точка (краевое седло), ячейке  $\Omega_2$  — пара критических точек: краевой минимум и внутреннее (вне края) седло, ячейке  $\Omega_3$  — тройка точек: одна точка минимума и два седла (все точки краевые), а ячейке  $\Omega_4$  соответствует четверка критических точек: три краевые (одно седло, два минимума) и внутреннее седло.

**1.6. Резонанс 1:3.** В этом случае при отождествлении вектора  $\xi \in \mathbb{R}^4$  с комплексным вектором  $z = (z_1, z_2)^T \in \mathbb{C}^2$  условие инвариантности ключевой функции  $W$  записывается в виде

$$W_{\delta}(\tilde{z}) = W_{\delta}(z),$$

$$\tilde{z} = (\exp(i\varphi)z_1, \exp(i3\varphi)z_2)^{\top}.$$

Функция  $W$  допускает представление

$$-\frac{1}{2}(\alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2) + \frac{1}{4}(A_1 I_1^2 + A_2 I_2^2 + 2B I_1 I_2 + C_3 I_3 + C_4 I_4) + o(\|\xi\|^4), \quad (7)$$

где

$$I_1 = \xi_1^2 + \xi_2^2, \quad I_2 = \xi_3^2 + \xi_4^2, \\ I_3 = (\xi_1^3 + 3\xi_1 \xi_2^2) \xi_3 - (3\xi_1^2 \xi_2 + \xi_2^3) \xi_4, \\ I_4 = (3\xi_1^2 \xi_2 + \xi_2^3) \xi_4 + (\xi_1^3 + 3\xi_1 \xi_2^2) \xi_3$$

— инварианты относительно действия

$$\{\exp(i\varphi), z\} \mapsto (\exp(i\varphi)z_1, \exp(i3\varphi)z_2)^{\top}$$

группы  $SO(2)$ .

Таким образом, получаем, что в случае резонанса  $1:3$  ключевая функция  $W$  допускает в полярных координатах представление (после масштабирования и деления на нормирующую константу) в виде

$$\tilde{W}_{\delta} = -\frac{1}{2}(\beta_1 r_1^2 + \beta_2 r_2^2) + \frac{1}{4}(r_1^4 + r_2^4 + 2a r_1^2 r_2^2 + c r_1^3 r_2 \cos(\psi)) + \vartheta(r_1^2, r_2^2) + r_1^2 r_2 \varrho(r_1^2, r_2, \psi), \quad (8)$$

где  $c = c(\delta)$  — вычисляемая константа,  $\psi = \varphi_2 - 3\varphi_1 + const$ ,  $\vartheta, \varrho$  — некоторые гладкие функции, соответственно, двух и трех переменных, для которых

$$\vartheta(r_1^2, r_2^2) = O(|\xi|^6), \\ \varrho(r_1^2, r_2, \psi) = O(|\xi|^2).$$

После редукции по фазовой переменной и линейной замены координат анализ функции (8) сводится к анализу функции

$$-\frac{1}{2}(\gamma_1 u^2 + \gamma_2 v^2 + 2\gamma_3 uv) + \frac{1}{4}(u^4 + v^4 + 2\tilde{a}u^2 v^2).$$

### 1.7. Резонанс $p:q$ , $|p| + |q| \geq 5$ .

В случае слабого резонанса функция  $W_{\delta}$  допускает представление

$$-\frac{1}{2}(\alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2) + \frac{1}{4}(A_1 I_1^2 + A_2 I_2^2 + 2B I_1 I_2) + o(\|\xi\|^4). \quad (9)$$

Таким образом, получаем, что в случае 4-мерного вырождения со слабым резонансом ключевая функция  $W$  допускает в полярных координатах представление (после масштабирования и деления на нормирующую константу) в виде

$$-\frac{1}{2}(\beta_1 r_1^2 + \beta_2 r_2^2) + \frac{1}{4}(r_1^4 + r_2^4 + 2a r_1^2 r_2^2) + \vartheta(r_1^2, r_2^2) + r_1^2 r_2 \varrho(r_1^2, r_2, \psi), \quad a > -1, \quad (10)$$

где  $a = a(\delta)$  — вычисляемая константа,  $\psi = p\varphi_2 - q\varphi_1 + const$ ,  $\vartheta, \varrho$  — некоторые гладкие функции, соответственно, двух и трех переменных, для которых

$$\vartheta(r_1^2, r_2^2) = O(|\xi|^6), \\ \varrho(r_1^2, r_2, \psi) = O(|\xi|^2).$$

После редукции по фазовой переменной анализ функции (10) сводится к анализу функции

$$-\frac{1}{2}(\gamma_1 u^2 + \gamma_2 v^2) + \frac{1}{4}(u^4 + v^4 + 2\tilde{a}u^2 v^2),$$

аналогичной той, которая была рассмотрена в случае резонанса  $0:1$ .

