УДК:517.988.6

ОБ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЯХ С СЮРЬЕКТИВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Б. Д. Гельман*, **С. С. Рыданова**

Воронежский государственный университет
Воронежский государственный педагогический университет

Поступила в редакцию 5.09.2011 г.

Аннотация: Настоящая статья посвящена изучению разрешимости и свойств множества решений операторных уравнений вида $A(x) = f(x)$, где A — линейный сюръективный оператор, а f — вполне непрерывное отображение. В работе доказаны некоторые теоремы существования и получены оценки на топологическую размерность множества решений таких уравнений. Даются приложения доказанных теорем к существованию локальных решений вырожденных дифференциальных уравнений.
Ключевые слова: линейный сюръективный оператор, топологическая степень, топологическая размерность, операторное уравнение.

Abstract: In this paper we study the solvability and properties of the set of solutions of operator equations of the form $A(x) = f(x)$, where A is a linear surjective operator and f is a completely continuous mapping. We prove some existence theorems and bounds on the topological dimension of the set of solutions of these equations. Applications to the theorems of existence of local solutions of degenerate differential equations.
Key words: linear surjective operators, a topological degree, a topological dimension, the operator equation.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть E_1, E_2 — два банаховых пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ — линейный сюръективный оператор, $f : D(f) \subset E_1 \to E_2$ — вполне непрерывное отображение. Рассмотрим следующее уравнение:

$$A(x) = f(x). \qquad (1)$$

Уравнения такого вида естественно возникают во многих задачах дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Обозначим $N(A, f)$ множество решений уравнения (1), т.е.

$$N(A, f) = \left\{x \in E_1 \mid A(x) = f(x)\right\}.$$

В случае, когда оператор A является непрерывным, уравнения такого вида изучались в работах [1]—[4]. Случай замкнутого оператора A изучался в работе [5]. В настоящей работе рассматривается случай, когда оператор A может быть и не замкнутым, но существует непрерывное отображение правое обратное к A. Нас будет интересовать существование решений уравнения (1) и топологическая размерность dim этого множества. Свойства размерности dim смотри, например, [6].

* Работа поддержана грантом РФФИ № 11-01-00382-а.

1. КВАЗИОБРАТИМЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СЮРЪЕКТИВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ — линейный сюръективный оператор.

Определение 1. *Будем говорить, что оператор A является квазиобратимым, если существует непрерывное отображение $p : E_2 \to E_1$ такое, что $A\big(p(y)\big) = y$ для любого $y \in E_2$. В этом случае отображение p будем называть квазиобратным к отображению.*

Рассмотрим некоторые примеры квазиобратимых операторов.

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ — замкнутый сюрьективный линейный оператор. Тогда для любого $y \in E_2$ множество

$$A^{-1}(y) = \left\{x \in E^1 \mid A(x) = y\right\} \neq \varnothing,$$

т.е. определено многозначное отображение $A^{-1} : E_2 \to E_1$.

Определение 2. *Число*

$$\left\|A^{-1}\right\| = \sup_{y \in E_2}\left(\frac{inf\left\{\|x\| \mid x \in E_1, A(x) = y\right\}}{\|y\|}\right)$$

называется нормой многозначного отображения A^{-1}.

Лемма 1. *Пусть y_0 — произвольная точка из пространства E_2, x_0 — произвольная точка из множества $A^{-1}(y_0)$, тогда для любого числа k, $\|A^{-1}\| < k$, существует непрерывное отображение $q: E_2 \to E_1$, такое что выполнены следующие условия:*

1) $A(q(y)) = y$ для любого $y \in E_2$;

2) $\|x_0 - q(y)\| \le k\|y_0 - y\|$ для любого $y \in E_2$.

Доказательство этой леммы содержится в [7].

Таким образом, замкнутый линейный сюръективный оператор является квазиобратимым, а отображение q является квазиобратным к оператору A.

Рассмотрим еще один пример квазиобратимого оператора.

Пусть $E_1, E_2, ...E_{n+1}$ — банаховы пространства, $A_i: D(A_i) \subset E_i \to E_{i+1}$ — замкнутый сюрьективный линейный оператор, $i = 1, 2, ...n$.

Рассмотрим отображение $C = A_n \circ A_{n-1} \circ ... \circ A_1$. Областью определения этого отображения является множество

$$D(C) = A_1^{-1}\left(A_2^{-1}\left(...\left(A_{n-1}^{-1}\left(D(A_n)\right)...\right)\right)\right).$$

Очевидно, что C также является сюрьективным оператором.

Лемма 2. *Пусть $x_0^{(n+1)}$ — произвольная точка из пространства E_{n+1}, x_0^1 — произвольная точка из множества $C^{-1}\left(x_0^{(n+1)}\right)$, тогда для любого числа k, $\|A_1^{-1}\| \cdot \|A_2^{-1}\| \cdot ... \cdot \|A_n^{-1}\| < k$, существует непрерывное отображение $q_c: E_{n+1} \to E_1$ такое, что выполнены следующие условия:*

1) $C\left(q_c\left(x^{(n+1)}\right)\right) = x^{(n+1)}$ для любой точки $x^{(n+1)} \in E_{n+1}$;

2) $\left\|x_0^1 - q_c\left(x^{(n+1)}\right)\right\| \le k\left\|x_0^{(n+1)} - x^{(n+1)}\right\|$ для любой точки $x^{(n+1)} \in E_{n+1}$.

Доказательство. Рассмотрим числа $k_1, k_2, ...k_n$ такие, что $\|A_1^{-1}\| < k_1$, $\|A_2^{-1}\| < k_2$, ... $\|A_n^{-1}\| < k_n$ и $k_1 \cdot k_2 \cdot ... \cdot k_n = k$.

Так как $x_0^1 \in C^{-1}\left(x_0^{(n+1)}\right)$, то существуют такие точки x_0^s, где $s = 1, 2, ..., n$, что $x_0^s \in A_s^{-1}\left(x_0^{(s+1)}\right)$.

В силу леммы 1 существуют непрерывные отображения $q_s: E_{s+1} \to E_s$ такие, что выполнены условия:

1) $A_s\left(q_s\left(x^{(s+1)}\right)\right) = x^{(s+1)}$ для любого $x^{(s+1)} \in E_{s+1}$;

2) $\left\|x_0^s - q_s\left(x^{s+1}\right)\right\| \le k_s\left\|x_0^{(s+1)} - x^{(s+1)}\right\|$ для любого $x^{(s+1)} \in E_{s+1}$.

Рассмотрим композицию $q_c = q_1 \circ q_2 \circ ... \circ q_n : E_{n+1} \to E_1$. Тогда для любой точки $x^{(n+1)} \in E_{n+1}$ имеем:

$$C\left(q_c\left(x^{(n+1)}\right)\right) =$$

$$= A_n\left(A_{n-1}\left(...A_1\left(q_1\left(q_2 ...q_n(x^{(n+1)})...\right)...\right)\right)\right) = x^{n+1}.$$

Таким образом первая часть леммы доказана.

Оценим $\left\|x_0^1 - q_c\left(x^{n+1}\right)\right\| = \left\|x_0^1 - q_1\left(q_2\left(...\left(q_n\left(x^{n+1}\right)\right)...\right)\right)\right\|$. Имеем:

$$\left\|x_0^1 - q_1\left(q_2\left(...\left(q_n\left(x^{n+1}\right)\right)...\right)\right)\right\| \le$$

$$\le k_1\left\|x_0^2 - q_2\left(...\left(q_n\left(x^{n+1}\right)...\right]\right\| \le ...$$

$$... \le k_1 k_2 ... k_n\left\|x_0^{(n+1)} - x^{n+1}\right\|.$$

Так как $k_1 \cdot k_2 \cdot ... \cdot k_n = k$, то

$$\left\|x_0^1 - q_c\left(x^{n+1}\right)\right\| \le k\left\|x_0^{(n+1)} - x^{n+1}\right\|.$$

Леммы доказана.

Таким образом, композиция конечного числа замкнутых линейных сюръективных операторов также является квазиобратимым отображением и q_c является квазиобратным отображением.

2. ОБ УРАВНЕНИЯХ С КВАЗИОБРАТИМЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

В дальнейшим будем предполагать, что оператор $A: D(A) \subset E_1 \to E_2$ квазиобратим и p является отображением квазиобратным к A.