**1.8. Пример: зарождение периодических волн в упругой балке на упругом основании.** Колебания и волновые движения упругой балки на упругом основании изучали Ю. А. Митропольский, Б. И. Мосеенков, J. M. T. Thompson, Н. В. Stewart, Б. С. Бардин, С. Д. Фурта [2], [3] и др. В [17], [18] изучены 2-модовые бифуркации равновесных конфигураций неоднородных балок.

Простейшая нелинейная модель движений балки описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta w + w^3 = \psi,$$

где  $w$  — прогиб балки (поле смещений точек средней линии упругой балки, заданное на оси  $x$ ),  $\psi$  — малый функциональный параметр несовершенства.

Как известно, первый шаг в изучении такой задачи — отыскание равновесных (стационарных) состояний, определяемых уравнением

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \alpha \frac{d^2 w}{dx^2} + \beta w + w^3 = 0. \quad (11)$$

Если рассмотреть стандартные краевые условия

$$w(0) = w(T) = w''(0) = w''(T) = 0, \quad (12)$$

то полученная граничная задача может допускать вырождения, порождающие 2-модовые бифуркации с интересными геометрическими и физическими эффектами. Ключевая функция  $W$ , соответствующая функционалу энергии, в случае резонанса 1 : 2 допускает представление в виде

$$-\frac{1}{2}(\alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2) + \frac{C}{3} I_3 + \frac{1}{4}(A_1 I_1^2 + A_2 I_2^2 + 2B I_1 I_2) + o(\|\xi\|^4),$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \xi_1^2 + \xi_2^2, & I_2 &= \xi_3^2 + \xi_4^2, \\ I_3 &= (\xi_1^2 - \xi_2^2)\xi_3 + 2\xi_1\xi_2\xi_4, \\ I_4 &= 2\xi_1\xi_2\xi_3 - (\xi_1^2 - \xi_2^2)\xi_4, \\ \alpha_1 &= \kappa_1 - \kappa_0 - \kappa_2, \\ \alpha_2 &= 4\kappa_1 - \kappa_0 - 16\kappa_2, \end{aligned}$$

$A_1, A_2, B, C$  — вычисляемые константы (их точные значения в данный момент не важны).

Здесь нечетные степени инварианта  $I_4$  не входят в тейлоровское разложение ключевой функции, так как ключевая функция симметрична относительно инволюции

$$J : (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)^\top \mapsto (-\xi_1, \xi_2, -\xi_3, \xi_4)^\top$$

(это вытекает из симметрии потенциала  $U$  относительно симметрии отражения  $w(x) \mapsto w(2\pi - x)$ ), а четвертый инвариант антисимметричен:  $I_4(Jw) = -I_4(w)$ .

В полярных координатах

$$\begin{aligned} \xi_1 &= r_1 \cos(\varphi_1), & \xi_2 &= r_1 \sin(\varphi_1), \\ \xi_3 &= r_2 \cos(\varphi_2), & \xi_4 &= r_2 \sin(\varphi_2), \end{aligned}$$

получаем представление ключевой функции (после масштабирования и деления на нормирующую константу) в виде

$$\begin{aligned} \tilde{W} &= -\frac{1}{2}(\beta_1 r_1^2 + \beta_2 r_2^2) + c r_1^2 r_2 \cos(\psi) + \\ &+ \frac{1}{4}(r_1^4 + r_2^4 + 4r_1^2 r_2^2) + \\ &+ \vartheta(r_1^2, r_2^2) + r_1^2 r_2 \varrho(r_1^2, r_2^2, \psi), \end{aligned}$$

где  $c$  — вычисляемая константа,  $\psi = \varphi_2 - 2\varphi_1$ ,  $\vartheta, \varrho$  — некоторые гладкие функции, соответственно, двух и трех переменных, для которых  $\vartheta(r_1^2, r_2^2) = O(\|\xi\|^6)$ ,  $\varrho(r_1^2, r_2^2, \psi) = O(\|\xi\|^2)$ .

## 2. НЕПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С КРАТНЫМИ РЕЗОНАНСАМИ

В предыдущем разделе рассматривалась задача о ветвлении решений потенциального  $SO(2)$ -эквивариантного фредгольмова уравнения. Аналогичную задачу можно рассмотреть и для непотенциального  $SO(2)$ -фредгольмова уравнения. Такое уравнение появляется в результате функционально-операторной трактовки классической задачи о бифуркации периодических колебаний из вырожденной стационарной точки. Посредством метода Ляпунова—Шмидта анализ амплитудно—частотных характеристик периодических колебаний непотенциальных динамических систем сводится к анализу решений систем полиномиальных уравнений [12]—[15]. Сложность полиномиальных уравнений возрастает с ростом сложности особенности (в порождающей стационарной точке). Сложность же особенности зависит от кратности резонансов и наличия сильных резонансов.

В качестве примера ключевого отображения рассмотрим алгебраическое отображение  $\Theta : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ :

$$\begin{aligned} \Theta(\xi) &= (\Theta_1(\xi), \Theta_2(\xi), \Theta_3(\xi), \Theta_4(\xi), \Theta_5(\xi), \Theta_6(\xi))^\top, \\ \Theta_j(\xi) &= \sum_k \alpha_k^j \xi^k, \end{aligned}$$

где  $\xi^k = \xi_1^{k_1} \xi_2^{k_2} \xi_3^{k_3} \xi_4^{k_4} \xi_5^{k_5} \xi_6^{k_6}$ ,  $k = (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6)$ ,  $k_j \in \mathbb{Z}_+$ ,  $|k| = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6$ . Пусть это отображение эквивариантно относительно стандартного действия окружности (группы  $SO(2)$ ) на  $\mathbb{R}^6$ , соответствующего резонансу 1 : 2 : 3. Если отождествить вектор  $\xi \in \mathbb{R}^6$  (в образе и прообразе отображения  $\Theta$ ) с комплексным вектором  $z = (z_1, z_2, z_3)^\top \in \mathbb{C}^3$ ,  $z_1 = \xi_1 + i\xi_2, z_2 = \xi_3 + i\xi_4, z_3 = \xi_5 + i\xi_6$ , то действие  $SO(2)$  задается соответствием

$$T : \{\exp(i\phi), z\} \mapsto (\exp(i\phi)z_1, \exp(2i\phi)z_2, \exp(3i\phi)z_3)^\top.$$

Эквивариантность означает выполнение соотношения

$$\Theta(T_\phi(\xi)) = T_\phi(\Theta(\xi)) \forall \{\xi, \phi\}. \quad (13)$$

Пусть теперь

$$\begin{aligned} z_1 &= \xi_1 + i\xi_2, & z_2 &= \xi_3 + i\xi_4, & z_3 &= \xi_5 + i\xi_6, \\ z_4 &= \xi_1 - i\xi_2, & z_5 &= \xi_3 - i\xi_4, & z_6 &= \xi_5 - i\xi_6, \\ z &= (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)^\top, \end{aligned}$$

$$T_\phi(z) = (e^{i\phi}z_1, e^{2i\phi}z_2, e^{3i\phi}z_3, e^{-i\phi}z_4, e^{-2i\phi}z_5, e^{-3i\phi}z_6)^\top.$$

Положив  $\Upsilon(z) = \Theta(\xi)$ , мы сможем записать (13) в виде

$$T_\varphi \Upsilon(z) = \Upsilon \left( T_\varphi(z_1, z_2, z_3), T_{-\varphi}(z_4, z_5, z_6) \right).$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Upsilon(z) &= \sum_k \gamma_k z_1^{k_1} z_2^{k_2} z_3^{k_3} z_4^{k_4} z_5^{k_5} z_6^{k_6}, \\ \gamma_k &= \left( \gamma_k^1, \gamma_k^2, \gamma_k^3, \gamma_k^4, \gamma_k^5, \gamma_k^6 \right)^\top, \\ T_\varphi \Upsilon(z) &= \sum_k T_\varphi(\gamma_k) z_1^{k_1} z_2^{k_2} z_3^{k_3} z_4^{k_4} z_5^{k_5} z_6^{k_6} = \\ &= \sum_k \begin{pmatrix} e^{i\varphi} \gamma_k^1 \\ e^{2i\varphi} \gamma_k^2 \\ e^{3i\varphi} \gamma_k^3 \\ e^{-i\varphi} \gamma_k^4 \\ e^{-2i\varphi} \gamma_k^5 \\ e^{-3i\varphi} \gamma_k^6 \end{pmatrix} z_1^{k_1} z_2^{k_2} z_3^{k_3} z_4^{k_4} z_5^{k_5} z_6^{k_6}. \end{aligned}$$

Обратимся к тейлоровскому разложению

$$\Theta(\xi) = \Theta^{(1)}(\xi) + \Theta^{(2)}(\xi) + \Theta^{(3)}(\xi) + \dots,$$