Пусть V — ограниченное открытое множество в E_1, $f: \bar{V} \to E_2$ — непрерывное отображение.

Рассмотрим уравнение:

$$A(x) = f(x) \tag{1}$$

Пусть $N(A, f)$ — множество решений этого уравнения, т.е.

$$N(A, f) = \left\{x \in \bar{V} \mid A(x) = f(x)\right\}.$$

Определение 3. *Будем говорить, что отображение f является (A, p)-вполне непрерывным, если $p \circ f$ является вполне непрерывным отображением.*

Пусть отображение f — (A, p)-вполне непрерывно, $g: \bar{V} \times Ker(A) \to E_1$ — отображение, определенное следующим условием:

$$g(x, u) = p\left(f(x)\right) + u. \tag{2}$$

Рассмотрим уравнение:

$$g(x,u) = x. \tag{3}$$

Лемма 3. *Уравнения (1) и (3) эквивалентны.*

Доказательство этой леммы очевидно.

Изучим некоторые свойства множества $N(A,f)$. Нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 4. *Пусть существует квазиобратное к оператору A отображение p такое, что:*

1) вполне непрерывное отображение $g = p \circ f : \bar{V} \to E_1$ не имеет неподвижных точек на ∂V;

2) топологическая степень $\gamma(i-g,\partial V) \neq 0$.

Тогда: $N(A,f) \neq \varnothing$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение $g(x) = x$, т.е.

$$p\left(f(x)\right) = x. \tag{4}$$

Так как по условию 2 топологическая степень $\gamma(i-g,\partial V) \neq 0$, то существует по крайней мере одна точка x_* такая, что $g\left(x_*\right) = x_*$. Применим оператор A к обеем частям этого тождества, тогда $A\left(p\left(f(x_*)\right)\right) = A\left(x_*\right)$. Тогда $f\left(x_*\right) = A\left(x_*\right)$, т.е. x_* является решением уравнения (1). Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия леммы 4. Если $Ker(A) \neq \{0\}$, то $N(A,f) \cap \partial V \neq \varnothing$.*

Доказательство. Так как отображение g является вполне непрерывным, то множество $g\left(\bar{V}\right)$ является относительно компактным. Тогда существует такое число $k > 0$, что $\|g(x)\| \le k$ и $\|x\| \le k$ для любого $x \in \bar{V}$. Так как $Ker(A) \neq \{0\}$, то существует не нулевой вектор $e \in Ker(A)$ такое, что $\|e\| > 2k$.

Рассмотрим семейство отображений $\varphi(\lambda,x) = x - q(x) - \lambda e$, где $\lambda \in [0,1], x \in \bar{V}$. Покажем, что это семейство не может быть невырожденной гомотопией (см. [9]). Пусть $\varphi_1 = \varphi(1,\cdot) : \bar{V} \to E$. Если отображение φ является гомотопией, то

$$\gamma(\varphi_1,\partial V) = \gamma(i-g,\partial V) \neq 0.$$

С другой стороны, отображение $\varphi(1,x) = x - g(x) - e$ не имеет особых точек на ∂V, так как

$$\|\varphi(1,x)\| \ge \|e\| - \|x\| - \|g(x)\| > 2k - 2k = 0$$

для любой точки $x \in \bar{V}$. Тогда $\gamma\left(\varphi_1,\partial V\right) = 0$. Следовательно, существует такое число λ_0 и такая точка $x_0 \in \partial V$, что $\varphi\left(\lambda_0, x_0\right) = 0$, т.е. $x_0 - g\left(x_0\right) - \lambda_0 e = 0$. Подействуем на это равенство оператором A, получим: $0 = A\left(x_0\right) - f\left(x_0\right)$. Следовательно, точка $x_0 \in \partial V$ является решением уравнением уравнения (1). Лемма доказана.

Пусть E — банахово пространство, $\hat{E}$ равно $E \times R^n$. Норму $\hat{E}$ определим по правилу

$$\|(x,l)\| = \sqrt{\| x \|^2 + \| l \|^2}.$$

Пусть U — ограниченное открытое множество в банаховом пространстве $\hat{E}$, а $\varphi : \bar{U} \to E$ — вполне непрерывное отображение. Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x,l) = x.$$

Пусть $N(\varphi,\bar{U})$ множество решений этого уравнения.

Рассмотрим множество $U_0 = U \cap (E \times 0)$ и отображение $h_0(x) = \varphi(x,0)$, определенное на этом множестве. Будем отождествлять множество U_0 с соответствующим множеством в E.

Лемма 6. *Если $\gamma\left(i - h_0, \bar{U}_0\right) \neq 0$, то множество $N(\varphi,\bar{U})$ не пусто и*

$$dim\left(N(\varphi,\bar{U})\right) \ge n.$$

Доказательство этой леммы содержится в [8].

Применим эту лемму к изучению топологической размерности множества $N(A,f)$.

Лемма 7. *Пусть выполнены условия леммы 4. Если $Ker(A) \neq \{0\}$, то $dim\left(N(A,f)\right) \ge dim\left(Ker(A)\right)$.*

Доказательство. Пусть $p : E_2 \to E_1$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям леммы 4. Рассмотрим произвольное число $n \le dim\left(Ker(A)\right)$ и n-мерное подпространство $E^n \subset Ker(A)$. Пусть непрерывное отображение $g : \bar{V} \times E^n \to E_1$, определено условием

$$g(x,u) = p\left(f(x)\right) + u.$$

Очевидно, что отображение g является вполне непрерывным. Пусть $B_1[0]$ — единичный шар в пространстве E^n, обозначим $\bar{U} = \bar{V} \times B_1[0]$. Очевидно, что множество $U_0 = U \cap (V \times 0)$ отождествляется с множеством V, а отображение g_0 с отображением $q = p \circ f$. Так как $\gamma(i - g, \partial U_0) \neq 0$, то мы находимся в условиях леммы 6. Следовательно, множество решений $N(g,\bar{U})$ уравнения $g(x,u) = x$ непусто и имеет топологическую размерность большую или равную n. Рассмотрим отображение

$$\alpha : N(g,\bar{U}) \to N(A,f), \quad \alpha(x,u) = x,$$

т.к. любая точка $(x_*, u_*) \in N(g, \bar{U})$ определяет решение уравнения (1). Проверим, что отображение α является биекцией. Действительно, если $\alpha(x_1, u_1) = \alpha(x_2, u_2) = x_1 = x_2$, то

$$x_1 = p(f(x_1)) + u_1 = x_2 = p(f(x_2)) + u_2.$$

Следовательно, $u_1 = u_2$, т.е. $(x_1, u_1) = (x_2, u_2)$. Так как множество $N(g, \bar{U})$ является компактом и α — непрерывное отображение, то оно является гомеоморфизмом на свою область значений. Тогда,

$$\dim(N(A,f)) \geq \dim\left(\alpha\left(N\left(g,\bar{U}\right)\right)\right) = \\ = \dim\left(N(g,\bar{U})\right) \geq n.$$

Так как число n выбиралось произвольно, то

$$\dim(N(A,f)) \geq \dim(Ker(A)).$$

Лемма доказана.

Объединяя результаты лемм 4, 5 и 7, получим следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть существует такое квазиобратное к оператору A отображение p, что отображение $g = p \circ f : \bar{V} \to E_1$ является вполне непрерывным и не имеет неподвижных точек на ∂V. Если топологическая степень $\gamma(i - g, \partial V) \neq 0$, то $N(A, f) \neq \varnothing$.*

Если же кроме этого $\dim(Ker(A)) > 0$, то $N(A,f) \cap \partial V \neq \varnothing$ и $\dim N(A,f) \geq \dim(Ker(A))$.

Рассмотрим некоторые следствия этой теоремы.

Пусть $E_1, E_2, ...E_{n+1}$ — банаховы пространства, $A_i : D(A_i) \subset E_i \to E_{i+1}$, $i = 1, 2, ...n$, — замкнутые сюрьективные линейные операторы. Рассмотрим оператор $C = A_n \circ A_{n-1} \circ ... \circ A_1$.