где  $\Theta^{(1)}(\xi)$ ,  $\Theta^{(2)}(\xi)$  и  $\Theta^{(3)}(\xi)$  — линейная, квадратичная и кубическая части отображения  $\Theta$ . Если перейти к комплексной форме, то получим следующее его представление (после соответствующей перепараметризации):

$$\begin{aligned} \Upsilon &= (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2, \lambda_3 z_2)^\top + \\ &+ \left( a_{11} \bar{z}_1 z_2 + a_{12} \bar{z}_2 z_3, a_{21} z_1^2 + a_{22} \bar{z}_1 z_3, a_{31} z_1 z_2 \right)^\top + \\ &+ \left( a_{13} \bar{z}_1^2 z_2 + a_{14} \bar{z}_2^2 z_3, a_{23} z_1 \bar{z}_2 z_3, a_{32} z_1^3 + \right. \\ &\left. + a_{33} \bar{z}_1 z_2^2 \right)^\top + O\left(\|\xi\|^4\right) + \\ &+ \left( z_1 \sum_{j=1}^3 b_{1j} |z_j|^2, z_2 \sum_{j=1}^3 b_{2j} |z_j|^2, z_3 \sum_{j=1}^3 b_{3j} |z_j|^2 \right)^\top. \end{aligned} \quad (14)$$

Заметим, что образующими инвариантами действия окружности в случае резонанса  $1:2:3$  являются следующие (вещественные) многочлены

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{1,1} &= \xi_1^2 + \xi_2^2, \quad \mathcal{I}_{1,2} = \xi_1^3 + \xi_2^2, \quad \mathcal{I}_{1,3} = \xi_5^2 + \xi_6^2, \\ \mathcal{I}_{3,1} &= \operatorname{Re} \bar{z}_1 z_2^2, \quad \mathcal{I}_{3,2} = \operatorname{Im} \bar{z}_1 z_2^2, \\ \mathcal{I}_{3,3} &= \operatorname{Re} \bar{z}_1 \bar{z}_2 z_3, \quad \mathcal{I}_{3,4} = \operatorname{Im} \bar{z}_1 \bar{z}_2 z_3, \\ \mathcal{I}_{4,1} &= \operatorname{Re} \bar{z}_1 \bar{z}_3 z_2^2, \quad \mathcal{I}_{4,2} = \operatorname{Im} \bar{z}_1 \bar{z}_3 z_2^2, \\ \mathcal{I}_{4,3} &= \operatorname{Re} \bar{z}_1^3 z_3, \quad \mathcal{I}_{4,4} = \operatorname{Im} \bar{z}_1^3 z_3. \end{aligned}$$

Наряду с этими инвариантами часто используются комплексные инварианты

$$\mathcal{J}_1 = \mathcal{I}_{1,1} = \bar{z}_1 z_1, \quad \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_{1,2} = \bar{z}_2 z_2, \quad \mathcal{J}_3 = \mathcal{J}_{1,3} = \bar{z}_3 z_3,$$

$$\mathcal{J}_4 = \bar{z}_1 z_2^2, \quad \mathcal{J}_5 = \bar{z}_1 \bar{z}_2 z_3, \quad \mathcal{J}_6 = \bar{z}_1 \bar{z}_3 z_2^2, \quad \mathcal{J}_7 = \bar{z}_1^3 z_3.$$

Заменим ключевое уравнение  $\Theta(\xi) = 0$  уравнением  $\tilde{\Theta}(\xi) = 0$ , состоящим из скалярных произведений,

$$\tilde{\Theta}(\xi) = (\tilde{\Theta}_1(\xi), \tilde{\Theta}_2(\xi), \tilde{\Theta}_3(\xi), \tilde{\Theta}_4(\xi), \tilde{\Theta}_5(\xi), \tilde{\Theta}_6(\xi))^\top,$$

где компоненты  $\tilde{\Theta}_j$  представляют собой следующие скалярные произведения:

$$\tilde{\Theta}_1(\xi) := (\Theta(\xi), z_1), \quad \tilde{\Theta}_2(\xi) := (\Theta(\xi), iz_1),$$

$$\tilde{\Theta}_3(\xi) := (\Theta(\xi), z_2), \quad \tilde{\Theta}_4(\xi) := (\Theta(\xi), iz_2),$$

$$\tilde{\Theta}_5(\xi) := (\Theta(\xi), z_3), \quad \tilde{\Theta}_6(\xi) := (\Theta(\xi), iz_3),$$

$$z_1 := (\xi_1, \xi_2, 0, 0, 0, 0)^\top, \quad iz_1 := (-\xi_2, \xi_1, 0, 0, 0, 0)^\top,$$

$$z_2 := (0, 0, \xi_3, \xi_4, 0, 0)^\top, \quad iz_2 := (0, 0, -\xi_4, \xi_3, 0, 0)^\top,$$

$$z_3 := (0, 0, 0, 0, \xi_5, \xi_6)^\top, \quad iz_3 := (0, 0, 0, 0, -\xi_6, \xi_5)^\top.$$

Легко проверить, что функции  $\tilde{\Theta}_k$  являются инвариантами.

Пусть  $\tilde{\Upsilon}$  — комплексная форма  $\tilde{\Theta}$ . Из формулы (14) следует, что

$$\tilde{\Upsilon} = \begin{pmatrix} \lambda_1 J_1 + a_{11} J_4 + a_{12} J_5 + a_{14} J_6 + a_{13} J_7 + J_1 \sum_{j=1}^3 b_{1j} J_j + \dots \\ \lambda_2 J_2 + a_{21} \bar{J}_4 + a_{22} J_5 + a_{23} \bar{J}_6 + J_2 \sum_{j=1}^3 b_{2j} J_j + \dots \\ \lambda_3 J_3 + a_{31} \bar{J}_5 + a_{32} \bar{J}_7 + a_{33} \bar{J}_6 + J_3 \sum_{j=1}^3 b_{3j} J_j + \dots \end{pmatrix}.$$

Перейдя к полярным переменным  $z_k = r_k e^{i\varphi_k}$ , получим, учитывая равенства

$$J_4 = r_1^2 r_2 \exp(i(\varphi_2 - 2\varphi_1)),$$

$$J_5 = r_1 r_2 r_3 \exp(i(\varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2)),$$

$$J_6 = r_1 r_2^2 r_3 \exp(i(2\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_3)),$$

$$J_7 = r_1^3 2r_3 \exp(i(\varphi_3 - 3\varphi_1)),$$

что

$$\Upsilon_1 = \lambda_1 r_1^2 + a_{11} r_1^2 r_2 \exp(i(\varphi_2 - 2\varphi_1)) +$$

$$+ a_{12} r_1 r_2 r_3 \exp(i(\varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2)) +$$

$$+ a_{13} r_1^3 r_3 \exp(i(\varphi_3 - 3\varphi_1)) +$$

$$+ a_{14} r_1 r_2^2 r_3 \exp(i(2\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_3)) + r_1^2 \left( \sum_{j=1}^3 b_{1j} r_j^2 \right) + \dots,$$

$$\Upsilon_2 = \lambda_2 r_2^2 + a_{21} r_1^2 r_2 \exp(i(\varphi_2 - 2\varphi_1)) +$$

$$+ a_{22} r_1 r_2 r_3 \exp(-i(\varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2)) +$$

$$+ a_{23} r_1 r_2^2 r_3 \exp(i(2\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_3)) + r_2^2 \left( \sum_{j=1}^3 b_{2j} r_j^2 \right) + \dots$$

$$\begin{aligned} Y_3 = & \lambda_3 r_3^2 + a_{31} r_1 r_2 r_3 \exp(i(\varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_1)) + \\ & + a_{32} r_1^3 r_3 \exp(i(\varphi_3 - 3\varphi_1)) + \\ & + a_{33} r_1 r_2^2 r_3 \exp(i(2\varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_1)) + r_3^2 \left( \sum_{j=1}^3 b_{3j} r_j^2 \right) + \dots, \end{aligned}$$

Имея эти выражения, можно находить соотношения между амплитудными, угловыми (фазовыми) переменными и параметрами решений (например, зависимость между амплитудой и периодом колебания) исходного уравнения. Можно также определять количество бифурцирующих решений и вычислять асимптотические представления для амплитудных переменных.

При  $r_1 r_2 r_3 \neq 0$  переход к приведенному уравнению не приводит к потере решений и появлению новых решений. На основе этой системы уравнений нетрудно также осуществить дискриминантный анализ ветвей бифурцирующих решений.

### 3. ОПТИМИЗАЦИЯ НАБОРА АМПЛИТУД ПО ГЛАВНЫМ ГАРМОНИКАМ

Из рассуждений, приведенных в предыдущих разделах, следует, что бифурцирующее периодическое колебание в случае  $n$ -кратного резонанса допускает представление в виде  $\sum_{k=1}^n \xi_k \cos(p_k t + \omega_k) + o(|\xi|)$ ,  $t \in [0, \pi]$ , где амплитудные переменные  $\xi_k$  определяются посредством ключевого уравнения.

Рассмотрим имеющий практическое значение случай  $p_k = k \forall k$  (другие случаи изучаются аналогично).

В ряде прикладных задач возникает вопрос об оптимизации главной части

$f(t, \lambda) := \sum_{k=1}^n \xi_k \cos(kt)$  (при  $\omega_k = 0$ ) по коэффициенту несимметрии [19]:

$$k := \frac{f_{max}}{|f_{min}|} \rightarrow \sup,$$

где  $f_{max} := \max_t f(t, \lambda)$ ,  $f_{min} := \min_t f(t, \lambda)$ .

Для определенности, остановимся на рассмотрении важного для приложений случая  $n = 7$ .