Пусть $x_0 \in D(C)$ — некоторая точка, $B_R[x_0]$ — замкнутый шар радиуса R с центром в x_0, $f : B_R[x_0] \to E_2$ — вполне непрерывное отображение.

Нас будет интересовать уравнение:

$$C(x) = f(x). \tag{5}$$

Как и раньше обозначим $N(C, f)$ множество решений этого уравнения.

Теорема 2. *Если существует такое число $k > \|A_1^{-1}\| \cdot \|A_2^{-1}\| \cdot ... \cdot \|A_n^{-1}\|$, что для любой точки $x \in B_R[x_0]$ справедливо неравенство*

$$\|C(x_0) - f(x)\| < \frac{R}{k},$$

то $N(C, f) \neq 0$. Если же кроме этого $\dim(Ker(C)) > 0$, то $N(C,f) \cap \partial B_R[x_0] \neq \varnothing$ и $\dim(N(C,f)) \geq \dim(Ker(C))$.

Доказательство. Пусть $q_c : E_{n+1} \to E_1$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям леммы 2.

Пусть отображение $\hat{f} : B_R[x_0] \to E_1$, определенно условием $\hat{f}(x) = q_c(f(x))$. Очевидно, что отображение $\hat{f}$ является вполне непрерывным.

Покажем, что $\hat{f} : B_R[x_0] \to B_R[x_0]$ и не имеет неподвижных точек на границе. В силу свойств топологической степени это означает, что $\gamma(i - \hat{f}, \partial B_R[x_0]) = 1$.

Имеем:

$$\|x_0 - \hat{f}(x)\| = \|x_0 - q_c(f(x))\| \leq k\|z_0 - f(x)\| = \\ = k\|C(x_0) - f(x)\| < k\frac{R}{k} = R.$$

Таким образом мы находимся в рамках теоремы 1, что и гарантирует выполнение условий 1)-3). Теорема доказана.

Из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть $C : D(C) \subset E_1 \to E_{n+1}$ — линейный сюрьективный оператор, удовлетворяющий условиям теоремы 2, и $f : E_1 \to E_{n+1}$ — вполне непрерывное отображение. Если существуют числа $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$ такие, что:*

1) $\|f(x)\| \leq \alpha\|x\| + \beta$ для любого $x \in E_1$;

2) $\alpha \cdot \|A_1^{-1}\| \cdot \|A_2^{-1}\| \cdot ... \cdot \|A_n^{-1}\| < 1$.

Тогда уравнение $C(x) = f(x)$ имеет решение. Если же кроме этого $\dim(Ker(C)) > 0$, то $\dim(N(C,f)) \geq \dim(Ker(C))$ и для любого

$$R > \frac{\beta k}{1 - k \cdot \alpha},$$

где

$$\|A_1^{-1}\| \cdot \|A_2^{-1}\| \cdot ... \cdot \|A_n^{-1}\| < k < \frac{1}{\alpha},$$

существует точка $x \in N(C,f)$ такая, что $\|x\| = R$.

Доказательство. Рассмотрим шар $B_R[0]$ и найдем такое R, для которого будут выполнены условия теоремы 2.

Пусть

$$R > \frac{\beta k}{1 - k \cdot \alpha},$$

тогда для любого $x \in B_R[x_0]$ выполнено следующее неравенство:

$$\|C(0) - f(x)\| = \|f(x)\| \leq \alpha\|x\| + \beta \leq \alpha R + \beta < \frac{R}{k}.$$

Значит мы находимся в рамках теоремы 2. Следствие доказано.

Следствие 2. *Пусть* $C : D(C) \subset E_1 \to E_{n+1}$ *— линейный сюръективный оператор, удовлетворяющий условиям теоремы 2, и* $B : E_1 \to E_{n+1}$ *— линейный вполне непрерывный оператор. Если*

$$\|B\| \cdot \|A_1^{-1}\| \cdot \|A_2^{-1}\| \cdot \ldots \cdot \|A_n^{-1}\| < 1,$$

то $\dim\left(Ker(C+B)\right) \geq \dim\left(Ker(C)\right)$.

Доказательство этого следствия вытекает из следствия 1.

3. О ЛОКАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ — линейный замкнутый сюрьективный оператор. Тогда естественно определяется отображение $\hat{A} : D\left(\hat{A}\right) \subset C_{([a,b],E_1)} \to C_{([a,b],E_2)}$ по следующему правилу:

$$\hat{A}(x)(t) = A\left(x(t)\right),$$

где $D(\hat{A}) = C_{([a,b],D(A))} \cap \hat{A}^{-1}\left(C_{([a,b],E_2)}\right)$. Очевидно, что множество $D(\hat{A}) \neq \varnothing$.

Лемма 8. *Если отображение* $\hat{A}$ *линейно и замкнуто, то:*

1) отображение $\hat{A}$ *сюръективно;*

2) $\|\hat{A}^{-1}\| = \|A^{-1}\|$.

Доказательство этой леммы содержится в [7].

Применим теперь доказанные в предыдущих разделах теоремы к изучению вырожденных уравнений в банаховых пространствах.

Пусть

$$C = A_n \circ A_{n-1} \circ \ldots \circ A_1 : D(C) \subset E_1 \to E_{n+1}$$

— композиция замкнутых линейных сюръективных операторов.

Пусть $B_R[x_0]$ — замкнутый шар с центром в точке $x_0 \in D(C)$, $f : [0,T] \times B_R[x_0] \to E_{n+1}$ — вполне непрерывное отображение.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\left(Cx(t)\right)' = f\left(t, x(t)\right) \qquad (6)$$

$$C\left(x(0)\right) = C\left(x_0\right) \qquad (7)$$

Решением задачи (6), (7) на промежутке $\left[0,h\right]$, $0 < h \leq T$, называется непрерывная функция $x_* : \left[0,h\right] \to D(C) \subset E_1$ такая, что

$$\left(Cx_*(t)\right)' = f\left(t, x_*(t)\right)$$

для любого $t \in \left[0,h\right]$ и $C\left(x_*(0)\right) = C\left(x_0\right)$. Обозначим $N\left(x_0, \left[0,h\right]\right)$ — множество решений задачи (6), (7) на промежутке $\left[0,h\right]$.

Теорема 3. *При сделанных предположениях существует такое* $h_0 > 0$, *что* $N\left(x_0, \left[0,h_0\right]\right) \neq \varnothing$.

Если $Ker(C) \neq 0$, *то* $\dim\left(N\left(x_0,\left[0,h_0\right]\right)\right) = \infty$

Если

$$R > \frac{\beta k}{1 - k \cdot \alpha},$$

где

$$\|A_1^{-1}\| \cdot \|A_2^{-1}\| \cdot \ldots \cdot \|A_n^{-1}\| < k < \frac{1}{\alpha},$$

то $N\left(x_0,\left[0,h_0\right]\right) \cap \partial B_R\left[x_0\right] \neq \varnothing$.

Доказательство. Пусть $h \in \left[0;T\right]$ — произвольное число, рассмотрим функцию $\overline{x}_o \in C_{([0,h],E_1)}$, определенную условием: $\overline{x}_0(t) = x_0$ для любого $t \in \left[0,h\right]$.

Оператор $A_i : D\left(A_i\right) \subset E_i \to E_{i+1}$ порождает линейный оператор $\widehat{A_i} : D(\widehat{A_i}) \subset C_{([0,T],E_i)} \to$ $\to C_{([0,T],E_{i+1})}$ по следующему правилу:

$$\widehat{A_i}(x)(t) = A_i\left(x(t)\right),$$

где $i = 1, 2 \ldots n$.

Рассмотрим линейный оператор

$$\hat{C} : D\left(\hat{C}\right) \subset C_{([0,h],E_1)} \to C_{([0,h],E_{n+1})}$$

построенный по оператору C. Тогда оператор $\hat{C}$ можно представить в виде композиции

$$\hat{C} = \widehat{A_n} \circ \widehat{A_{n-1}} \circ \ldots \circ \widehat{A_1},$$

то есть он является композицией замкнутых сюрьективных операторов (см. лемму 8).

Выберем число $k > \|A_1^{-1}\| \cdot \|A_2^{-1}\| \cdot \ldots \cdot \|A_n^{-1}\|$.