#### 3.1. Переход к экстремальной задаче для алгебраического полинома.

Итак, рассмотрим полином

$$f(t, \lambda) = \sum_{k=1}^7 \lambda_k \cos(kt), t \in [-\pi, \pi], \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_7). \quad (15)$$

Достижение коэффициентом несимметрии максимального значения обеспечивается решением следующей задачи математического программирования:

$$\inf_t f(t, \lambda) \rightarrow \sup_{\lambda} \quad t \in [0, \pi], \sum_{k=1}^7 \lambda_k = c. \quad (16)$$

Решение этой задачи проведем, перейдя к алгебраическому полиному

$$V(x, \mu) = \sum_{k=0}^7 \mu_k x^k, x \in [-1, 1], \mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_7),$$

который получен из (15) заменой косинусов соответствующими многочленами Чебышева первого рода

$$\left. \begin{aligned} \cos(t) &= x, \\ \cos(2t) &= 2x^2 - 1, \\ \cos(3t) &= 4x^3 - 3x, \\ \cos(4t) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, \\ \cos(5t) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x, \\ \cos(6t) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1, \\ \cos(7t) &= 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Из (17) получаем соотношения между коэффициентами тригонометрического полинома и соответствующего ему алгебраического полинома:

$$\left. \begin{aligned} \mu_0 &= -\lambda_2 + \lambda_4 - \lambda_6, \\ \mu_1 &= \lambda_1 - 3\lambda_3 + 5\lambda_5 - 7\lambda_7, \\ \mu_2 &= 2\lambda_2 - 8\lambda_4 + 18\lambda_6, \\ \mu_3 &= 4\lambda_3 - 20\lambda_5 + 56\lambda_7, \\ \mu_4 &= 8\lambda_4 - 48\lambda_6, \\ \mu_5 &= 16\lambda_5 - 112\lambda_7, \\ \mu_6 &= 32\lambda_6, \\ \mu_7 &= 64\lambda_7 \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \mu_1 + \frac{3}{4}\mu_3 + \frac{5}{8}\mu_5 + \frac{35}{64}\mu_7, \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}\mu_2 + \frac{1}{2}\mu_4 + \frac{15}{32}\mu_6, \\ \lambda_3 &= \frac{1}{4}\mu_3 + \frac{5}{16}\mu_5 + \frac{21}{64}\mu_7, \\ \lambda_4 &= \frac{1}{8}\mu_4 + \frac{3}{16}\mu_6, \\ \lambda_5 &= \frac{1}{16}\mu_5 + \frac{7}{64}\mu_7, \\ \lambda_6 &= \frac{1}{32}\mu_6, \\ \lambda_7 &= \frac{1}{64}\mu_7. \end{aligned} \right\}$$



Из условия  $\sum_{k=1}^7 \lambda_k = c$  следует

$$V(1, \mu) = \sum_{k=0}^7 \mu_k = c.$$

Пусть  $-1 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6 < 1$  — критические (экстремальные) точки функции  $V(x, \bar{\mu})$  (при фиксированном значении  $\mu = \bar{\mu}$ ):

$$\frac{dV(x_k, \bar{\mu})}{dx} = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

При этом  $x_1, x_3, x_5, 1$  — точки локальных максимумов, а  $-1, x_2, x_4, x_6$  — точки локальных минимумов. Если  $\mu = \bar{\mu}$  — решение задачи (16), то для него выполняется условие Максвелла [5], [6]:

$$V(-1, \bar{\mu}) = V(x_2, \bar{\mu}) = V(x_4, \bar{\mu}) = V(x_6, \bar{\mu}). \quad (18)$$

### 3.2. Построение оптимального полинома.

Многочлен степени 7, для которого выполнено условие (18), будем называть  $M$ -многочленом. Дальнейшая наша цель — максимизация константы Максвелла  $M$ , равной общему значению в (18).

Многочлен  $V$  отличается от многочлена  $N := (x+1)(x-x_2)^2(x-x_4)^2(x-x_6)^2$  постоянным слагаемым (с точностью до общего постоянного множителя). Таким образом, имеет место следующее утверждение.