Пусть $B_R\left[\overline{x}_0\right] \subset C_{([0,h],E_1)}$ — замкнутый шар радиуса R с центром в $\overline{x}_0$. Рассмотрим отображение $g : B_R\left[\overline{x}_0\right] \to C_{([0,h],E_{n+1})}$ определенное условием,

$$g(x)(t) = \int_0^t f\left(s, x(s)\right) ds + C\left(x_0\right)$$

Это отображение является вполне непрерывным. Рассмотрим операторное уравнение

$$\hat{C}(x) = g(x). \qquad (8)$$

Покажем, что при малых h это операторное уравнение удовлетворяет условиям теоремы 2. Для этого оценим норму $\left\|\hat{C}(\hat{x}_0)(t) - g(x)(t)\right\|$ на шаре $B_R\left[\overline{x}_0\right] \subset C_{([0,h],E_1)}$. Имеем:

$$\left\| \hat{C}\left(\overline{x}_0\right)(t) - g(x)(t) \right\| = \left\| \int_0^t f\left(s, x(s)\right) ds \right\| \le$$
$$\le \int_0^t \left\| f\left(s, x(s)\right) \right\| ds \le Nt \le Nh,$$

где N такое число, что для любой пары $(t,x) \in \left[0,T\right] \times B_R\left[x_0\right]$ выполняется неравенство $\left\| f(t,x) \right\| \le N$. Оно существует в силу полной непрерывности отображения f. Если выбрать число $0 < h_0 < \dfrac{R}{k\,N}$, то

$$\left\| \hat{C}\left(\overline{x}_0\right)(t) - g(x)(t) \right\|_C \le Nh_0 < \frac{R}{k}.$$

Таким образом выполнены условия теоремы 2 для шара $B_R\left[\overline{x}_0\right] \subset C_{([0,h_0],E_1)}$, что и доказывает теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ricceri B.* On the topological dimension of the solution set of a class of nonlinear equations / B. Ricceri // C. R. Acad. Sci., Paris. — 1997. — T. 325. — P. 65—70.

2. *Fitzpatrick P. M., Massabo I., Pejsachowicz I.* On the covering dimension of the set of solutions of some nonlinear equations / P. M. Fitzpatrick, L. Massabo, I. Pejsachowicz // Trans. of the American Math. Society. — 1986 — V. 296, N 2. — P. 777—798.

3. *Гельман Б. Д.* Об одном классе операторных уравнений / Б.Д. Гельман // Математические заметки. — 2001. — Т. 70, № 4. — С. 544—552.

4. *Гельман Б. Д.* Теорема Борсука—Улама в бесконечномерных банаховых пространствах / Б. Д. Гельман // Матем. сборник. — 2002. — Т. 193, № 1. — С. 83—92.

5. *Гельман Б. Д.* Бесконечномерная версия теоремы Борсука-Улама / Б. Д. Гельман // Функциональный анализ и его приложения. — 2004. — Т. 38, № 4. — С. 1—5.

6. *Александров П. С., Пасынков Б. А.* Введение в теорию размерности / П. С. Александров, Б. А. Пасынков. — М.: Наука, 1973. — 575 с.

7. *Гельман Б. Д.* Операторные уравнения и задача Коши для вырожденных дифференциальных уравнений / Б. Д. Гельман // Вестник ВГУ, серия: физика, математика. — 2007. — № 2. — С. 86—91.

8. *Гельман Б. Д.* Топологические свойства множества неподвижных точек многозначных отображений / Б. Д. Гельман // Математический сборник. — 1997. — Т. 188, № 12. — С. 33—56.

9. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко. — М.: Наука. — 1975. — 510 с.

Гельман Б. Д. — доктор физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и геометрии, Воронежский государственный университет

E-mail: gelman@math.vsu.ru

Тел.: 2235-692

Рыданова С. С. — аспирант кафедры высшей математики, Воронежский государственный педагогический университет

E-mail: rydanova_vrn@mail.ru

Gel'man B. D. — Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Docent of the Department of Theory of Functions and Geometry, Voronezh State University

E-mail: gelman@math.vsu.ru

Tel.: 2235-692

Rydanova S. S. — aspirant of Department of Higher Mathematics, Voronezh State Pedagogical University

E-mail: rydanova_vrn@mail.ru