**Теорема 2.** *Каждый “экстремальный” (реализующий максимум коэффициента несимметрии) многочлен  $V(x, \bar{\mu})$  является  $M$ -многочленом и для него имеет место следующее представление:*

$$V(x, \bar{\mu}) = C \left( (x+1)(x-x_2)^2(x-x_4)^2(x-x_6)^2 + D \right).$$

Константы  $C, D$  при этом определяются следующими двумя условиями

$$V(1, \bar{\mu}) = c, \quad \int_{-1}^1 \frac{V(x, \bar{\mu})}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0.$$

Из первого равенства получаем

$$C \left( 2(1-x_2)^2(1-x_4)^2(1-x_6)^2 + D \right) = c$$

или

$$C = \frac{c}{\left( 2(1-x_2)^2(1-x_4)^2(1-x_6)^2 + D \right)}.$$

Второе равенство, являющееся следствием аналогичного равенства для исходного триго-

нометрического многочлена, приводит к соотношению

$$\begin{aligned} D &= D(x_2, x_4, x_6) = \\ &= - \int_{-1}^1 \frac{(x+1)(x-x_2)^2(x-x_6)^2}{2\sqrt{1-x^2}} dx. \end{aligned}$$

Так как  $V_{max} = c$ ,  $V_{min} = M := CD$ , то отыскание экстремумов для коэффициента несимметрии

$$\begin{aligned} k &:= \frac{V_{max}}{|V_{min}|} = \\ &= \frac{2(1-x_2)^2(1-x_4)^2(1-x_6)^2 + D(x_2, x_4, x_6)}{|\mathcal{D}(x_2, x_4, x_6)|} \end{aligned}$$

сводится к отысканию экстремумов функции

$$\mathcal{W} := \frac{(1-x_2)^2(1-x_4)^2(1-x_6)^2}{\mathcal{D}(x_2, x_4, x_6)}.$$

Следуя намеченным выше действиям, рассмотрим многочлен

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(x, \bar{v}) &= \\ &= (x+1)(x-x_2)^2(x-x_4)^2(x-x_6)^2 + D = \quad (19) \\ &= \sum_{k=0}^7 \bar{v}_k x^k. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} &(x-x_2)^2(x-x_4)^2(x-x_6)^2 = \\ &= (-\sigma_3 + \sigma_2 x - \sigma_1 x^2 + x^3)^2 = \\ &= \sigma_3^2 - 2\sigma_2\sigma_3 x + (\sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_3)x^2 - \\ &- 2(\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2)x^3 + (\sigma_1^2 + 2\sigma_2)x^4 - 2\sigma_1 x^5 + x^6, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= x_2 + x_4 + x_6, \quad \sigma_2 = x_2 x_4 + x_2 x_6 + x_4 x_6, \\ \sigma_3 &= x_2 x_4 x_6 \end{aligned}$$

(элементарные симметричные многочлены), получаем для коэффициентов многочлена (19) следующие выражения (через  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^T$ ):

$$\begin{aligned} \bar{v}_0 &= \sigma_3^2 + D, \quad \bar{v}_1 = -2\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2, \\ \bar{v}_2 &= 2\sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_2\sigma_3 + \sigma_2^2, \\ \bar{v}_3 &= \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_3, \\ \bar{v}_4 &= 2\sigma_2 - 2\sigma_3 + \sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2, \\ \bar{v}_5 &= -2\sigma_1 + 2\sigma_2 + \sigma_1^2, \quad \bar{v}_6 = 1 - 2\sigma_1, \quad \bar{v}_7 = 1. \end{aligned}$$

Несложные преобразования приводят к представлению  $\mathcal{W} = \frac{P^2(\sigma)}{Q(\sigma)}$ ,

$$P(\sigma) = 1 - \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3,$$

$$Q(\sigma) = 3/8\sigma_1^2 + 1/2\sigma_2^2 + \sigma_3^2 -$$

$$-3/4\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3 -$$

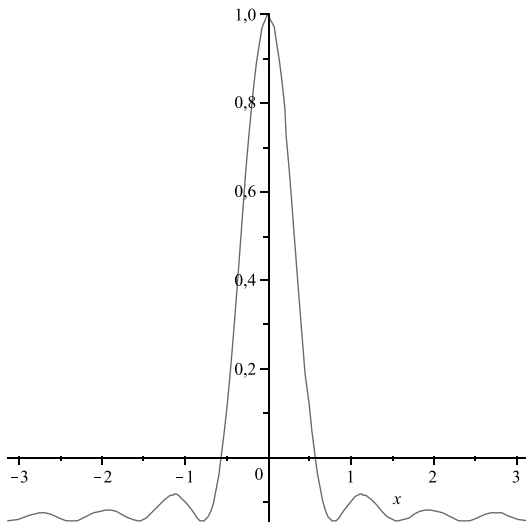
$$-5/8\sigma_1 + 3/4\sigma_2 - 3/4\sigma_3 + 5/16.$$

Экстремальные значения коэффициентов многочлена  $N$  определяются уравнениями

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \sigma_k} = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

На рисунке изображен график оптимального импульса в случае  $c = 1$  и соответствующего этому случаю (единственного) экстремального набора значений коэффициентов  $M$ -многочлена

$$\lambda = \frac{1}{4} \cdot \left( 1, \frac{6}{7}, \frac{5}{7}, \frac{4}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7} \right)^T.$$



Рисунок

Минимальное значение  $M$  функции импульса при  $c = 1$  равно

$$\left( 2(\lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_6) - 1 \right) = \left( \left( \frac{3}{7} + \frac{2}{7} + \frac{1}{7} \right) - 1 \right) = -\frac{1}{7}.$$

Следовательно, коэффициент несимметрии равен 7.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. — М.: Мир, 1985. — 280 с.
2. Мітропольський Ю.О., Мосеєнков Б.І. Дослідження коливань в системах з розподіленими параметрами (асимптотичні методи). Видавництво Київського університету. 1961. — 123 п.

3. Бардин Б. С., Фурта С. Д. Локальная теория существования периодических волновых движений бесконечной балки на нелинейно упругом основании // Актуальные проблемы классической и небесной механики. — М.: Эльф, 1998. — С. 13—22.
4. Борисович Ю. Г., Звягин В. Г., Сапронов Ю. И. Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере—Шаудера // Успехи матем. наук. Т. 32, вып. 4. 1977. — С. 3—54.
5. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. — М.: Наука. 1982. — 304 с.
6. Бреккер Т., Ландер Л. Дифференцируемые ростки и катастрофы. — М.: Мир, 1977. — 208 с.
7. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и её приложения. — М., Мир. 1980. — 608 с.
8. Сапронов Ю. И. Полурегулярные угловые особенности гладких функций // Матем. сборник. — 1989. Т. 180, № 10. — С. 1299—1310.
9. Красносельский М. А., Бобылев Н. А., Мухамдиев Э. М. Об одной схеме исследования вырожденных экстремалей функционалов классического вариационного исчисления // ДАН СССР. — 1978. — Т. 240, № 3. — С. 530—533.
10. Даринский Б. М., Сапронов Ю. И., Царев С. Л. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов // Современная математика. Фундаментальные направления. — М.: МАИ. Т. 12. — 2004. — С. 3—140.
11. Бобылев Н. А., Емельянов С. В., Коровин С. К. Геометрические методы в вариационных задачах. — М.: Магистр, 1998. — 658 с.
12. Карпова А. П., Копытин Н. А., Сапронов Ю. И. Фредгольмово уравнение с круговой симметрией в окрестности резонансной особой точки // Математические модели и операторные уравнения. Том 4. — Воронеж: ВГУ, 2007. — С. 69—90.
13. Карпова А. П. Бифуркации решений в резонансной особой точке фредгольмова уравнения с круговой симметрией // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения - 2007. — СПб., 2007. — С. 65—72.
14. Карпова А. П. Резонансные бифуркации решений фредгольмовых уравнений с круговой симметрией и нелинейная динамика // Вестник ВГУ. № 1. — Воронеж: ВГУ, 2008. — С. 184—194.
15. Карпова А. П., Сапронов Ю. И. Приближенное вычисление амплитуд циклов, бифурцирующих при наличии резонансов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008, Вып. 3. — С. 12—22.
16. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989. — 639 с.
17. Костин Д. В. Применение формулы Маслова для асимптотического решения одной задачи об

упругих деформациях // Матем. заметки, 2008, 83:1. — С. 50—60.

18. *Костин Д. В.* Об одной схеме анализа двухмодовых прогибов слабо неоднородной упругой

балки // Доклады Академии Наук, 2008, Т. 418, № 4, — С. 295—299.

19. *Ермоленко В. Н.* Инновационные решения для свайного фундаментостроения. Стройпрофиль, № 6 (84), 2010. — С. 20—22.

*Карпова А. П.* — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник НИИ математики, кафедры математического моделирования, Воронежский государственный университет

*E-mail:* karpovaantonina@mail.ru

*Tel.:* (473)255-64-82

*Karpova A. P.* — Candidate of physical and mathematical sciences, research assistant of Research Institute of Mathematics, mathematical simulation department, Voronezh State University

*E-mail:* karpovaantonina@mail.ru

*Tel.:* (473)255-64-82

*Костин Д. В.* — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования, Воронежский государственный университет

*E-mail:* dvkostin@rambler.ru

*Tel.:* (473)220-83-64

*Kostin D. V.* — Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, mathematical simulation department, Voronezh State University

*E-mail:* dvkostin@rambler.ru

*Tel.:* (473)220-83-64

*Махмуд Дия Джасим* — аспирант кафедры математического анализа, Дагестанский государственный университет

*E-mail:* mahoodalani@yahoo.com

*Tel.:* +79884354508

*Mahmood Dhiya Jasim* — postgraduate student, mathematical analysis department, Dagestan State University

*E-mail:* mahoodalani@yahoo.com

*Tel.:* +79884354508